联盟结构合作博弈的平等盈余分配

于晓辉[1], 王文举[2], 张 强[3], 张志强[1], 商盈润[1]

(1. 北京物资学院双碳研究院&物流学院, 北京 101149;

2. 北京物资学院双碳研究院&经济学院, 北京 101149; 3. 北京理工大学管理与经济学院, 北京 100081)

摘要: 在联盟结构合作博弈中, 探讨了优先联盟议价能力对其局中人收益分配的影响, 构建了基于"平等盈余分配"(即ESD解)的分配方法. 首先, 基于ESD解及其扩展形式, 将优先联盟的议价能力转化为其收益分配的动态权重. 然后, 基于Owen型值二步法构建了体现局中人加入大联盟前后收益差异的联盟结构合作博弈"解"(即: 两种广义加权平等盈余分配), 并进行了公理化论证. 通过对比两种广义加权平等盈余分配方案, 分析可知: 企业自身实力的增强会降低其加入到联盟结构合作的意愿, 但是必然会提高大联盟中其他优先联盟的合作意愿, 而不一定会增强其同一优先联盟中其他伙伴的合作意愿; 当企业经济实力的增强时, 应该通过合理地设置优先联盟的动态权重来保证其同一优先联盟伙伴的合作意愿. 因此, 广义平等盈余分配可以帮助局中人评估可能的合作分配和合作方式, 从而选择最优的合作形式.

关键词: 联盟结构; 平等盈余分配; 加权解; 合作博弈

中图分类号: O225 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2026)01−0028−18

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2026.01.003

The ESD solution of cooperative game with a coalition structure

Yu Xiaohui[1], **Wang Wenju**[2], **Zhang Qiang**[3], **Zhang Zhiqiang**[1], **Shang Yingrun**[1]

(1. Institute for Carbon Peak and Neutrality & Logistics School, Beijing Wuzi University, Beijing 101149, China;

2. Institute for Carbon Peak and Neutrality & Economics School, Beijing Wuzi University, Beijing 101149, China;

3. School of Management & Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In the cooperative game with a coalition structure, we discuss the influence of bargaining power of priori coalition on the distribution of its players' profits, and some new solutions are gotten by "equal surplus distribution" (i.e., ESD) solution. Firstly, based on the ESD solution and its extended form, the bargaining power of the priori coalition is converted into the dynamic weight of its profit distribution. Then, this paper constructs the "solutions" of the cooperative game with a coalition structure (i.e., two kinds of generalized ESD solutions) based on the two-step method of Owen type value. The proposed solutions can reflect the profit difference between the players before and after joining the grand coalition, and they have been axiomatized. By comparing two generalized weighted equal surplus distribution schemes, we get that the enhancement of a company's own strength will reduce his willingness to participate in the cooperation as a member of priori coalition, but it will inevitably increase the willingness to cooperate with other priori coalitions in the grand coalition, rather than necessarily enhancing the willingness to cooperate with other partners in the same priori coalition. When the economic strength of an enterprise increases, the dynamic weight of the priori coalition should be reasonably set to ensure the willingness of his partners in the same priori coalition to cooperate with him. Therefore, the generalized equal surplus distribution can help players evaluate possible cooperative allocation and cooperation methods, and thus choose the optimal form of cooperation.

Key words: coalition structure; equal surplus division; weighted value; cooperative game

收稿日期: 2022−11−17; 修订日期: 2023−01−28.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(72171024); 北京市属高等学校优秀青年人才培育计划资助项目(BPHR202203154).

1 引 言

近年, SARS危机、新冠肺炎疫情等频繁的突发事件对企业的生存与发展形成严峻挑战, 积极应对这些具有公共性、紧迫性、破坏性以及不确定性的突发事件成为了企业管理的重要内容, 而建立企业联盟对于降低" 断链"风险具有重要意义. 例如: 2011年"日本大地震"之后，汽车供应链中企业(包括竞争对手)之间加强合作, 建立在危机时期与其它公司共用生产线的复合生产体制; 2020 年新冠肺炎疫情中, "京东"与中铁快运、顺丰、中国邮政等行业内企业共享运力资源, 实现物资运输效率的最大化等. 联盟的合作形式遍及经济领域的各个行业, 表现也多种多样, 例如: 绿色供应链的多层次合作[1], 三级供应链的碳减排合作[2], 物流协作配送合作[3]等. 下面以供应链间合作为例: 与传统供应链合作问题是不同的, 这种协调需要考虑单链上企业参与合作的稳定性以及单链作为整体参与跨链整体合作的动机, 需要调整契约协调或者收益分配策略以重新达到均衡, 即供应链间跨链协作需要重新调整收益共享方案. 然而, 通常来讲, 实现供应链间跨链合作是较为困难的, 因为收益分配需要在链间、链内双层面展开, 但是, 突发事件下的"断链"风险促成了供应链之间的跨链合作, 为双层次的协作创造了条件. 上述双层次合作以及收益分配等问题尽管可归结为"联盟"合作范畴, 然而, 应用经典合作博弈(或称: 合作博弈) 理论的前提是所有联盟收益均已知且局中人无结盟偏好, 因此经典合作博弈无法求解双层次的跨供应链协作问题, 这迫使我们寻求新的求解方法. 作为经典合作博弈的拓展形式之一, 联盟结构合作博弈承认局中人参与合作的偏好, 从而允许合作具有一定的限制, 例如: 合作的层次性等.

在合作联盟组建时, 局中人之间往往具有一定的前期合作历史或者合作偏好, 此结盟偏好使得局中人愿意先"抱团"组成"小联盟", 然后以"小联盟"再加入到大联盟合作中, 形成层次合作. 上述层次合作可以用"联盟结构"概念进行刻画, 联盟结构是参与博弈全体局中人的一个划分, 其中的元素称为"优先联盟". 实质上, "优先联盟"是由相同结盟偏好的局中人构成, 以此形成的具有联盟结构的合作博弈(简称: 联盟结构合作博弈)是一类具有合作限制的合作博弈. 联盟结构博弈中, 局中人选择以优先联盟一员参与大联盟合作的根本目的是获得更多的利益, 不合理的收益分配方案往往是大联盟合作破裂的根本原因. 因此, 寻求一种更加合理的分配方案(即"解")是联盟结构合作博弈中的重要研究方向之一, Owen值是联盟结构合作博弈中最著名的求解方法. 近年来学者们对Owen值及其拓展"解"做了很多研究, 但是考虑优先联盟议价能力的Owen值仍然比较少. 由此, 本文将议价能力引入到Owen值中, 以此体现局中人加入大联盟收益差异.

Owen[4]在1977年最初提出Owen值作为联盟结构合作博弈的"解", 将联盟结构合作博弈的求解分为两个层面(即"二步法"): 第一步是在各优先联盟之间, 第二步是在各优先联盟内部的局中人之间. 例如: 高校在绩效工资总额下拨时, 先以二级学院考核结果、老师人数和对应职称进行划拨, 然后二级学院再将已拨工资根据教师的业绩进行二次分配. Owen值是联盟结构合作博弈的经典求解方法, 目前研究主要包括两个方面: 第一是不同角度对Owen值进行公理化, 寻求简单、无冗余的公理化方法[5]; 第二是基于上述二步法提出一些新"解". 事实上, 上述二步法中每一步都对应一个合作博弈的"解"或分配函数, Owen 值主要由第一步中的分配函数f^1和第二步中的分配函数f^2 决定, 所有上述两步法构建的一系列"解"均可称作"Owen型值"[6]. 在Owen 值的二步法中, 函数f^1 与f^2 均对应合作博弈的Shapley值, 目前其他Owen型值也有很多, 例如: Banzhaf-Owen值[7−10]、对称Banzhaf 值[11]、Myerson-Owen 值[12−13]等等. 其中, Banzhaf-Owen 值是将Owen值中的f^1 与f^2均替换为Banzhaf值, 对称Banzhaf值中f^1是Shapley 值、f^2是Banzhaf值, 而Myerson-Owen 值中的f^1与f^2分别是Shapley值与Myerson值[14]. 由此可见, 不同的f^1 与f^2 可以构建不同的联盟结构合作博弈"Owen型值", 由于上述f^1函数是将优先联盟视为相对平等的局中人个体, 因此并未考虑到优先联盟规模的影响.

为了区分优先联盟的不同规模影响, 有些学者基于加权Shapley值将联盟规模视为Owen型值第一步分配的权重, 从而扩展得到一些新的Owen型值, 例如: Levy和McLean[15]. Vidal Puga[16]从非合作的角

度描述了联盟解, 这与优先联盟之间的加权Shapley值相一致, 其中联盟的权重也由其规模大小确定. Kamijo[17] 构建了集体值(collective value), 首先通过加权Shapley 值在优先联盟之间分配收益, 然后将优先联盟的净盈余平均分配给局中人. 同时, 根据团结(Solidarity)值[18], Calvo和Gutiérrez又提出了联盟结构合作博弈的Shapley-Solidarity值[19]. 继Calvo和Gutiérrez[19] 之后, Hu等[20−21]论证了加权Shapley-Egalitarian值以及Aumann-Drèze值. 综上, 上述研究主要是将联盟的规模大小作为优先联盟的权重大小, 从而基于加权Shapley值定义了一些新的Owen型值.

可见, 在联盟结构合作博弈中, 引入优先联盟的议价能力的Owen型值较少, 大部分学者将联盟规模作为其分配权重, 而较少分析优先联盟分配权重变化对局中人收益分配产生的动态影响. 然而, 联盟结构合作博弈的"解"需要区别于一般的合作博弈, 此时局中人有自发形成联盟结构的动机, 如果未考虑局中人以优先联盟整体参与大联盟合作的利益诉求, 容易使局中人丧失合作意愿, 最终导致大联盟组建的失败. 例如, 高校二级学院绩效工资总额在进行分配时, 不仅考虑学院的绩效, 还要考虑其关键人员的绩效结果, 避免一位优秀老师因其所在二级学院的绩效差而收入减少, 最后导致学校流失人才. 假设一个由局中人1、局中人2和局中人3组成的合作博弈, 局中人1与局中人2组成一个"小联盟", 然后再与局中人3一起合作. 当且仅有三人都参与时, 合作博弈的收益值为1, 其他任何联盟形式的收益值均为0. 如果按照Owen 值的分配方法, 则大联盟收益1先在联盟$\{1,2\}$与$\{3\}$ 之间平等分配, 然后联盟$\{1,2\}$所得收益值再在局中人1和局中人2 之间平等分配, 此时局中人1、局中人2、局中人3 分别获得1/4, 1/4, 1/2. 按照此二步法分配所得的结果未考虑联盟$\{1,2\}$与$\{3\}$中局中人的数量, 导致联盟$\{1,2\}$ 由于人数多而获得收益较少, 因此容易导致局中人1 或2 离开联盟$\{1,2\}$而单独参加合作. 如果局中人1以个体形式参与合作, 那么局中人1、局中人2、局中人3 将分别获得1/3 的收益值, 可见联盟$\{1,2\}$的解散使得另外一个联盟$\{3\}$ 的收益值减少了. 由此可见, 其实在小联盟规模有一定差别时可以适当考虑局中人所在联盟的议价能力对其分配的影响, 使小联盟满意度达到一个总体均衡状态[3], 避免由于小联盟的规模悬殊引发的收入不平等问题. 实际上, 联盟结构合作博弈中, 局中人收益分配一般受制于其所在优先联盟的议价能力, 因此合理有效的分配优先联盟之间的权重是十分重要的. 因此, 现有研究仍缺少一种能够直接体现局中人加入大联盟前后收益差异的"解", 以此较为直观地优先联盟的动态分配权重对局中人的最终分配影响. 基于此, 拟引入优先联盟的动态分配权重, 与文献[15]与[16]不同, 本文将优先联盟的权重视为一个变量, 而非固定将联盟的规模大小作为优先联盟的权重. 另外, 与上述Owen 型值不同, 本文将优先联盟的权重引入到ESD解, 构建了加权ESD 解, 利用此加权ESD解与"二步法", 构造了Owen型值的广义形式. 基于此, 构建一种能够直接体现局中人加入大联盟前后收益差异的"解", 从而分析此动态分配权重对优先联盟中局中人收益分配的影响.

