

# 基于嵌套Logit模型的竞争性选址问题研究

李磊<sup>1</sup>, 张曙阳<sup>1</sup>, 李彤<sup>2</sup>

(1. 江南大学商学院, 江苏 无锡 214122;  
2. 大连理工大学经济管理学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 为解决现有竞争性选址研究中,“不相关选项的独立性”引起的市场份额计算偏差问题.本文首先以嵌套Logit模型优化顾客效用函数,建立以收益最大化为目标的、连续多属性竞争性选址与设计模型;其次通过大量数值仿真实验,对比分析了GSA、PSO-GSA、CGSA1-10型算法性能.实验结果表明,PSO-GSA算法有着最强的解空间搜索能力,为本文模型一种高效、稳定的求解方法.

**关键词:** 竞争性选址; 嵌套Logit模型; 连续多属性; 引力搜索算法

中图分类号: O221 文献标识码: A 文章编号: 1000-5781(2021)04-0524-15

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2021.04.007

## A new competitive facility location model based on nested Logit model

Li Lei<sup>1</sup>, Zhang Shuyang<sup>1</sup>, Li Tong<sup>2</sup>

(1. School of Business, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;  
2. School of Business, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** Independence of irrelevant alternatives(IIA) tends to cause deviations in the prediction of customers' choice behavior. To solve the problem, this study constructs a novel competitive facility location and design model. This model is also applicable to the continuous and multi-attribute design problem. This study analyzes the performance of several algorithms through numerical experiment: The gravitational search algorithm (GSA), the particle swarm optimization-gravitational search algorithm (PSO-GSA), and chaotic gravitational search algorithm chaotic gravitational search algorithm 1 through 10. The experiment result shows the PSO-GSA has the best ability to search in solution space. Therefore, this study regards PSO-GSA as a highly efficient and stable algorithm for solving the new model.

**Key words:** competitive facility location problem; nested Logit model; continuous and multi-attribute; gravitational search algorithm

## 1 引言

设施选址问题,是在向需求点提供产品或服务的目的下,确定一个或若干个设施点的“最优”位置.此处的“最优”,取决于待研究问题的约束条件及最优标准<sup>[1]</sup>.早期设施选址模型主要解决垄断条件下的设施选址问题,即设施点选址无需考虑竞争对手的存在及可能做出的回应.此类模型的假设并不完全符合设施选址的真实情况,因企业在开展设施选址活动时,往往发现竞争对手已在区域中重要节点经营相似甚至相同

收稿日期: 2019-01-17; 修订日期: 2019-10-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71671022); 教育部人文社会科学研究规划基金资助项目(17YJAZH041); 辽宁省自然科学基金资助项目(201602156); 江苏省研究生科研创新计划资助项目(KYCX18-1886).

设施;即使企业抢占先机首先进入,也无法避免后期竞争对手涌入设置相似设施点,蚕食己方已有市场份额。因此,在设施选址模型中考虑竞争因素的存在,是更为合理的。

Plastira 在2001年将竞争性设施选址问题(competitive facility location problem, CFL) 定义为: 清楚阐明其他设施已存在或将存在于市场中,且新建设施点将与这些设施点竞争,来获得关键市场份额的选址模型<sup>[2]</sup>。竞争性选址模型最早可追溯至1929年Hotelling对线性市场中双寡头竞争策略的研究,该模型假设顾客均匀分布于线性市场上,距离顾客最近的设施点将获得其全部需求<sup>[3]</sup>。基于Reilly的零售引力模型<sup>[4]</sup>,1964年Huff提出重力模型<sup>[5]</sup>。该模型是最为广泛使用的非确定型竞争选址模型,其假设顾客光顾零售设施点的概率与设施点面积成正比,与两者间距离的次方成反比。在最初的重力模型中,楼面面积是构成设施点吸引力的唯一指标。Nakanishi和Cooper在1974年改进了Huff的重力模型,以多因素次方的乘积替代楼面面积,将构成设施点吸引力的单因素拓展至多因素,提出乘法竞争相互作用模型(multiplicative competitive interaction, MCI),并给出模型中参数的计算方法<sup>[6]</sup>。ReVelle提出最大俘获问题(maximum capture problem, MAXCAP),试图在网络空间设置一系列设施点,最大化企业的市场份额<sup>[7]</sup>。