在联盟结构合作博弈中, 为了探讨优先联盟议价能力对其局中人收益分配的影响, 避免由于小联盟的规模悬殊引发的收入不平等问题，拟构建一种能够直接体现局中人加入大联盟前后收益差异的"解". 基于Owen值的二步法, 提出一些新的Owen型值: 首先构建加权ESD解, 然后将加权ESD解扩展到联盟结构合作博弈中, 从而将联盟规模作为联盟议价能力引入到第一步的收益分配中, 提出了联盟结构合作博弈的新Owen型值, 再将联盟议价能力表示为一种动态权重, 构建了上述Owen型值的广义形式, 以此直观对比局中人加入大联盟前后的收益分配变化, 进而得到不同扩展解对联盟结构稳定性的影响. 研究分析表明: 优先联盟的议价能力与分配方案均会影响局中人参与联盟结构合作的意愿, 因此可以在一定的议价能力下甄选不同的分配方式, 并以此控制局中人参与合作的形式.

2 合作博弈及联盟结构

合作博弈一般由二元组(N,v)组成, 其中$N=\{1,2,\dots,n\}$ 是局中人集合, 特征函数v是定义在N所有子集上的实函数. N的任意子集称为联盟, 联盟S上的幂集表示为2^S. 合作博弈(N,v) 是超可加的当且仅当其满足$v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T), \forall S,T\in 2^N, S\cap T=\emptyset$. N 上所有超可加的合作博弈组成的集合表示为$G\left(N\right)$.

为了下文表述方便, 联盟的S的势记作s, 将$S\cup\{i\}$简记为$S\cup i$, $S\setminus\{i\}$ 简记为$S\backslash i$, 合作博弈(N,v) 简称为v.

对于任意$v\in G(N)$, 与任意联盟$S\in 2^N$, 对于任意局中人$i\notin S$, $v(S\cup i)-v(S)$是局中人i对联盟S 的**边际贡献**. 若局中人i 对于任意联盟的边际贡献均为零, 则称局中人i是v的**零元**. 特别地, 合作博弈v被称为**空博弈**当且仅当对于任意$S\in 2^N$, 均有$v\left(S\right)=0$. Shapley值是合作博弈解中重要的"解", 其根据局中人对联盟的平均边际贡献进行分配收益.

对于任意$v\in G(N)$, 其Shapley值Sh(N, v)具有如下形式

$$\mathrm{Sh}_i(N,v)=\sum_{S\in 2^N,i\notin S}s!(n-s-1)!/n!\left[v(S\cup i)-v(S)\right],\ \forall i\in N.$$

若令$\Delta_T(v)=\sum\limits_{S\subseteq T}(-1)^{t-s}v(S), \forall T\subseteq N$, 则Shapley值可以等价表示为

$$\mathrm{Sh}_i(N,v)=\sum_{T\in 2^N:i\in T}\Delta_T(v)/t,\ \ \forall i\in N.$$

不同于Shapley值, 加权Shapley值赋予每个局中人一个动态权重$w=(w_i)_{i\in N}$: 对于任意的权重$w=(w_i)_{i\in N}, w_i\in(0,\ 1], \forall i\in N$, 加权Shapley 值$\mathrm{Sh}^w(N,v)$ 具有如下形式

$$\mathrm{Sh}_i^w(N,v)=\sum_{T\in 2^N:i\in T}w_i\Delta_T(v)\Bigg/\sum_{j\in T}w_j,\ \ \forall i\in N. \tag{1}$$

可见, Shapley值是一种特殊的加权Shapley值: 对于$\forall i,j\in N$, 有$w_i=w_j$, 即

$$\mathrm{Sh}_i^w(N,v)=\mathrm{Sh}_i(N,v)=\sum_{T\in 2^N:i\in T}\Delta_T(v)/t,\ \ \forall i\in N.$$

除了Shapley值和加权Shapley值, 合作博弈还有许多其他"解", 例如: α -软化值[22]. 与本文相关的还有平等盈余分配(ESD解)[23], 其先将每个局中人单干收益分配给他(或她)自己, 再将合作的净盈余平等分配给每位局中人: 对于任意$(N,v)\in G(N)$, ESD 解为

$$\mathrm{ESD}_i(N,v)=v(i)+\left(v(N)-\sum_{j\in N}v(j)\right)\Bigg/n,\ \forall i\in N. \tag{2}$$

一般运用有效性(E)、线性(L)、对称性(S)与零元公理(NP)等公理刻画$G(N)$上的解. 另外, 对于任意$(N,v)\in G(N)$, 下面三个公理可以用来刻画$G(N)$上的解, 令$\phi(N,v)$表示(N,v)上的解.

空博弈(NG). 对于空博弈$(N,v)\in G(N)$, 有$\phi_i(N,v)=0,\ \forall i\in N$.

无效等损性质(NEL)[24]**.** 若$n\geqslant 3$, 对于任意$h\in N$ 和$i,j\in N\backslash h$, 有

$$\phi_i(N,v)-\phi_i(N,v_0^h)=\phi_j(N,v)-\phi_j(N,v_0^h),$$

其中 $v_0^h(S)=v(S\backslash h), \forall S\subseteq N$.

Id+su单调性(ISM)[25]**.** 对于任意博弈$(N,v),(N,v')\in G(N)$ 与$i\in N$, 若$v(i)\geqslant v'(i)$且$v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(j)\geqslant v'(N)-\sum\limits_{i\in N}v'(j)$, 则$\phi_i(N,v)\geqslant\phi_i(N,v')$.

NG表示联盟无收益, 局中人也将无收益. NEL将合作博弈v与存在无效局中人h 的合作博弈v_0^h联系起来, 其表示局中人h的离开对其他局中人的收益影响是相同的. ISM是表示合作博弈单调性的公理.

联盟结构$C=\{C_1,C_2,\ldots,C_m\}$是N的一个划分, 即$\bigcup_{i=1}^m C_i=N$且对于$i\neq j$ 有$C_i\cap C_j=\emptyset$. 定义$M^C=\{1,2,\ldots,m\}$是联盟结构C下角标组成的集合. 对于任意$p\in M^C$, 每一个非空联盟$C_p\in C$ 称作C上的优先联盟, 将N 上所有的联盟结构构成的集合记为C^N. 对于任意$p\in M^C$, $R\subseteq M^C\backslash p$ 和$S\subseteq C_p$,

令$Q_R = \cup_{k\in R} C_k$, $Q_R^{p,S} = Q_R \cup S$, 则$Q_R^{p,S}$ 是C上的**可行联盟**. C上所有可行联盟构成的集合记为$P(C)$, 即

$$P(C) \triangleq \left\{ Q_R^{p,S} \mid \forall S \subseteq C_p,\ \ \forall p \in M^C,\ \ \forall R \subseteq M^C \backslash p \right\}.$$

令$\Theta(N) = C^N \times G(N)$. $\Theta(N)$中联盟结构合作博弈一般表示为三元组(N, v, C), 其中N是局中人集合, v是特征函数, $C \in C^N$. $(N, v, C) \in \Theta(N)$ 称作**空博弈**当且仅当对于任意$S \in P(C)$, 均有$v\,(S) = 0$. 联盟结构合作博弈(N, v, C) 满足内部超可加性, 当且仅当

$$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T), \forall S, T \subseteq C_p,\ S \cap T = \emptyset,\ \forall p \in M^C.$$

联盟结构合作博弈(N, v, C)满足外部超可加性, 当且仅当

$$v(Q_R \cup Q_T) \geqslant v(Q_R) + v(Q_T),\ \forall R, T \subseteq M^C,\ R \cap T = \emptyset.$$

当上面两个不等式取等时, 分别称为内部可加性和外部可加性. 如果联盟结构合作博弈满足内部和外部超可加性, 那么它满足完全超加性. 显然, $(N, v, C) \in \Theta(N)$ 是完全超可加的, 因为$\Theta(N) = C^N \times G(N)$, $G(N)$ 是N 上所有超可加合作博弈的集合.

称映射$\Theta(N) \to \mathbb{R}^n$是联盟结构合作博弈上的"解", 简称**CS 解**. 有效性(E)、线性(L)、联盟内对称性(SWC)、联盟间对称性(SAC) 是刻画CS 解常见的公理, 其中, 联盟结构合作博弈中的E、L和NP 分别是合作博弈中E、L 和NP的扩展, 而SWC和SAC对应合作博弈中的对称性S. 对于任意博弈$(N, v, C) \in \Theta(N)$ 及其CS 解$\varphi(N, v, C)$, SWC 和SAC 如下:

联盟内对称性(SWC). 对于任意局中人$i, j \in C_p \in C$ $(\forall p \in M^C)$和$S \subseteq N \backslash \{i, j\}$, 若$v(S \cup i) = v(S \cup j)$, 则$\varphi_i(N, v, C) = \varphi_j(N, v, C)$.

联盟间对称性(SAC). 对于任意$C_s, C_t \in C$和$R \subseteq M^C \backslash \{s, t\}$, 如果$v(Q_R \cup C_s) = v(Q_R \cup C_t)$, 则$\sum\limits_{i\in C_s} \varphi_i(N, v, C) = \sum\limits_{i\in C_t} \varphi_i(N, v, C)$.

Owen[1]提出了$\Theta(N)$上满足E、SWC、SAC、NP和L的唯一CS 解, 称作Owen 值$\mathrm{Ow}(N, v, C)$, 且

$$\mathrm{Ow}_i(N, v, C) = \sum_{R\subseteq M^C\backslash p} \sum_{S\subseteq C_p\backslash i} \frac{r!(m-r-1)!}{m!} \frac{s!(c_p-s-1)!}{c_p!} \left[v(Q_R^{p,S\cup i}) - v(Q_R^{p,S}) \right],\ \forall i \in C_p,\ \forall p \in M^C, \tag{3}$$

其中 r、m、s和c_p分别是R、M^C、S 和C_p 的势.

对于任意$(N, v, C) \in \Theta(N)$, 给定任意联盟$S \subseteq C_p, p \in M^C, R \subseteq M^C \backslash p$, 与$T \subseteq N$, 定义$T$ 零元- 联盟结构合作博弈(N, v_0^T, C)如下

$$v_0^T \left(Q_R^{p,S} \right) = \begin{cases} v\left(Q_R^{p,S\backslash T} \right), & T \subseteq S \\ v\,(S)\,, & \text{其他}, \end{cases}$$

显然, $v_0^S \left(Q_R^{p,S} \right) = v\,(Q_R)$.

给定任意联盟结构C和$p \in M^C$, 若C上的m维向量$\boldsymbol{w}$ 满足以下条件

$$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ..., w_m)\,, w_p \in (0,\ 1], \forall p \in M^C,\ \sum_{p\in M^C} w_p = 1. \tag{4}$$

称$\boldsymbol{w}$为C上的权重, 并将满足式(4)的所有向量$\boldsymbol{w}$组成的集合记作W_n^m.

3 联盟结构合作博弈的拓展ESD解

在联盟结构合作博弈中, 在大联盟形成之前, 局中人往往先构建了一个"小联盟"(即优先联盟), 然后以优先联盟加入到大联盟合作中, 由此构建一种能够体现合作形式变化对局中人影响的CS 解是必要的. 另外,

由于优先联盟的议价能力的不同, 在Owen 型值的第一步中应该适当体现优先联盟的影响. 基于此, 本文首先构建加权ESD解, 作为ESD解在联盟结构合作博弈中的扩展, 然后将优先联盟的议价能力(或讨价还价能力)作为其动态权重引入到收益分配中, 以此将优先联盟议价能力直观体现在局中人的收益分配上, 进而提出一系列新的CS 解. 下面拟基于Owen值的二步法与"平均盈余分配"(即ESD解)构建一些新的分配方法. 与以往的联盟结构合作博弈"解"不同, 我们构建的新" 解"的第一步采用的是ESD 解及其扩展形式, 以此直观的体现优先联盟的议价能力对局中人分配的影响.

3.1　加权ESD解和其CS解拓展

对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$和非空联盟$S\subseteq C_p$, 令$C(S)=\{C_1,C_2,...,C_{p-1},S,C_{p+1},...,C_m\}$, 可见$C(S)$也是一个联盟结构, 其是在联盟结构$C$中将$C_p$替换为$S$. 对于任意$R\subseteq M^C$ 和 $S\subseteq C_p$, 定义S上博弈$(M^C,\bar{v}_S)$如下:

$$\bar{v}_S(R)=\begin{cases}v(Q_R), & p\notin R\\ v(Q_R^{p,S}), & p\in R.\end{cases}$$

易知, $\bar{v}_{C_p}(R)=v(Q_R),\forall p\in M^C$. 因此, 记$(M^C,v)=\left(M^C,\bar{v}_{C_p}\right),\forall p\in M^C$. S-上博弈是将$C(S)$中的优先联盟视作"局中人"而构成的合作博弈. 对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$, $S\subseteq C_p$与$p\in M^C$, 若令函数f^1和f^2分别是合作博弈$(M^C,\bar{v}_S)$与(C_p,ω_p) 上的"解", 其中$\omega_p(S)$=$f_p^1(M^C,\bar{v}_S)$, 则Owen型值[4]$\varphi(N,v,C)$是指满足如下"二步法"的CS解.

步骤1　在优先联盟之间按照$f^1(M^C,\bar{v}_S)$切割大联盟的收益. 对于任意$p\in M^C$, 优先联盟C_p获得分配$\omega_p(C_p)$, 其中$\omega_p(C_p)=f_p^1(M^C,\bar{v}_{C_p})$.

步骤2　对于任意$p\in M^C$, 优先联盟C_p的收益$\omega_p(C_p)$在其内部根据函数$f^2(C_p,\omega_p)$ 进行二次分配, 即任意局中人$i\in C_p$的最终分配解为$\varphi_i(N,v,C)$, 其中$\varphi_i(N,v,C)=f_i^2(C_p,\omega_p)$.

现有主要Owen型值对应的函数f^1和f^2如表1所示. 其中, 对任意$v\in G(N)$, $\mathrm{ED}_i(N,v)=v(N)/n$, $\mathrm{SO}_i(N,v)$=$\sum\limits_{S\subseteq N\setminus i}s!\,(n-s-1)!/n!\left(\sum\limits_{j\in S\cup i}\left(v\left(S\cup i\right)-v\left(\left(S\cup i\right)\setminus j\right)\right)\right)\Big/(s+1),\forall i\in N.$

表1 主要的Owen型值及其对应的合作博弈" 解"

Table 1 Main Owen-type values and it associated values of cooperative game

函数	Owen 值	SS值(Calvo等[17]）	WSE值(Hu[18])	CO 值(Kamijo[15])
f^1	Shapley值	Shapley 值	加权Shapley 值	加权Shapley 值
f^2	Shapley值	Solidarity值(Nowak等[16])	ED值	优先联盟的净盈余在其局中人之间平等分配

对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$, S-上博弈$(M^C,\bar{v}_S)$的ESD解可以表示为

$$\mathrm{ESD}_p(M^C,\bar{v}_S)=v(S)+\frac{1}{m}\left[\bar{v}_S(M^C)-\sum_{k\in M^C\setminus p}\bar{v}_S(k)-v(S)\right],\ \forall S\subseteq C_p,\ \forall p\in M^C. \tag{5}$$

上式中联盟S的收益分为两部分: 一部分由他(或她)自己的单干收益$v(S)$组成, 而剩余则由S-上博弈$(M^C,\bar{v}_S)$中可行联盟净盈余的平均值组成, 即$\left[\bar{v}_S(M^C)-\sum\limits_{k\in M^C\setminus p}\bar{v}_S(k)-v(S)\right]\Big/m$. 因此, 每个优先联盟的分配收益差异主要体现在其自身的单干的收益, 参见下面的例子.

例1　令$N=\{1,2,3\}$, $C=\{C_1,C_2\}$, $C_1=\{1,2\}$和$C_2=\{3\}$. 假设联盟结构合作博弈$(N,v,C)\in\Theta(N)$ 的特征函数为: $v(N)=3$, $v(1,2)=v(3)=1$, $v(1)=v(1,3)=v(2,3)=v(3)=0$. 根据ESD 解, 可得

$$\mathrm{ESD}_1(M^C,v)=v(C_1)+[v(N)-v(C_1)-v(C_2)]/2=1.5,$$

$$\mathrm{ESD}_2(M^C,v)=v(C_2)+[v(N)-v(C_1)-v(C_2)]/2=1.5.$$

联盟$\{1,2\}$和$\{3\}$规模分别是2和1, 但是其收益分配均为1.5, 因此优先联盟的规模对其分配未产生影响.

为了在收益分配时体现优先联盟规模差异, 下面尝试扩展ESD解, 即加权ESD解

$$\mathrm{ESD}_p^w(M^C,\bar{v}_S)=v(S)+c_p/n\left[\bar{v}_S(M^C)-\sum_{k\in M^C\setminus p}\bar{v}_S(k)-v(S)\right],\ \forall p\in M^C. \tag{6}$$

与ESD解(即式(5))不同, 加权ESD解中优先联盟C_p的分配权重是其局中人的数量c_p, 而非平等解$1/m$. 对于任意$p\in M^C$, 如果$c_p=1/m$, 那么$\mathrm{ESD}^w(M^C,\bar{v}_S)=\mathrm{ESD}$, 因此加权ESD 解是ESD解的扩展. 对于任意$C\in C^N$, $p\in M^C$和$S\subseteq C_p$, 令$v_{C_p}^w(S)=\mathrm{ESD}_p^w(M^C,\bar{v}_S)$, 则根据ESD解和加权ESD解, 可以定义如下两个CS解.

定义 1 对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$, $p\in M^C$和$i\in C_p$, 加权平等盈余分配($\mathrm{EE}^w(N,v,C)$) 和平等盈余分配($\mathrm{EE}(N,v,C)$) 分别为

$$\mathrm{EE}_i^w(N,v,C)=\mathrm{ESD}_i(C_p,v_{C_p}^w),\ \ \mathrm{EE}_i(N,v,C)=\mathrm{ESD}_i(C_p,v_{C_p}).$$

上述两个解均由二步法定义, 包含在Owen型值中, 他们的具体计算公式见下面的引理.

引理 1 对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$, $p\in M^C$和$i\in C_p$, 加权平等盈余分配($\mathrm{EE}^w(N,v,C)$)和平等盈余分配($\mathrm{EE}(N,v,C)$)等价于

$$\mathrm{EE}_i^w(N,v,C)=(1-c_p/n)\,\mathrm{ESD}_i(C_p,v)+c_p/n\left(\left(v(N)-\sum_{k\in M^C\setminus p}v(C_k)\right)\Big/c_p\right), \tag{7}$$

$$\mathrm{EE}_i(N,v,C)=(1-1/m)\,\mathrm{ESD}_i(C_p,v)+1/m\left(v(N)-\sum_{k\in M^C\setminus p}v(C_k)\Big/c_p\right). \tag{8}$$

所有引理和定理的证明见附录.

在“二步法”的第一步时, EE^w解并非按照平等盈余进行收益分配, 而是将优先联盟规模作为其权重, 进行有侧重点的收益分配. 将上述思路进一步扩展, 下面提出更加广义的EE^{gw} 解, 可以基于任意动态权重$w\in W_n^m$对大联盟合作收益进行分配

$$\mathrm{EE}_i^{gw}(N,v,C)=w_p\mathrm{ESD}_i(C_p,v)+(1-w_p)\left(v(N)-\sum_{k\in M^C\setminus p}v(C_k)\right)\Big/c_p,\ \forall i\in C_p,\ \forall p\in M^C. \tag{9}$$

EE^w、EE与EE^{gw}均是基于加权ESD 解构建的, 不同之处在于: EE^w中优先联盟C_p的分配权重是其局中人的数量c_p, EE 中优先联盟C_p 的分配权重是$1/m$, EE^{gw} 是引入了动态权重的概念, 赋予优先联盟C_p权重变量w_p. 因此EE^{gw}是EE^w与EE的广义形式.

若w_p= 1, $\forall p\in M^C$, 则$\mathrm{EE}^{gw}(N,v,C)$=$\mathrm{ESD}(C_p,v)$; 若w_p= $1-1/m$, 则$\mathrm{EE}^{gw}(N,v,C)$=$\mathrm{EE}(C,v)$; 当w_p=$1-c_p/n$时, $\mathrm{EE}^{gw}(N,v,C)$=$\mathrm{EE}^w(N,v,C)$. 因此$\mathrm{EE}^{gw}(N,v,C)$是$\mathrm{EE}^w(N,v,C)$和$\mathrm{EE}(N,v,C)$的广义形式, $\mathrm{EE}^{gw}(N,v,C)$可视作(N,v,C)的广义加权平等盈余分配. 下面尝试刻画广义加权平等盈余分配.

对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$, 考虑联盟结构合作博弈的特点及优先联盟的权重, 提出以下公理刻画CS解$\varphi(N,v,C)$.