竞争性选址与设计问题的正式界定,则主要归因于2007年Fernández与Aboolian先后发表的两篇论文<sup>[8,9]</sup>。Fernández解决了Huff模型下的单设施点平面竞争性选址与设计问题,其吸引力为一元连续变量,并给出模型的利润、收入及成本函数,利用Weiszfeld式算法及分支定界法对比求解<sup>[8]</sup>。Aboolian将竞争性选址中对位置及设计的同时优化,定义为竞争性选址与设计问题(competitive facility location and design problem, CFLDP),并考察了弹性需求下,离散空间的多设施竞争性选址及设计问题<sup>[9]</sup>。

以Fernández研究为基础的CFLDP模型得到广泛应用。基于Fernández模型进行的研究,包括Redondo<sup>[10]</sup>,Tóth<sup>[11]</sup>对竞争性选址与设计问题中参数的敏感性分析,Tóth<sup>[12]</sup>对同时选址与次序选址策略收益差异的研究,Redondo<sup>[13]</sup>在多目标条件下求帕累托解,Arrondo<sup>[14]</sup>为提升此类问题求解效率而研究并行算法,以及Saidani<sup>[15]</sup>及Arrondo<sup>[16]</sup>所研究的动态竞争模型等。基于Aboolian构建模型的研究,Kochetov<sup>[17]</sup>在离散空间下求解多设施选址利润最大化的Stackelberg解。自2007年CFLDP确立以来,其他竞争性选址与设计问题的研究,包括Lancinskas<sup>[18]</sup>,Hendrix<sup>[19]</sup>,Sadjadi<sup>[20]</sup>,其所使用的模型不具备代表性,可视为简化版的Fernández式CFLDP模型。关于CFL及CFLDP近年的综述性文献,可参见Ashtiani及Drezner的研究<sup>[21-22]</sup>。CFLDP理论的发展与进步,基于迫切的现实需求。许多行业中设施点所提供产品及服务同质化问题非常严重,顾客并不具备明显的忠实度。这些设施点更类似于功能道具,如各类零售店、加油站、快捷酒店等。经营者只能通过优化设施点的各项属性,包括距离、泊车位、收银台数、楼面面积等,提升消费者效用值,从而获得更高的市场份额。然而,中心地区的选址、更多的泊车位、更好的服务质量、更大的店面意味着设施点要付出更高的选址成本及经营成本,经营者却很难确定通过这些属性的提升能够带来多大的收益,存在较高的不确定风险。CFLDP选址理论以设施点的位置、吸引力为优化变量,在竞争对手存在的前提下,最大化设施点的市场份额或经营利润,适用于同质化行业的设施点选址问题,有着广泛的应用空间。因此,不断优化完善CFLDP理论,有助于提升设施点经营效益,避免社会资源浪费。

本文对Aboolian<sup>[9]</sup>及Fernández<sup>[8]</sup>的研究进行拓展,并对现有研究的不足之处进行剖析。本文研究发现,CFLDP中Huff模型的成立,有着“不相关选项的独立性”(independence from irrelevant alternatives, IIA)的前提条件,这与现实情况并不相符,因而Huff模型对顾客选择行为的预测存在一定的误差问题。为解决此问题,本文首次结合离散选择理论中的嵌套Logit模型,重新构建CFLDP模型,该模型不受顾客备选项间相关性的影响,提升模型对消费者行为预测的准确性,拓宽CFLDP理论的适用范围。此外,CFLDP领域的现有研究,均仅对设施点的“吸引力”(attraction)进行优化,为单一变量。本文将CFLDP的优化目标深化至构成设施点“吸引力”的多项“属性”,使对设施点的运营成本及营业收入的优化更具针对性。本文构建的CFLDP模型复杂度较高,为提供一种高效、稳定的解法,通过数值实验,本文测试了GSA、PSO-GSA以及CGSA1-10型算法的表现,得出PSO-GSA算法求得解的质量最高,最适宜本文模型的求解。