联盟Id+sur单调性(CISM). 对于任意$(N,v,C),(N,v',C')\in\Theta(N)$, 且$C\cap C'\neq\emptyset$. 对于任意$C_p\in C\cap C'$, 如果满足$v(N)\geqslant v'(N)$, $v(N)-\sum\limits_{k\in M^C}v(C_k)\geqslant v'(N)-\sum\limits_{k\in M^{C'}}v'({C_k}')$和$v(C_p)-\sum\limits_{j\in C_p}v(j)\geqslant v'(C_p)-\sum\limits_{j\in C_p}v'(j)$, 则

$$\varphi_i(N,v,C)\geqslant\varphi_i(N,v',C'),\ \ \forall i\in C_p.$$

优先联盟无效等损(NEL-SWC). 对于任意$p, p' \in M^C$ 且$n \geqslant 3$,

$$\varphi_i(N,v,C) - \varphi_i(N,v_0^k,C) = \varphi_j(N,v,C) - \varphi_j(N,v_0^k,C),\ \ \forall\, i,j \in C_p,\ \forall k \in N\backslash\{i,j\}.$$

优先联盟之间的无效等损(NEL-SAC). 对于任意$p, p' \in M^C$, $n \geqslant 3$与$m \geqslant 3$, 那么对于任意$h \in M^C\backslash\{p \cup p'\}$,

$$\sum_{i\in C_p}\left(\varphi_i(N,v,C) - \varphi_i(N,v_0^{C_h},C)\right) = \sum_{k\in C_{p'}}\left(\varphi_k(N,v,C) - \varphi_k(N,v_0^{C_h},C)\right).$$

优先联盟之间的加权无效等损(WNEL-SAC). 对于任意$p, p' \in M^C$, $n \geqslant 3$, $m \geqslant 3$与$w \in W_n^m$, 对于任意$h \in M^C\backslash\{p \cup p'\}$, 可有:

$$w_{p'}\sum_{i\in C_p}\left(\varphi_i(N,v,C) - \varphi_i(N,v_0^{C_h},C)\right) = w_p\sum_{k\in C_{p'}}\left(\varphi_k(N,v,C) - \varphi_k(N,v_0^{C_h},C)\right).$$

联盟空博弈(CNG). 对于任意空博弈$(N,v,C) \in \Theta(N)$, 可有$\varphi_i(N,v,C)$=0.

联盟结构合作博弈的上述公理是合作博弈中相应公理的扩展:

1) CISM是ISM的扩展, 如果企业(即优先联盟)对大联盟的边际贡献和局中人对于其所在优先联盟的边际贡献增加, 那么大联盟增加的收益会使每个局中人获益.

2) NEL-SWC和NEL-SAC是NEL的扩展, NEL-SWC表示如果局中人k 离开大联盟N, 那么其对同一优先联盟C_p中其他局中人的收益影响均相同; NEL-SAC表示如果一个优先联盟的离开对于不包含其的优先联盟收益影响均相同.

3) WNEL-SAC也是NEL-SAC的扩展, 但是WNEL-SAC与NEL-SAC不同, 其表示一个优先联盟的离开对于其他优先联盟中影响与其动态权重紧密相关, 而非均等变化.

4) 联盟结构合作博弈中CNG是合作博弈中NG的推广, 表示空博弈中的局中人收益均为零.

为了公理化加权平等盈余分配(EE^w (N,v,C)) 和平等盈余分配(EE (N,v,C)), 先给出如下两个引理.

引理 2　对于任意$(N,v,C) \in \Theta(N)$, $n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$, 且$\varphi(N,v,C)$是(N,v,C)上的CS解. 对于任意$k \in M^C$, 如果$\varphi(N,v,C)$ 满足CISM, 则$\varphi_i(N,v_0^{C_k},C) = \varphi_i(N,v,C\backslash C_k), \forall i \in N\backslash C_k$.

若$\varphi(N,v,C)$满足CISM, 则任意局中人$i(i \in N\backslash C_k)$的收益未受到C_k 的离开而变化. 也就是说, 优先联盟C_k的离开, 对于其外的局中人未产生影响.

引理 3　对于任意$(N,v,C) \in \Theta(N), n \geqslant 3, \varphi(N,v,C)$是$(N,v,C)$上的CS解.

1) (N,v,C)是一个外部可加的联盟结构合作博弈, 若$\varphi(N,v,C)$满足上述E、CISM、WNEL-SAC和CNG, 则可得$\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N,v,C) = v(C_p), \forall p \in M^C$.

2) (N,v,C)是一个完全可加的联盟结构合作博弈, 如果$\varphi(N,v,C)$ 满足E、CISM、NEL-SWC、NEL-SAC和CNG, 那么$\varphi_i(N,v,C) = v(i), \forall i \in N$.

引理2说明: 若(N,v,C)外部可加, 且$\varphi(N,v,C)$满足CISM、WNEL-SAC和CNG, 则其收益之和等于其所在优先联盟的收益. 进一步, 若(N,v,C)完全可加, 则局中人收益等于其单干收益.

定理 1　对于任意$(N,v,C) \in \Theta(N), n \geqslant 3$, 存在$p \in M^C$, 使得$c_p \geqslant 3$. 如果$(N,v,C)$上CS解$\varphi(N,v,C)$满足E、CISM和CNG, 则

1) $\varphi(N,v,C)$满足NEL-SAC当且仅当$\varphi(N,v,C)$=EE(N,v,C).

2) $\varphi(N,v,C)$满足WNEL-SAC当且仅当$\varphi(N,v,C)$=EE$^{gw}(N,v,C)$.

若$\varphi(N,v,C)$满足NEL-SAC、CISM、CNG和E, 则其就是EE$^w(N,v,C)$. 同理, 若$\varphi(N,v,C)$满足WNEL-SAC、CISM、CNG 和E, 则其为EE$^{gw}(N,v,C)$. 因此, EE$^w(N,v,C)$和EE(N,v,C) 满足E、CISM 和CNG, 而EE$^w(N,v,C)$和EE(N,v,C)分别满足WNEL-SAC和NEL-SAC.

3.2 联盟结构合作博弈的Shapley值和加权平等盈余分配

在联盟结构合作博弈的“大联盟”形成之前, 单个优先联盟往往需要在两种合作策略之间做出选择: 继续维持原有合作或者作为整体加入大联盟中. 由此可见, 优先联盟中每个局中人个体收益分配的增加与否对于大联盟的组建有一定的决定作用. 因此, 有必要构建一种能够体现局中人在优先联盟中的平等贡献(即Shapley值)的CS解.

按照表1中Owen型值的两步法, 有必要构建一种新的联盟结构合作博弈“解”, 从而将优先联盟之间的盈余分配(即函数f^1为ESD解) 与局中人平等边际贡献(即函数f^2为Shapley值)融合起来. 基于此, 本文运用Shapley 值和ESD^{w}解分别作为函数f^1 和f^2, 以此定义一个加权平等盈余分配ES^{gw}.

对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N), p\in M^C$与$w\in W_n^m$, 令

$$v_{C_p}^{gw}(S)=v(S)+w_p\left(v(N)-\sum_{r\in M^C\setminus p}v(C_r)-v(S)\right),\ \forall S\subseteq C_p. \tag{10}$$

$(C_p,v_{C_p}^{gw})$是定义在C_p上的合作博弈, 将局中人在$(C_p,v_{C_p}^{gw})$ 的Shapley值称为其在联盟结构合作博弈(N,v,C)上的加权平等盈余分配ES$^{gw}(N,v,C)$, 即有

$$\mathrm{ES}_i^{gw}(N,v,C)=\mathrm{Sh}_i(C_p,v_{C_p}^{gw}),\quad \forall i\in C_p. \tag{11}$$

下面给出加权平等盈余分配ES^{gw}的具体计算公式.

引理 4 对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N), p\in M^C$和$i\in C_p$,

$$\mathrm{ES}_i^{gw}(N,v,C)=(1-w_p)\,\mathrm{Sh}_i(C_p,v)+w_p\left(\left(v(N)-\sum_{r\in M^C\setminus p}v(C_r)\right)\Big/ c_p\right). \tag{12}$$

引理4说明: 对于任意$i\in C_p, p\in M^c$, ES^{gw}可以看成是Shapley 值$\mathrm{Sh}_i(C_p,v)$与$\left(v(N)-\sum\limits_{r\in M_c}v(C_r)\right)\Big/c_p$的加权平均值. 加权平等盈余分配ES^{gw}满足一定的性质, 参见下面的引理.

引理 5 若$(N,v,C)\in\Theta(N)$上的联盟结构合作博弈解满足E、CNG和WNEL-SAC, 则

1) $\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N,v,C)-v(C_p)=w_p\Big/\sum\limits_{r\in M^C}w_r\left(v(N)-\sum\limits_{r\in M^C}v(C_r)\right),\ \forall p\in M^C.$

2) $\sum\limits_{i\in S}\varphi_i(N,v,C(S))-v(S)=w_p\Big/\sum\limits_{r\in M^C}w_r\left(v(N)-\sum\limits_{r\in M^C\setminus p}v(C_r)-v(S)\right),\ \forall S\subseteq C_p, \forall p\in M^C.$

引理5说明: 若$\varphi(N,v,C)$满足E、CNG和WNEL-SAC, 则其在S中的收益和$\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N,v,C)$减去$v(S)$是其总盈余$v(N)-\sum\limits_{r\in M^c\setminus p}v(C_r)-v(S)$ 的$w_p\Big/\sum\limits_{r\in M^c}w_r$. 下面刻画加权平等盈余分配ES^{gw}.

定理 2 对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$, $\Theta(N)$上的CS解φ 满足E、SWC、L、NP、CNG和WNEL-SAC, 当且仅当$\varphi(N,v,C)$=ES$^{gw}(N,v,C)$.

定理2说明: ES$^{gw}(N,v,C)$是唯一满足E、SWC、L、NP、CNG和WNEL-SAC 的值. EE^{gw}与ES^{gw}是两个不同的CS解, 由定理1和2可知, EE^{gw} 与ES^{gw}均满足E、CNG与WNEL-SAC, 但是他们也有不同的性质, 例如ES^{gw} 不满足CISM, EE^{gw} 不满足SWC与NP.

3.3 定理1和定理2中公理的独立性

对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$时, 令$\varphi(N,v,C)$ 为联盟结构合作博弈的CS解, 可以论证定理1中的公理是相互独立的, 以E、CISM、CNG、WNEL-SAC和NEL-SWC 为例.

1) 定义$\varphi(N,v,C)$为$\varphi_i(N,v,C)=v(N)/n{+}1, \forall i\in N$, 则$\varphi(N,v,C)$ 满足CISM、WNEL-SAC、NEL-SWC和CNG, 但不满足E.

2) 定义$\varphi(N,v,C)$为$\varphi_i(N,v,C)=\mathrm{Sh}_i(C_p,v)+\left(v(N)-\sum\limits_{p\in M^C}v(C_p)\right)\Big/n,\forall i\in N$, 则$\varphi(N,v,C)$ 满足E、CISM、CNG与WNEL-SAC, 但不满足NEL-SWC.