## 2 离散选择理论基础

竞争性选址理论中的Huff模型,与离散选择理论的多项Logit模型(multinomial logit model, MNL),都源自Luce's choice axiom,而Luce's choice axiom成立的前提条件是“不相关选项的独立性”<sup>[5,23]</sup>.因而当选择项内存在相关性时,Huff模型以及多项Logit模型对决策者选择行为的预测都会存在偏差.McFadden提出广义极值分布(generalization extreme value, GEV)模型,该模型允许选择项相关性的存在.McFadden同时证明嵌套Logit(nested logit, NL)模型是GEV的特例,并探讨了MLM与NLM的紧密联系<sup>[24]</sup>.因此,本文提出以NLM替换竞争性选址理论中的Huff模型,规避因选择项相关性产生的行为预测偏差.

### 2.1 多项Logit模型

离散选择模型是描述特定微观个体行为选择的建模方法,该方法揭示了特定条件下特定微观个体特定行为选择的概率与相关解释变量的定量关系<sup>[25]</sup>.在离散选择理论中,决策者的选择行为满足效用最大化原则.决策者效用由选项属性值决定的可观测部分,以及随机的不可观测部分组成,选项*i*对决策者*n*的效用为

$$u_{ni} = x_i\beta_n + \varepsilon_{ni}, \quad (1)$$

其中*i*为选择项, $x_i$ 为选择项的属性值向量;*n*为决策者, $\beta_n$ 为决策者对不同属性的敏感系数. $\varepsilon_{ni}$ 为决策者效用的外生随机性<sup>[26]</sup>. $\beta_n$ 是决策者*n*的属性敏感系数.

假定效用的随机部分 $\varepsilon_{ni}$ 服从Weibull分布,McFadden于1973年证明,决策者*n*选择选项*i*的概率为

$$P_{ni} = \frac{e^{V_{ni}}}{\sum_{k \in C} e^{V_{nk}}}, \quad (2)$$

其中*C*为包含所有选择项的集合, $V_{ni}$ 为决策者效用的可观测部分, $V_{ni} = x_i\beta_n$ .

McFadden将此式称为条件Logit模型,现通常称为多项Logit模型<sup>[23]</sup>.多项Logit模型的一显著缺是需要有“不相关选项的独立性”的前提条件,即

$$\frac{P_{ni}}{P_{nh}} = \left( \frac{e^{V_{ni}}}{\sum_{j \in C} e^{V_{nj}}} \right) / \left( \frac{e^{V_{nh}}}{\sum_{j \in C} e^{V_{nj}}} \right) = \frac{e^{V_{ni}}}{e^{V_{nh}}}. \quad (3)$$

决策者*n*选择选项*i*的概率为 $P_{ni}$ ,选择选项*h*的概率为 $P_{nh}$ ,由上式可知 $P_{ni}$ 与 $P_{nh}$ 的比值是固定的.此比值由两个选择项的效用可观测部分决定,与全选择集*C*内的其它选项无关.

当选择项存在相关性时,多项Logit模型的概率计算会存在显著的偏差,如经典的红/蓝巴士悖论<sup>[27]</sup>:假定决策者*n*有汽车和红巴士两种出行方式,即 $C = \{\text{auto}, \text{red.bus}\}$ ,该两种出行方式效用相同,即 $V_{\text{auto}} = V_{\text{red.bus}}$ .当其出行时,决策者选择汽车与巴士的概率之比为1,并且 $P_{\text{auto}} = P_{\text{red.bus}} = 1/2$ .