3) 若$\varphi(N,v,C)$定义为:$\varphi_i(N,v,C)=v(i)+\left(v(N)-\sum\limits_{j\in N}v(j)\right)\Big/n,\forall i\in N$, 则$\varphi(N,v,C)$满足E、CISM、CNG与NEL-SWC, 但不满足WNEL-SAC.

4) 若$\varphi(N,v,C)$为: $\varphi_i(N,v,C)=v(N)/n+a_i$, $\forall i\in N$, 其中$\sum\limits_{i\in N}a_i=-v(N)$, $a_i\neq 0$, $\forall i\in N$, 则$\varphi(N,v,C)$满足E, CISM、WNEL-SAC和NEL-SWC, 但不满足CNG.

5) 若$\varphi(N,v,C)$具有形式: $\varphi_i(N,v,C)=(1/n-w_p)\Big/\left(1-\sum\limits_{p\in M^C}w_p\right)v(N)$, $\forall i\in C_p,\forall p\in M^C$, 则$\varphi(N,v,C)$满足E、CNG、WNEL-SAC和NEL-SWC, 但不满足CISM.

定理2中的公理(E、SWC、L、NP、CNG和WNEL-SAC)是相互独立的. 对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N)$时, 令$\varphi(N,v,C)$是一个定义在(N,v,C) 上的CS 解.

1) 若$\varphi_i(N,v,C)=v(i),\forall i\in N$, 则$\varphi(N,v,C)$ 满足SWC、L、NP、CNG和WNEL-SAC, 但不满足E.

2) 对于任意 $i\in C_p$与$p\in M^C$, 设S是零元局中人的集合, 若

$$\varphi_i(N,v,C)=\begin{cases}w_i\Big/\sum\limits_{i\in S}w_iv(N), & i\notin S\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则$\varphi(N,v,C)$满足E、L、NP、CNG和WNEL-SAC, 但是不满足SWC.

3) 对于任意 $i\in C_p$与$p\in M^C$, 设S是零元局中人的集合, 若

$$\varphi_i(N,v,C)=\begin{cases}(v(i)+1)\Big/\left(\sum\limits_{i\in N\backslash S}v(i)+n-s\right)v(N), & i\notin S\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则$\varphi(N,v,C)$满足E、SWC、NP、CNG和WNEL-SAC, 但不满足L.

4)对于任意$i\in C_p$与$p\in M^C$, 若

$$\varphi_i(N,v,C)=v(N)/n,\forall i\in N,$$

那么$\varphi(N,v,C)$满足E、SWC、L、CNG和WNEL-SAC, 但是不满足NP.

5)对于任意 $i\in C_p$与$p\in M^C$, 设S是零元局中人的集合, 若

$$\varphi_i(N,v,C)=\begin{cases}v(N)/n+a_i, & i\notin S\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$\sum\limits_{i\in N}a_i=-v(N),a_i\neq 0,\forall i\in N$, 则$\varphi(N,v,C)$满足E、SWC、L、NP和WNEL-SAC, 除了CNG.

6)若$\varphi_i(N,v,C)=v(i)+\left(v(N)-\sum\limits_{j\in N}v(j)\right)\Big/n,\forall i\in N$, 则$\varphi(N,v,C)$满足E、SWC、L、NP和CNG, 但是不满足WNEL-SAC.

由此可知, 公理E、SWC、L、NP、CNG和WNEL-SAC是相互独立的公理, 用来刻画CS解时不可缺少.

4 引入联盟结构议价能力的收益分配策略

令$N=\{1,2,3,4,5\}$为“一带一路”背景下代表跨国合作的五家企业. 其中企业1、企业2与企业3来自中国. 一带一路的战略背景下, 三家中国企业计划在沿线某一区域抱团投资基础设施项目. 企业4与企业5是

被投资国的两家企业, 企业4 和企业5是战略合作伙伴, 是两家上下游供应商. 如果五家企业共同投资一个基础设施建设项目, 根据三家企业的历史合作偏好, 拟构建联盟结构$C=\{C_1,C_2\}$进行层次合作, 其中$C_1=\{1,2,3\}$, $C_2=\{4,5\}$. 三家中国企业都是中小企业, 根据之前的合作收益数据, 联盟越大, 联盟收益增值空间越大. 对于任意$S\subseteq\{1,2,3\}$, 联盟S的收益为

$$v(S)=\begin{cases}8, & s=2\\ 0, & s=1,\ S\subseteq\{2,3\}\\ 1, & S=\{1\}.\end{cases}$$

另外, $v(1,2,3)=19, v(N)=114, v(4,5)=50, v(4)=v(5)=14.$

上述跨国合作项目构成一个联盟结构合作博弈, 企业1、企业2、企业3抱团参与此大联盟国际合作的动机是获取更多的收益分配, 此时联盟结构合作博弈组建的关键是合理设置优先联盟的动态权重, 以此吸引企业1、企业2、企业3愿意作为优先联盟C_1的成员参与合作. 如果一个企业认为自己得到了不合理的分配, 那么他/她就会离开此合作去考虑其他项目. 为此, 为了刻画合作博弈与联盟结构合作博弈的局中人分配差值, 基于EE^{gw}与ES^{gw} 分别构建**分配差值向量**σ^{EE}与σ^{ES}. 对于任意$(N,v,C)\in\Theta(N), i\in C_p$ 和$p\in M^C$,

$$\sigma_i^{\mathrm{EE}}=\mathrm{EE}_i^{gw}(N,v,C)-\mathrm{ESD}_i(N,v),\sigma_i^{\mathrm{ES}}=\mathrm{ES}_i^{gw}(N,v,C)-\mathrm{ESD}_i(N,v).$$

首先, 令任意$w\in W_n^m$, EE^{gw}与ES^{gw}分别如下:

$$\mathrm{EE}^{gw}(N,v,C)=(7+43w_1/3,6+46w_1/3,6+46w_1/3,(95-45w_1)/2,(95-45w_1)/2),$$

$$\mathrm{ES}^{gw}(N,v,C)=((20+44w_1)/3,(37+91w_1)/6,(37+91w_1)/6,(95-45w_1)/2,(95-45w_1)/2).$$

因此, 计算可得σ^{EE}和σ^{ES}

$$\sigma_1^{\mathrm{EE}}=43w_1/3-11,\ \ \sigma_2^{\mathrm{EE}}=\sigma_3^{\mathrm{EE}}=46w_1/3-11,\ \ \sigma_4^{\mathrm{EE}}=\sigma_5^{\mathrm{EE}}=(33-45w_1)/2,$$

$$\sigma_1^{\mathrm{ES}}=(44w_1-34)/3,\ \sigma_2^{\mathrm{ES}}=\sigma_3^{\mathrm{ES}}=(91w_1-75)/6,\ \sigma_4^{\mathrm{ES}}=\sigma_5^{\mathrm{ES}}=(33-45w_1)/2.$$

由图1, 不能得出σ_i^{EE}和σ_i^{ES}的大小关系, $\forall i\in N$. 然而, σ_i^{EE}与$\sigma_i^{\mathrm{ES}}(i=1,2,3)$ 与优先联盟C_1 的动态权重w_1 均是成正相关的, 而σ_i^{EE}与$\sigma_i^{\mathrm{ES}}(i=4,5)$与$w_1$均成负相关. 另外, 动态权重(或议价能力)对不同分配方法影响是不同的

1) 当$w_1\geqslant 33/43$时, $\sigma_i^{\mathrm{EE}}\geqslant 0(i=1,2,3)$, 此时基于$\mathrm{EE}^{gw}$的分配方案使得企业1、企业2、企业3更倾向于以联盟结构的形式进行合作; 而当$w_1\geqslant 17/22$时, $\sigma_i^{\mathrm{ES}}\geqslant 0(i=1,2,3)$, 此时基于$\mathrm{ES}^{gw}$的分配方案使得企业1、企业2、企业3更倾向于以联盟结构的形式进行合作.

2) 当$w_1\leqslant 11/15$时, $\sigma_i^{\mathrm{EE}},\sigma_i^{\mathrm{ES}}\geqslant 0(i=4,5)$, 此时$\mathrm{EE}^{gw}$或$\mathrm{ES}^{gw}$分配方案均使得企业4、企业5 更倾向于以联盟结构的形式进行合作.

3) 当$11/15\leqslant w_1\leqslant 33/43$时, 基于$\mathrm{EE}^{gw}$的分配方案不能驱使任何企业愿意以联盟结构的形式合作.

4) 当$11/15\leqslant w_1\leqslant 17/22$时, 基于$\mathrm{ES}^{gw}$的分配方案不能驱使任何企业愿意以联盟结构的形式合作.

下面以企业1单干收益$v(1)$为例, 分析其对σ^{EE}和σ^{ES} 的影响, 令$v(1)=x$, 其他收益值不变. 当$0\leqslant x\leqslant 8$时, 对于任意$w_1\in(0,1]$, 可得

$$\mathrm{EE}_1^{gw}(N,v,C)=2x(1-w_1)/3+15w_1+19/3,$$

$$\mathrm{EE}_2^{gw}(N,v,C)=\mathrm{EE}_3^{gw}(N,v,C)=-x(1-w_1)/3+15w_1+19/3,$$

$$\mathrm{EE}_4^{gw}(N,v,C)=\mathrm{EE}_5^{gw}(N,v,C)=(95-45w_1)/2,$$

$$\mathrm{ES}_1^{gw}(N,v,C)=x(1-w_1)/3+15w_1+19/3,$$

$$\mathrm{ES}_2^{gw}(N,v,C)\ =\mathrm{ES}_3^{gw}(N,v,C)=-x\,(1-w_1)/6+15w_1+19/3,$$

$$\mathrm{ES}_4^{gw}(N,v,C)=\mathrm{ES}_5^{gw}(N,v,C)=(95-45w_1)/2.$$

进一步, 可得

$$\mathrm{ESD}(N,v,C)=((86+4x)/5,\ (86-x)/5,\ (86-x)/5,\ (156-x)/5,\ (156-x)/5)\,.$$

那么

$\sigma_1^{\mathrm{EE}}=-x\,(2/15+2w_1/3)+15w_1-137/15, \sigma_2^{\mathrm{EE}}=\sigma_3^{\mathrm{EE}}=x\,(5w_1-2)/15+15w_1-137/15,$
$\sigma_4^{\mathrm{EE}}=\sigma_5^{\mathrm{EE}}=x/5-45w_1/2+163/10.$
$\sigma_1^{\mathrm{ES}}=-x\,(w_1/3+7/15)+15w_1-137/15, \sigma_2^{\mathrm{ES}}=\sigma_3^{\mathrm{ES}}=x\,(11/30-w_1/6)+15w_1-137/15,$
$\sigma_4^{\mathrm{ES}}=\sigma_5^{\mathrm{ES}}=x/5-45w_1/2+163/10.$

如图 2 所示, 企业1单干收益x越大, 表明企业1的经济实力增加, 则企业1的收益分配就越多, 这时企业1参与大联盟合作的动机就越低. 由于$11/30-w_1/6>0$, 基于ES^{gw}的分配方案可以使得企业2 和企业3随着x的增大而提高其加入大联盟的意愿; 而当$w_1\geqslant 2/5$ 时, 基于EE^{gw} 的分配方案才可使得企业2和企业3随着x 的增大而提高其加入大联盟的意愿. 另外, 虽然x 的变化对企业4和企业5的分配没有直接影响, 但是却对企业4与企业5的分配差值向量有影响, 因此x 越大, 企业4 和企业5就更倾向于参与此大联盟的国际合作.

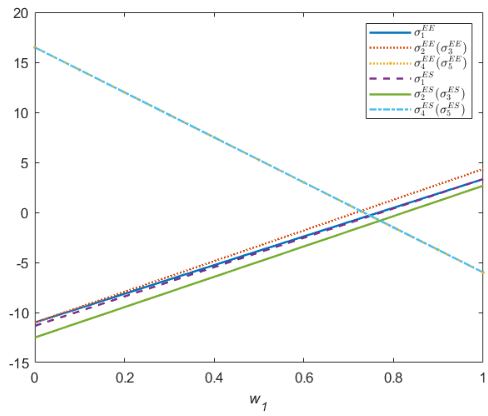

图 1 CS解和优先联盟C_1的动态权重w_1的关系

Fig. 1 The relation between CS value and weight of priori coalition

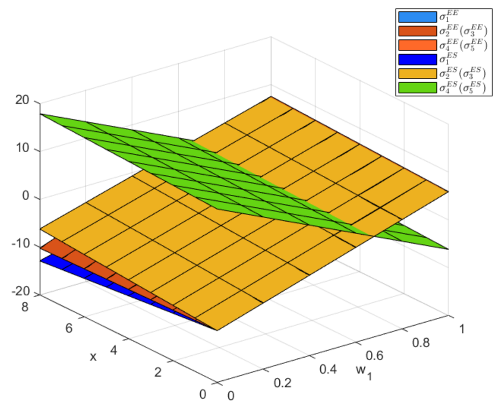

图 2 CS解与$v(1)$和w_1的关系

Fig. 2 The relation between $v(1)$ and w_1

以上分析意味着企业1的经济实力越强, 虽然其自身参与大联盟国际合作的意愿降低, 但是会增强不属于同一优先联盟成员企业4、企业5加入大联盟国际合作的动力, 而对于其同一优先联盟的成员(即企业2、企业3), 企业1 经济实力增强时, 企业2、企业3加入大联盟国际合作的意愿还取决于他们所在优先联盟的动态权重. 因此, 某个企业经济实力增加时, 应该适当的增加其所在联盟的动态权重, 因为其实力增加一定程度上增加了其他优先联盟成员的分配, 只有增加其自身所在优先联盟的动态权重, 才能抵消其同一优先联盟成员可能减少的大联盟合作意愿.

5 结束语

考虑到优先联盟议价能力的差异, 引入动态权重体现议价能力, 对平等盈余分配(ESD 解)进行了扩展, 提出了加权ESD解. 基于加权ESD 解, 进一步扩展了联盟结构合作博弈的Owen型值, 包括加权平等盈余分配(EE^w)和广义加权平等盈余分配(EE^{gw}). 此外, 考虑局中人在优先联盟中的边际贡献, 基于Shapley值构建

了另一个广义平等盈余分配(ES^{gw}). 通过对比EE^{gw}与ES^{gw}的收益分配方案, 分析局中人以优先联盟成员方式加入大联盟合作的条件. 分析可知, 企业自身实力的增强会降低其加入到联盟结构合作的意愿, 但是必然会提高大联盟中其他优先联盟的合作意愿, 而不一定会增强其同一优先联盟中其他伙伴的合作意愿. 可见, 当企业经济实力的增强时, 应该通过合理地设置优先联盟的动态权重来保证其同一优先联盟伙伴的合作意愿. 本文构建的联盟结构解(即CS解)可以帮助局中人评估可能的合作分配和合作方式, 从而选择最优的合作形式.

中国实现富裕社会的基本前提是保持较高增速的经济增长, 做大经济总量"蛋糕". 在此基础上, 要完善收入分配制度, 坚持按劳分配为主体、多种分配方式并存, 促进共同富裕. 进一步推进收入分配制度改革, 缩小不合理的收入差距, 分好" 蛋糕". 从合作博弈角度来说, 做大蛋糕就是实现增加合作总体收益, 分蛋糕就是构建合理公平的合作博弈" 解". 收入分配制度在促进共同富裕中发挥着重要作用. 收入分配改革旨在形成橄榄型收入结构实现共同富裕, 这无法一蹴而就, 而是逐步的结构转变过程, 需要我们在实践过程中不断尝试和调节分配权重或者议价能力, 实现效率与公平的统一, 缩小收入分配差距, 提高人民收入水平, 最终实现共同富裕. 另外, 现代社会是一个协同生产的时代, 合作联盟是常见的生产模式, 每个局中人的工资主要取决于其对于合作联盟所做出的边际贡献, 局中人以优先联盟形式参与合作是有一定的前提条件的, 只有在一定的优先联盟议价能力和局中人经济实力下, 合作对局中人个体的工资收益才有帮助, 局中人才会以联盟结构的形式参与大合作联盟. 作为激励机制的设计者, 合作联盟的盟主等可以选择不同的收益分配方式, 促使联盟成员在一定的议价能力下, 最终促进合作联盟的成功.

然而, 加权平等盈余分配(EE^{w})、广义加权平等盈余分配(EE^{gw})和广义平等盈余分配(ES^{gw})虽然考虑了优先联盟议价能力的差异, 但是未涉及交叉时的多层次合作问题. 实际上, 由于实际项目运作过程的复杂性, 联盟结构可能是多层次的交叉合作, 在这种允许优先联盟相交不为空集时, 如何分配合作收益上述三种分配已经无法适用. 因此, 进一步扩展EE^{w}、EE^{gw} 和ES^{gw}的应用范围是未来的重要研究方向之一.

参考文献:

[1] 肖 旦, 聂珊珊. 回收商相互竞争下闭环供应链成员的竞合策略. 系统工程学报, 2021, 36(6): 833–850.
Xiao D, Nie S S. Members' co-opetition strategy in closed-loop supply chains with competing recyclers. Journal of Systems Engineering, 2021, 36(6): 833–850. (in Chinese)

[2] 张瑞友, 赵尉盟. 考虑旅行社竞争的低碳旅游供应链的微分博弈. 系统工程学报, 2022, 37(5): 643–656.
Zhang R Y, Zhao W M. Differential game analyses of low-carbon tourism supply chains considering competitions between travel agencies, Journal of Systems Engineering, 2022, 37(5): 643–656. (in Chinese)

[3] 饶卫振, 段忠菲, 朱庆华. 一种均衡协作配送子联盟满意度的成本分摊方法. 系统工程学报, 2021, 36(4): 476–494.
Rao W Z, Duan Z F, Zhu Q H. A cost allocation method for balancing the satisfaction of cooperative distribution sub-alliances. Journal of Systems Engineering, 2021, 36(4):476–494. (in Chinese)

[4] Owen G. Values of games with a priori unions // Essays in Mathematical Economics and Game Theory. Berlin: Springer, 1977: 76–88.

[5] 于晓辉, 杜志平, 张 强, 等. 信息不完全下联盟结构合作博弈的比例Owen 值. 系统工程理论与实践, 2019, 39(8): 2105–2115.
Yu X H, Dun Z P, Zhang Q, et al. Owen's proportional cooperative game of alliance structure with incomplete information. Systems Engineering: Theory & Practice, 2019, 39(8): 2105–2115. (in Chinese)

[6] Gómez-Rúa M, Vidal-Puga J. The axiomatic approach to three values in games with coalition structure. European Journal of Operational Research, 2010, 207(2): 795–806.

[7] Banzhaf J F. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. Rutgers Law Review, 1965, III(19): 317–343.

[8] Albizuri M J. An axiomatization of the modified Banzhaf Coleman Index. International Journal of Game Theory, 2001, 30: 167–176.

[9] Amer R, Arreras F, Gimenez J M. The modified Banzhaf value for games with collation structure: An axiomatic characterization. Mathematical Social Sciences, 2001, 43: 45–54.

[10] Gallego Sanchez I. Cooperative Games Restricted by Fuzzy Graphs. Instituto de Matematicas de la Universidas de Sevilla, 2016.

[11] Alonso-Meijde J M, Fiestras-Janeiro M G. Modification of the Banzhaf value for games with a coalition structure. Annals of Operations Research, 2002, 109(1/4): 213–227.

[12] Casajus A. An efficient value for TU games with a cooperation structure. Universitat Leiozig, Germany. Working paper, 2007.

[13] 单而芳, 史纪磊, 吕文蓉, 康丽英. 具有图限制通信结构对策的有效Owen 值. 中国科学: 数学, 2020, 50(9): 1219–1232.
Shan E F, Shi J L, L$\ddot{u}$ W R. Effective Owen values with graph-constrained communication structure games. China Science: Mathematics, 2020, 50(9): 1219–1232. (in Chinese)

[14] 李泉林, 张 玉, 鄂成国. 多个农民专业合作社和多个超市的网络博弈研究. 系统工程学报, 2019, 34(1): 29–45.
Li Q L, Zhang Y, E C G. Network game between multiple agricultural communes and multiple supermarkets. Journal of Systems Engineering, 2019, 34(1): 29–45. (in Chinese)

[15] Levy A, McLean R P. Weighted coalition structure values. Games and Economic Behavior, 1989, 1(3): 234–249.

[16] Vidal-Puga J. The Harsanyi paradox and the "right to talk" in bargaining among coalitions. Mathematical Social Sciences, 2012, 64(3): 214–224.

[17] Kamijo Y. The collective value: A new solution for games with coalition structures. TOP, 2013, 21(3): 572–589.

[18] Nowak A S, Radzik T. A solidarity value for n-person transferable utility games. International Journal of Game Theory, 1994, 23(1): 43–48.

[19] Calvo E, Gutiérrez E. The Shapley-solidarity value for games with a coalition structure. International Game Theory Review, 2013, 15(1): 1350002.

[20] Hu X F. The weighted Shapley-egalitarian value for cooperative games with a coalition structure. Top, 2020, 28(1): 193–212.

[21] Hu X F, Xu G J, Li D F. The egalitarian efficient extension of the Aumann-Drèze value. Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, 181: 1033–1052.

[22] Zou Z X, van den Brink R, Funaki Y. Compromising between the proportional and equal division values. Journal of Mathematical Economics, 2021, 97, 102539.

[23] Driessen T, Funaki Y. Coincidence of and collinearity between game theoretic solutions. OR-Spektrum, 1991, 13: 15–30.

[24] Ferrieres S. Nullified equal loss property and equal division values. Theory & Decision, 2017, 83(3): 385–406.

[25] Yokote K, Funaki Y. Monotonicity implies linearity: Characterizations of convex combinations of solutions to cooperative games. Social Choice and Welfare, 2017. 49(1): 171–203.