如果巴士公司提供完全一样的新巴士,除了新巴士的颜色被涂为蓝色,此时有

$C = \{\text{auto}, \text{red.bus}, \text{blue.bus}\}$ ,  $P_{\text{auto}}/P_{\text{red.bus}} = P_{\text{red.bus}}/P_{\text{blue.bus}} = 1$ ,  $P_{\text{auto}} = P_{\text{red.bus}} = P_{\text{blue.bus}} = 1/3$ .

但是合理的概率为 $P_{\text{auto}} = 1/2$ ,  $P_{\text{red.bus}} = P_{\text{blue.bus}} = 1/4$ .此例可证明,当选择项存在相关性时,通过MNL计算得到的结果存在偏差.

### 2.2 嵌套Logit模型

为解决选择项相关性引发的问题,嵌套Logit模型利用分层的思想,将全选择集*C*划分为*K*个子集,相关选项进入同一个子集,无关选项进入不同的子集,且满足

$$C = \bigcup_{k=1}^K C_k, C_k \cap C_l = \Phi, k \neq l. \quad (4)$$

此时, 决策者 $n$ 的可观测效用可被分为两部分, 即决策者选择 $k$ 子集所产生的效用 $W_{nk}$ , 和决策者选择 $k$ 子集中 $i$ 选项所产生的效用 $Y_{ni}$ , 即

$$U_{ni} = W_{nk} + Y_{ni}/\lambda_k + \varepsilon_{ni}. \quad (5)$$

在嵌套Logit模型中, 各选择项随机效用的联合分布为广义极值分布(generalized extreme-value distribution, GEV), McFadden推导出 $P_{ni/k}$ 与 $P_{nk}$ 分别为

$$P_{ni/k} = \frac{\exp(Y_{ni}/\lambda_k)}{\sum_{j \in C_k} \exp(Y_{nj}/\lambda_k)}, \quad (6)$$

$$P_{nk} = \frac{\exp(W_{nk} + \lambda_k I_{nk})}{\sum_{m=1}^K \exp(W_{nm} + \lambda_m I_{nm})}, \quad (7)$$

其中 $P_{nk}$ 为决策者 $n$ 选择子集 $k$ 的概率,  $\lambda_k$ 为尺度参数, 描述同一类别内选择项间的替代性, 若子集划分正确, 则 $\lambda_k$ 应介于 $(0, 1)$ 之间.  $I_{nk}$ 是包含值,  $I_{nk} = \ln \sum_{j \in C_k} \exp(Y_{nj}/\lambda_k)$ , 是 $k$ 子集内所有选择项的平均效用<sup>[24]</sup>.

此时, 决策者 $n$ 选择选项 $i$ 的概率为

$$P_{ni} = P_{ni/k} P_{nk}. \quad (8)$$

### 3 竞争性选址中Huff模型的概率计算偏差

Huff引力模型为CFL、CFLDP理论中, 计算顾客选择不同设施点概率的基本模型. 本章节简要介绍Huff模型的基本原理, 并对比多项Logit模型, 深入分析IIA特性引起的Huff模型概率计算偏差.

#### 3.1 Huff引力模型

在Huff模型中, 假定区域 $\mathbb{R}^2$ 内存在 $n$ 个需求点, 其对应的购买力为 $B_i, i = 1, 2, \dots, n$ ; 存在 $m$ 个设施点, 其对应的吸引力为 $A_j, j = 1, 2, \dots, m$ <sup>[5]</sup>. 对于任意设施点 $j$ , 顾客 $i$ 获得的效用为

$$u_{ij} = \frac{A_j}{g_i(d_{ij})}, \quad (9)$$

其中 $d_{ij}$ 为顾客 $i$ 距设施点 $j$ 的距离,  $g_i$ 为非负单调增函数, 可取为 $g_i(d_{ix}) = (d_{ix})^{\lambda_i}, \lambda_i > 0$ .