作者简介:

于晓辉 (1982—), 女, 辽宁丹东人, 博士, 教授, 研究方向: 合作对策与决策, Email: yuxiaohui513@163.com;
王文举 (1965—), 男, 吉林人, 博士, 教授, 研究方向: 博弈论与低碳经济, Email: wangwenju@bwu.edu.cn;
张 强 (1958—), 男, 辽宁沈阳人, 博士, 教授, 研究方向: 合作对策与决策, 模糊数学等, Email: qiangzhang@bit.edu.cn;
张志强 (1996—), 男, 江苏淮安人, 硕士生, 研究方向: 合作对策与决策, Email: zhangzhiqiang961103@163.com;
商盈润 (1997—), 男, 河北石家庄人, 硕士生, 研究方向: 合作对策与决策, Email: shangyingrun817@163.com.

附录

引理1 证明 对于任意$p \in M^C$和$i \in C_p$, 下式成立, 即

$$\begin{aligned}
&\mathrm{EE}_i^w(N,v,C) = \mathrm{ESD}_i(C_p, v_{C_p}^w) = v_{C_p}^w(i) + \left(v_{C_p}^w(C_p) - \sum_{j\in C_p} v_{C_p}^w(j)\right)\Big/ c_p \\
&= (1-c_p/n)\, v(i) + c_p\left(v(N) - \sum_{k\in M^C\setminus p} v(C_k)\right)\Big/ n + (1-c_p/n)\left(v(C_p) - \sum_{j\in C_p} v(j)\right)\Big/ c_p - \\
&\quad (c_p-1)\left(v(N) - \sum_{k\in M^C\setminus p} v(C_k)\right)\Big/ n \\
&= (1-c_p/n)\left(v(i) + \left(v(C_p) - \sum_{j\in C_p} v(j)\right)\Big/ c_p\right) + \left(v(N) - \sum_{k\in M^C\setminus p} v(C_k)\right)\Big/ n \\
&= (1-c_p/n)\,\mathrm{ESD}_i(C_p, v) + c_p/n\left(\left(v(N) - \sum_{k\in M^C\setminus p} v(C_k)\right)\Big/ c_p\right).
\end{aligned}$$

同理可证$\mathrm{EE}_i(N,v,C) = \mathrm{ESD}_i(C_p, v_{C_p})$.

引理2 证明 对于任意$k\in M^C$, 由于$v(Q_R)=v_0^{C_k}(Q_{R\cup k}), v(Q_R\cup S)=v_0^{C_k}(Q_R\cup S), \forall R\subseteq M^C\backslash k, \forall p\in M^C\backslash(R\cup k)$, $\forall S\subseteq C_p,\ S\neq\emptyset$, 存在一种新的联盟结构合作博弈$(N,v,C\backslash C_k)$, 使得$v_0^k(N)=v(N\backslash C_k)$, 且

$$v_0^k(N)-\sum_{p\in M^C}v_0^k(C_p)=v(N\backslash C_k)-\sum_{p\in M^C\backslash k}v(C_p),$$

$$v_0^k(C_p)-\sum_{j\in C_p}v_0^k(j)=v(C_p)-\sum_{j\in C_p}v(j),\ \forall p\in M^C\backslash k.$$

再根据CISM可得$\varphi_i(N,v_0^{C_k},C)=\varphi_i(N,v,C\backslash C_k), \forall i\in N\backslash C_k$.

引理3 证明 1)设一个外部可加性联盟结构合作博弈中存在且仅存在一个优先联盟$v(C_p)\neq 0,\ p\in M^C$, 且满足$v(N)$=$v(C_p)$. 如果m=1, 那么根据E, $\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N,v,C)=v(C_p)$成立. 若$m\geqslant 2$, 根据引理2和CISM可有

$$\varphi_j(N,v_0^{C_p},C)=\varphi_j(N,v,C\backslash C_p)\overset{\text{CNG}}{=}0,\ \ \forall j\in N\backslash C_p. \tag{A.1}$$

再依据WNEL-SAC, 对于 $\forall l,k\in M^C\backslash p$有

$$w_l\left(\sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v,C)-\sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v_0^{C_p},C)\right)=w_k\left(\sum_{j\in C_l}\varphi_j(N,v,C)-\sum_{j\in C_l}\varphi_j(N,v_0^{C_p},C)\right),$$

即$w_l\sum\limits_{j\in C_k}\varphi_j(N,v,C)=w_k\sum\limits_{j\in C_l}\varphi_j(N,v,C), \forall l,k\in M^C\backslash p$. 对于任意$k\in M^C\backslash p$, 设$x=\sum\limits_{j\in C_p}\varphi_j(N,v,C)$, $y=\sum\limits_{j\in C_k}\varphi_j(N,v,C)$. 首先, 根据E, 下列等式成立: $x+(m-1)y\sum\limits_{l\in M^C}w_l/w_k=v(C_p)$. 然后, 根据CISM可得$y=\sum\limits_{j\in C_k}\varphi_j(N,v,C)\geqslant\sum\limits_{j\in C_k}\varphi_j(N,v^0,C)=0$.

由于m的任意性, 且$m\geqslant 2$, 可得$y=0$. 因此有$\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N,v,C)=v(C_p), \forall p\in M^C$. 接下来, 假设外部可加合作博弈$(N,v,C)\in\Theta(N)$中集合$\left\{l|v(C_l)\neq 0,\ \forall l\in M^C\right\}$的势为$s$, $s\geqslant 2$, 且$\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N,v,C)=v(C_p)$ 成立, $\forall p\in M^C$, 接下来证明当$s'=s+1$时, 等式$\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N,v,C)=v(C_p)$ 成立. 令一个外部可加的合作博弈$(N,v',C)\in\Theta(N)$, 集合$\left\{l|v'(C_l)\neq 0,\ \forall l\in M^C\right\}$的势为$s$+1. 令$L=\left\{l|v'(C_l)\neq 0,\ \forall l\in M^C\right\}$, 对于任意$p,p'\in L$ 与$k\in M^C\backslash\{p,p'\}$, 由WNEL-SAC可有

$$w_{p'}\left(\sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v',C)-\sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v_0^{\prime C_p},C)\right)=w_k\left(\sum_{j\in C_{p'}}\varphi_j(N,v',C)-\sum_{j\in C_{p'}}\varphi_j(N,v_0^{\prime C_p},C)\right).$$

根据假设, 上述等式可改写成

$$w_{p'}\left(\sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v',C)-v'(C_k)\right)=w_k\left(\sum_{j\in C_{p'}}\varphi_j(N,v',C)-v'(C_{p'})\right).$$

同理可得

$$w_p\left(\sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v',C)-v'(C_k)\right)=w_k\left(\sum_{j\in C_p}\varphi_j(N,v',C)-v'(C_p)\right).$$

设$x=\sum\limits_{j\in C_k}\varphi_j(N,v',C)-v'(C_k)$, 那么有

$$w_k\sum_{l\in M^C}\sum_{j\in C_l}\big(\varphi_j(N,v',C)-v'(C_l)\big)=\sum_{l\in M^C}w_l\left(\sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v',C)-v'(C_k)\right)=x\sum_{l\in M^C}w_l.$$

由于$\sum\limits_{l\in M^C}\sum\limits_{j\in C_l}\big(\varphi_j(N,v',C)-v'(C_l)\big)=0$, 所以$x\sum\limits_{l\in M^C}w_l=0$, 再由于$\sum\limits_{l\in M^C}w_l$是任意的, 可得

$$x=\sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v',C)-v'(C_k)=0.$$

2) 完全可加联盟结构合作博弈(N,v,C)分为以下两种情况:

情况1　$(N,v,C)\in\Theta(N)$满足完全可加性, 若有且仅有一个局中人i的单干收益不为零, 不失一般性, 假设$i\in C_p$, $p\in M^C$, 则$v(j)$=0, $\forall j\in N\setminus i$且$(N,v_0^i,C)\in\Theta(N)$为空博弈. 根据引理2 和CISM, 有$\varphi_j(N,v_0^{C_p},C)\overset{CNG}{=}0$, $\forall j\in N\setminus i$. 再根据NEL-SWC可得$\varphi_j(N,v,C)-\varphi_j(N,v_0^{C_p},C)=\varphi_{j'}(N,v,C)-\varphi_{j'}(N,v_0^{C_p},C)$, $\forall j,j'\in C_p\setminus i$. 这意味着

$$\varphi_j(N,v,C)=\varphi_{j'}(N,v,C),\forall j,j'\in C_p\setminus i \tag{A.2}$$

又根据(1)部分的证明可得

$$\sum_{j\in C_p}\varphi_j(N,v,C)=v(i),\quad \sum_{j\in C_k}\varphi_j(N,v,C)\ =0,\ \forall k\in M^C\setminus p. \tag{A.3}$$

令$x=\varphi_j(N,v,C),\forall j\in C_p\setminus i$, 则根据E与式(A.2) 和(A.3)可得$\varphi_i(N,v,C)+(c_p-1)x=v(i)$. 再根据CISM, 有$x=\varphi_i(N,v,C)\geqslant\varphi_i(N,v_0^i,C)=0$, 因此根据$c_p$ 和m 的任意性, 有$x=0$. 因此$\varphi_j(N,v,C)=v(j),\forall j\in N$, 这意味着: 对于一个完全可加的联盟结构博弈$(N,v,C)$, 局中人$j$的分配只取决于它自己单干的收益$v(j)$.

情况2　若$(N,v,C)\in\Theta(N)$为完全超可加博弈, 且仅有一个优先联盟的收益非零, 同时存在且仅存在两个局中人的单干收益非零, 不失一般性, 令$v(i)\neq0$, $v(k)\neq0$,　$i,k\in C_p$, 且$v(j)$=0,　$\forall j\in N\setminus\{i,k\}$. 根据NEL-SWC可得 $\varphi_i(N,v,C)-\varphi_i(N,v_0^k,C)=\varphi_j(N,v,C)-\varphi_j(N,v_0^k,C)$.

根据情况1的证明, 可有$\varphi_i(N,v_0^k,C)=v(i)$, $\varphi_j(N,v_0^k,C)=0$. 因此, $\varphi_i(N,v,C)-v(i)=\varphi_j(N,v,C)$. 同样, $\varphi_k(N,v,C)-v(k)=\varphi_j(N,v,C)$. 再根据E, 可有

$$\varphi_i(N,v,C)+\varphi_k(N,v,C)+\sum_{j\in N\setminus\{k,i\}}\varphi_j\left(N,v,C\right)=n\varphi_j(N,v,C)+v(i)+v(k)=v(i)+v(k).$$

因此, $\varphi_j(N,v,C)=0$和$\varphi_i(N,v,C)$=$v(i)$, $\varphi_k(N,v,C)$=$v(k)$.

综上, 通过对$v(i)$非零及优先联盟收益非零的个数迭代, 可得对于任意的联盟结构合作博弈(N,v,C), 局中人i 的分配只取决于其单干的收益, 即: $\varphi_i(N,v,C)$=$v(i),\forall i\in C_p$.

定理1 证明　(1) 显然, 存在一个满足E、CISM、CNG、NEL-SWC和NEL-SAC 的解. 下面证明它的唯一性.

情况1 设m=1, 即M^C的基数m为1, 那么$C=\{N\}$, $n\geqslant3$. 此时$(N,v,\{N\})$即为合作博弈(N,v). 如果一个在$\Theta(N)$上的解φ 满足E、CISM、CNG、NEL-SWC 和NEL-SAC, 等价于φ 在合作博弈(N,v)中满足E、ISM、NG和NEL. 这样, φ 就是ESD的解.