此时, 设施点 $j$ 所获得的市场份额为

$$M_j = \sum_{i=1}^n B_i \frac{A_j/g_i(d_{ij})}{\sum_{k=1}^m (A_k/g_i(d_{ik}))}. \quad (10)$$

设施点 $j$ 从需求点 $i$ 处获得的购买力为

$$M_{ij} = B_i \frac{A_j/g_i(d_{ij})}{\sum_{k=1}^m (A_k/g_i(d_{ik}))} = B_i \frac{u_{ij}}{\sum_{k=1}^m u_{ik}}. \quad (11)$$

#### 3.2 Huff模型中IIA特性的影响分析

消去式(11)的需求点购买力 $B_i$ , 可得顾客 $i$ 选择设施点 $j$ 的概率为

$$P_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sum_{k=1}^m u_{ik}}, \quad (12)$$

其中分子 $u_{ij}$ 为顾客 $i$ 从设施点 $j$ 处获得的效用, 分母 $\sum_{k=1}^m u_{ik}$ 为需求点 $i$ 从所有 $m$ 个设施点获得的总效用.

如果将顾客*i*选择*j*设为 $P_{ij}$ ,选择*h*设为 $P_{ih}$ ,则

$$\frac{P_{ij}}{P_{ih}} = \frac{u_{ij}}{u_{ih}}. \quad (13)$$

从式(13)可以得出,  $P_{ij}$ 与 $P_{ih}$ 比值仍为一定值. 此比值仅与设施点*j*与*h*的效用相关.

当对比式(3)与式(13), 可以发现MNL与Huff重力模型的高度相似性: 在并未考虑选择项的相关性的情况下, 两者仅基于选择项的效用, 来预测决策者的选择行为. 因此, 正如前文的红/蓝巴士悖论, 由于IIA条件的存在, 当选择项存在相关性时, Huff模型中的概率计算同样存在一定偏差.

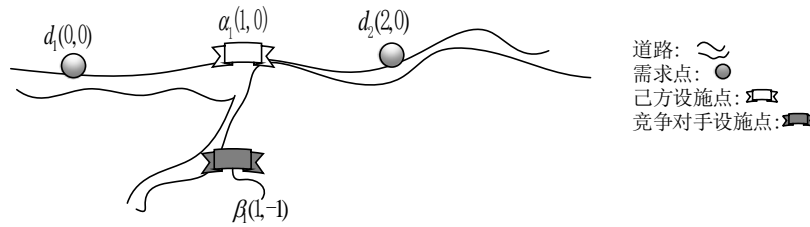


图1 IIA偏差

Fig. 1 IIA deviation

图1中,  $d_1$ 与 $d_2$ 为两个需求点,  $\alpha_1$ 为企业现有的设施点,  $\beta_1$ 为竞争对手设施点. 假设设施容量不限,  $u_{ij} = A_j/R_{ij}^2$ , 所有设施的吸引力 $A_j$ 均为1, 一家公司计划在此区域内新建一设施点 $\alpha_2$ .

首先计算顾客光顾这两家设施点的概率, 根据公式10, 顾客 $d_1$ 获得的效用为 $u_{\alpha_1} = 1, u_{\beta_1} = 1/2$ . 根据公式13, 顾客选择两家设施点的概率分布为 $P_{\alpha_1} = 2/3, P_{\beta_1} = 1/3$ .

其次计算建设新设施点 $\alpha_2$ 后, 顾客的光顾概率. 在Huff模型下, 最优新设施点的坐标为下列优化问题的解, 即

$$\text{Max}_{x,y \in R} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x-2)^2 + y^2} \right). \quad (14)$$

解得的新设施点的坐标 $\alpha_2$ 为(1,0), 这与企业现有设施点 $\alpha_1$ 重合. 消费者获得的效用为 $u_{\alpha_1} = 1, u_{\alpha_2} = 1, u_{\beta_1} = 1/2$ . 根据式(12), 新设施点的建设使顾客光顾设施点 $\alpha_1$ 的概率从2/3转为4/5. 而实际上, 在设施点容量不限的情况下, 同一家公司在同一地点开设再多的设施点, 顾客效用并不会会有明显变化, 光顾此地的概率并不会因此等比例提升, 竞争对手的光顾概率也不会等比例降低, Huff模型对顾客光顾概率的测算存在显著的偏差.

Fernández指出, 顾客更倾向于选择属于不同公司内的设施点, 来对比来获得不同的商品<sup>[28]</sup>. 现实情况中, 属于同一家公司的设施点通常有着更高的相似性. 顾客从此类设施点获得的效用是高度“重叠”的. 因此, 本文以嵌套Logit模型, 代替原有的Huff重力模型, 构建新的竞争性选址与设计模型. 将顾客选择项依所属方划分为不同子集, 避免选项相关性带来的负面影响, 并在此基础上进行平面单设施、连续多属性的竞争性选址与设计问题的求解.

#### 4 基于嵌套Logit模型的CFLDP模型

一家公司想在指定区域*S*开设1个新的设施点, 在这片区域中, 已有竞争对手开设提供相似产品或服务的设施点. 将区域内的有需求的居民定居区简化为平面点集, 将居民定居点的需求设定为对应点的购买力. 需求点集合、坐标、购买力、属性敏感系数, 以及现有设施点集合、坐标、属性值均已通过统计方法确定. 现此公司可以通过确定新设施点的最优位置, 以及新设施点的各项属性值, 使得己方所获利润最大化.

同一定居区内顾客通常有着相似的社会地位及经济实力, 相较于其内部的区分, 顾客对不同公司设施点的偏好区分性更高. 用离散选择理论中的嵌套Logit模型来描述需求点的效用函数, 以及其选择特定设施点

的概率.

主要变量及含义见表1.

表1 变量及含义  
Table 1 Variables and explanation

变量	含义
$j_0$	新设施点
$x_0$	新设施点坐标, $x_0 = (x_{01}, x_{02})$
$\alpha_0$	新设施点属性值, $\alpha_0 = \{\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0k}\}$
$I$	需求点集合, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$
$p_i$	需求点坐标, $p_i = (p_{i1}, p_{i2})$
$w_i$	需求点 <i>i</i> 的购买力
$\beta_{id}$	需求点 <i>i</i> 的距离敏感系数
$\beta_i$	需求点 <i>i</i> 的属性敏感系数, $\beta_i = \{\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ik}\}$
$J$	现有设施点集合, $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$
$x_j$	现有设施点坐标, $x_j = (x_{j1}, x_{j2})$
$\alpha_j$	现有设施点属性值, $\alpha_j = \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jk}\}$
$d_{i0}$	需求点 <i>i</i> 距新设施点的距离, $d_{i0} = \left( (p_{i1} - x_{01})^2 + (p_{i2} - x_{02})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
$d_{ij}$	需求点 <i>i</i> 距现有设施点 <i>j</i> 的距离, $d_{ij} = \left( (p_{i1} - x_{j1})^2 + (p_{i2} - x_{j2})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
$S$	新设施点可选址的平面区域, $S \subset \mathbb{R}^2$
$C$	顾客全选择集, $C = \{j_0, j_1, \dots, j_m\}$ , $0 \sim l$ 个设施点属于己方, $l+1 \sim m$ 个设施点属于竞争对手

基于嵌套Logit模型, 将顾客的全选择集*C*划分为两个层次子集, 即顾客首先选择区域内现存的公司, 其次再选择公司的下属设施点. 为简化计算, 第一层次将所有设施点划分为2个子集, 即己方设施点*C<sup>I</sup>*与竞争对手设施点*C<sup>II</sup>*,  $C^I = \{j_0, j_1, \dots, j_l\}$ ,  $C^{II} = \{j_{l+1}, j_{l+2}, \dots, j_m\}$ , 如图2.