情况2 假设φ在M^C的基数为m-1, 且$m\geqslant3$ 时φ是唯一的. 下面证明当M^C的基数为m且存在$p\in M^{C'}$满足$c_p\geqslant3$ 时, 它也是唯一的. 不失一般性, 令$N'=N\cup C_m, C_m=\{C_m^1,\ldots,C_m^k\},k\geqslant1, C=\{C_1,\ldots,C_{m-1}\}$ 和$C'=\{C_1,\ldots,C_{m-1},C_m\}$. 由此可得

$$\sum_{i\in C_p}\Big(\varphi_i(N',v,C')-\varphi_i(N',v_0^{C_m},C')\Big)\overset{\text{NEL-SAC}}{=}\sum_{i\in C_{p'}}\Big(\varphi_i(N',v,C')-\varphi_i(N,v_0^{C_m},C)\Big),\quad\forall p,p'\in M^C. \tag{A.4}$$

同时, 由引理2, $\varphi_i(N',v_0^{C_m},C')=\varphi_i(N,v,C)$, 所以可得

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in N}\Big(\varphi_i(N',v,C')-\varphi_i(N',v_0^{C_m},C')\Big)=\sum_{p\in M^C}\sum_{i\in C_p}\Big(\varphi_i(N',v,C')-\varphi_i(N',v_0^{C_m},C)\Big)\\&\overset{\text{E}}{=}v(N')-\sum_{j\in C_m}\varphi_j(N',v_0^{C_m},C')-\sum_{i\in N}\varphi_i(N',v_0^{C_m},C')\\&=v(N')-\sum_{j\in C_m}\varphi_j(N',v,C'\setminus C_m)-\sum_{i\in N}\varphi_i(N',v,C'\setminus C_m)\\&=(N')-\sum_{j\in C_m}\varphi_j(N,v,C)-\sum_{i\in N}\varphi_i(N,v,C)\\&\overset{\text{E}}{=}v(N')-v(N).\end{aligned} \tag{A.5}$$

根据式(A.4)和式(A.5), 可得 $\sum_{i\in C_p}\Big(\varphi_i(N',v,C')-\varphi_i(N,v_0^{C_m},C')\Big)=\big(v(N')-v(N)\big)/(m-1)$, $\forall p\in M^C$.

再由假设可知

$\varphi_i(N', v_0^{C_m}, C')$是唯一的, 所以$\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N', v, C')$也是唯一的.

令$A_p(N', v, C') = \sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N', v, C')$, 则对于任意$h \in N'\backslash C_p$和$i \in C_p$, 可有

$$\varphi_i(N', v, C') - \varphi_i(N', v_0^h, C') \overset{\text{NEL-SWC}}{=} \Big(A_p(N, v, C') - A_p(N', v_0^h, C')\Big)\Big/ c_p.$$

同理, 对于任意$k \in N'\backslash(C_p \cup h)$, 有

$$\varphi_i(N', v_0^h, C') - \varphi_i(N', v^{h,k}, C') \overset{\text{NEL-SWC}}{=} \Big(A_p(N', v_0^h, C') - A_p(N', v^{h,k}, C')\Big)\Big/ c_p.$$

最后, 可得

$$\varphi_i(N', v, C') - \varphi_i(N', v_0^{C'\backslash C_p}, C') = \Big(A_p(N', v, C') - A_p(N', v_0^{C'\backslash C_p}, C')\Big)\Big/ c_p, \tag{A.6}$$

$$\varphi_i(N', v_0^{C'\backslash C_p}, C') - \varphi_i(N', v_0^{C'\backslash i}, C') = \Big(A_p(N', v_0^{C'\backslash C_p}, C') - A_p(N', v_0^{C'\backslash i}, C')\Big)\Big/ c_p - 1. \tag{A.7}$$

根据引理3, 可得$A_p(N', v_0^{C'\backslash C_p}, C') = v(C_p)$, $\varphi_i(N', v_0^{C'\backslash i}, C') = v(i)$. 结合式(A.6)和式(A.7), 可知$\varphi_i(N', v, C')$ 是唯一的.

2) $\text{EE}^{gw}(N, v, C)$的唯一性证明与(1)相似, 此处不再赘述.

引理4 证明 对于任意$i \in C_p$ 与$p \in M^C$, 根据式(11), 有

$$\begin{aligned}
\text{ES}_i^{gw}(N, v, C) = \text{Sh}_i(C_p, v_{C_p}^{gw}) &= \sum_{S\subseteq C_p, i\notin S, S\neq\emptyset} \tfrac{s!(c_p-s-1)!}{c_p!}\Big[v_{C_p}^{gw}(S\cup i) - v_{C_p}^{gw}(S)\Big] + \tfrac{v_{C_p}^{gw}(i)}{c_p} \\
&= \sum_{S\subseteq C_p, i\notin S, S\neq\emptyset} \tfrac{s!(c_p-s-1)!}{c_p!}\Big[v_{C_p}^{gw}(S\cup i) - v_{C_p}^{gw}(S)\Big] + \tfrac{v(i)}{c_p} + \frac{w_p\Big(v(N) - \sum\limits_{r\in M^C\backslash p} v(C_r) - v(i)\Big)}{c_p} \\
&= (1 - w_p)\sum_{S\subseteq C_p, i\notin S} \tfrac{s!(c_p-s-1)!}{c_p!}\left[v(S\cup i) - v(S)\right] + \frac{w_p\Big(v(N) - \sum\limits_{r\in M^C\backslash p} v(C_r)\Big)}{c_p} \\
&= (1 - w_p)\,\text{Sh}_i(C_p, v) + w_p\left(\frac{v(N) - \sum\limits_{r\in M^C\backslash p} v(C_r)}{c_p}\right).
\end{aligned}$$

引理5 证明 (1) 设$\phi_{C_p}(v) = \sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N, v, C), \forall i \in C_p, \forall p \in M^C$. 分为以下两种情况进行证明.

情况1 如果$v(C_p) = 0, \forall p \in M^C$. 对于任意$p' \in M^C\backslash p$, $h \in M^C\backslash\{p \cup p'\}$, 根据CNG可知, $\phi_{C_p}(v_0^{C_h}) = 0$. 再由WNEL-SAC 可知, $w_{p'}\sum\limits_{i\in C_p}\varphi_i(N, v, C) = w_p\sum\limits_{k\in C_{p'}}\varphi_k(N, v, C)$, 即$w_{p'}\phi_{C_p}(v) = w_p\phi_{C_{p'}}(v)$, 因此, $\phi_{C_p}(v) - v(C_p) = w_p\Big/\sum\limits_{r\in M^C} w_r\left(v(N) - v(C_p)\right) = w_p\Big/\sum\limits_{r\in M^C} w_r v(N)$.

情况2 存在至少一个收益不等于零的优先联盟, 令$M^{C'} = \{p \in M^C | v(C_p) \neq 0\}$, 设$M^{C'}$ 的势为m'. 接下来, 证明下式成立:

$$\phi_{C_p}(v) - v(C_p) = w_p\Big/\sum_{r\in M^C} w_r\left(v(N) - \sum_{k\in M^C} v(C_k)\right),\ \ \forall p \in M^{C'}. \tag{A.8}$$

假设$m'=l$, $l \leqslant m$, 式(A.8)成立. 将证明当$m'=l+1$ 时, 式(A.8)成立. 不失一般性, 令$M^{C''}=M^{C'} \cup p$, 只需证明下式成立,

$$\phi_{C_p}(v) - v(C_p) = w_p\Big/\sum_{r\in M^C} w_r\left(v(N) - \sum_{r\in M^C} v(C_r)\right). \tag{A.9}$$

根据WNEL-SAC可得

$$w_{p'}\sum_{i\in C_r}\Big(\varphi_i(N, v, C) - \varphi_i(N, v_0^{C_p}, C\Big) = w_r\sum_{k\in C_{p'}}\Big(\varphi_k(N, v, C) - \varphi_k(N, v_0^{C_p}, C)\Big),\ \forall r, p' \in M^{C''}\backslash p. \tag{A.10}$$

根据假设, 对于任意$r, p' \in M^{C''} \backslash p$, 有

$$w_{p'} \sum_{i \in C_r} \varphi_i(N, v_0^{C_p}, C) = w_{p'} w_r \Bigg/ \sum_{k \in M^C} w_k \left(v(N) - \sum_{k \in M^C} v(C_k)\right) + w_{p'} v(C_r),$$
$$w_r \sum_{k \in C_{p'}} \varphi_k(N, v_0^{C_p}, C) = w_r w_{p'} \Bigg/ \sum_{k \in M^C} w_k \left(v(N) - \sum_{k \in M^C} v(C_k)\right) + w_r v(C_{p'}).$$

因此, 可得对于$\forall r, p' \in M^C \backslash p$, 有

$$w_{p'} \left(\sum_{i \in C_r} \varphi_i(N, v, C) - v(C_r)\right) = w_r \left(\sum_{k \in C_{p'}} \varphi_k(N, v, C) - v(C_{p'})\right). \tag{A.11}$$

令$q \in M^C$, 根据WNEL-SAC可得

$$w_p \sum_{i \in C_r} \left(\varphi_i(N, v, C) - \varphi_i(N, v_0^{C_q}, C)\right) = w_r \sum_{k \in C_p} \left(\varphi_k(N, v, C) - \varphi_k(N, v_0^{C_q}, C)\right), \ \forall r \in M^C \backslash \{p, q\}.$$

同样地, 可得

$$w_p \left(\sum_{i \in C_r} \varphi_i(N, v, C) - v(C_r)\right) = w_r \left(\sum_{k \in C_p} \varphi_k(N, v, C) - v(C_p)\right), \ \ \forall r \in M^C \backslash p. \tag{A.12}$$

根据式(A.11)和式(A.12)以及E, $\phi_{C_p}(v) - v(C_p) = w_p \Big/ \sum_{r \in M^C} w_r \left(v(N) - \sum_{r \in M^C} v(C_r)\right)$成立.

(2)与(1)的证明方式类似, 此处不再赘述.

定理2 证明　令$v^p(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(N, v, C(S)), \forall S \subseteq C_p, \forall p \in M^C$. 根据引理5, 对于任意$p \in M^C$, 可知下面两个函数是唯一的

$$v^p(C_p) = w_p \Bigg/ \sum_{r \in M^C} w_r \left(v(N) - \sum_{r \in M^C} v(C_r)\right) + v(C_p),$$

$$v^p(S) = w_p \Bigg/ \sum_{r \in M^C} w_r \left(v(N) - \sum_{r \in M^C \backslash p} v(C_r) - v(S)\right) + v(S).$$

由此得到合作博弈(C_p, v^p), $\forall p \in M^C$. 进一步, 根据E、SWC、L、NP, 定义在(C_p, v^p)上的解是唯一的, 即: $\varphi_i(N, v, C) = \mathrm{Sh}_i(C_p, v^p), \forall i \in C_p$. 再由引理4, 可得$\varphi(N, v, C)$=$\mathrm{ES}^{gw}(N, v, C)$.