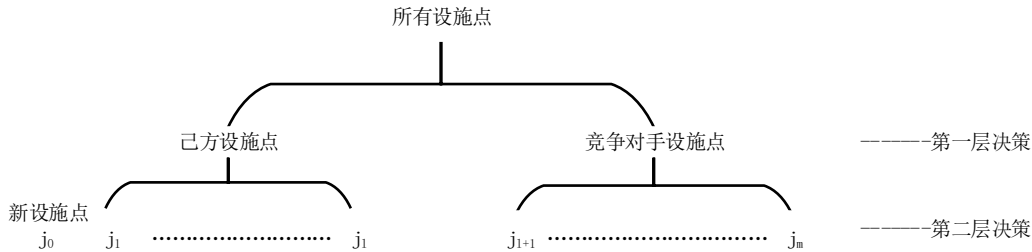


图2 双层选择

Fig. 2 Bi-level choice

根据式(6), 需求点*i*选择己方设施点的效用为

$$U_{iIj} = W_{iI} + Y_{iIj}/\lambda_I + \varepsilon_{iIj}, \tag{15}$$

其中  $W_{iI}$  表示影响个体对第一层子集选择的解释变量产生的效用,  $Y_{iIj}$  表示仅影响个体对第二层选项选择的解释变量产生的效用.

根据式(8), 需求点*i*选择己方设施点的概率为

$$P_{iI} = \frac{\exp(W_{iI} + \lambda_I I_{iI})}{\exp(W_{iI} + \lambda_I I_{iI}) + \exp(W_{iII} + \lambda_{II} I_{iII})}, \tag{16}$$

其中  $W_{iI}$ 、 $\lambda_I$ 、 $W_{iII}$ 、 $\lambda_{II}$  均为常量,  $I_{iI} = \ln \sum_{j \in C^I} \exp(Y_{iIj}/\lambda_I)$ ,  $I_{iII} = \ln \sum_{j \in C^{II}} \exp(Y_{iIIj}/\lambda_{II})$ .

根据式(1),  $Y_{iIj}$  为需求点*i*选择设施点*j*的效用可观测部分

$$Y_{iIj} = \beta_i \alpha_j^T + \beta_{id} d_{ij}. \tag{17}$$

设  $N_{i1} = \sum_{j \in C^I, j \neq j_0} \exp(Y_{iIj}/\lambda_I)$ ,  $N_{i2} = \exp\left(W_{iII} + \lambda_{II} \ln \sum_{j \in C^{II}} \exp(Y_{iIIj}/\lambda_{II}) - W_{iI}\right)$ ,  $N_{i1}$  及  $N_{i2}$  均为可观测常量计算出的数值, 则

$$P_{iI} = \frac{\exp(\lambda_I \ln(N_{i1} + \exp((\beta_i \alpha_0^T + \beta_{id} d_{i0})/\lambda_I)))}{\exp(\lambda_I \ln(N_{i1} + \exp((\beta_i \alpha_0^T + \beta_{id} d_{i0})/\lambda_I))) + N_{i2}}. \quad (18)$$

设置新设施点后, 己方设施点所获市场份额为

$$M(x_0, \alpha_0) = \sum_{i=1}^n w_i P_{iI}. \quad (19)$$

收益函数为<sup>[8]</sup>

$$\Pi(x_0, \alpha_0) = F(M(x_0, \alpha_0)) - G(x_0, \alpha_0), \quad (20)$$

其中  $F(\cdot)$  为严格递增可微函数, 基于己方设施点获得的市场份额来计算营业收入. 通常情况下,  $F(\cdot)$  为线性函数, 即

$$F(M(x_0, \alpha_0)) = cM(x_0, \alpha_0), \quad (21)$$

其中  $c$  为单位产品的销售收入.

$G(\cdot)$  同样为可微函数, 为新设施点在吸引力为  $\alpha_0$  时, 选址于  $x_0$  的总成本.  $G(\cdot)$  应包括与新设施点位置相关的选址建设成本, 以及与各项属性相关的长期运营成本,  $G(x_0, \alpha_0) = G_1(x_0) + G_2(\alpha_0)$ .

新设施点的选址建设成本为

$$G_1(x_0) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(d_{i0}) = \sum_{i=1}^n \varphi_{i3} [w_i / ((d_{i0})^{\varphi_{i1}} + \varphi_{i2})], \quad (22)$$

其中  $\varphi_{i1}$  为成本的距离敏感系数,  $\varphi_{i2}$ 、 $\varphi_{i3}$  为成本的修正系数.  $\varphi_0$  为建设成本上限,  $G_1(x_0) < \varphi_0$ ,  $\varphi_0, \varphi_{i1}, \varphi_{i2} > 0$ .

新设施点的运营维护成本, 则可表示为

$$G_2(\alpha_0) = \sum_{h=1}^k \Psi(\alpha_{0h}) = \sum_{h=1}^k \psi_{h3} \left( \frac{\alpha_{0h}}{\psi_{h1}} \right)^{\psi_{h2}}, \quad (23)$$

其中  $\psi_{h1}$  为属性  $h$  的基础值,  $\psi_{h2}$  为成本增速的修正系数,  $\psi_{h3}$  为  $h$  基础属性值下的相应成本.  $\psi_0$  为运营成本上限,  $G_2(\alpha_0) < \psi_0$ ,  $\psi_0, \psi_{h1}, \psi_{h2}, \psi_{h3} > 0$ .

此时, 利润最大化目标下, 基于嵌套Logit模型的连续多属性平面单点竞争性选址与设计问题可表述为

$$\begin{cases} \text{Max } \Pi(x_0, \alpha_0) = F(M(x_0, \alpha_0)) - G(x_0, \alpha_0) \\ \text{s.t. } \forall \alpha_{0h} \in \alpha_0, \alpha_{0h} \in [\alpha_{0h}^{\min}, \alpha_{0h}^{\max}] \\ G_1(x_0) < \varphi_0, G_2(\alpha_0) < \psi_0 \\ x_0 \in S \subset \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (24)$$

其中  $\alpha_{0h}^{\min}$  为新设施点  $h$  属性可取的下限值,  $\alpha_{0h}^{\max}$  为新设施点  $h$  属性可取的上限值.

## 5 模型求解

此模型的求解属于非凸优化问题, 通过数学解析的方式求解存在较高难度. 利用基于种群的元启发式算法, 在解空间内搜寻最优解是可行的方法. 但正如最优化理论中 Wolpert 和 Macready 提出的“无免费午餐定理”(No Free Lunch Theorem, NFL): 没有其它任何算法能够比搜索空间的线性列举或者纯随机搜索算法更

优. 因此, 结合目标函数性质, 通过数值实验比对并选取收敛速度快、稳定性高、存储消耗低的算法是非常有必要的. 本文通过大量的数值实验, 对比分析了GSA、CGSA、PSO-GSA算法表现, 最终选定PSO-GSA 算法作为本文的求解算法. 在此给出引力搜索算法 (gravitational search algorithm, GSA) 及PSO-GSA 的基本定义及运算步骤.

### 5.1 引力搜索算法

引力搜索算法最早在2009年由Rashedi提出, 是受万有引力定律而启发的、一种基于种群的元启发式算法<sup>[29]</sup>. 假定最优化问题存在 $m$ 个变量及目标函数 $f_{obj}$ , 变量 $x^d$ 均存在对应的上界 $x1^d$ 及下界 $xu^d$ , 变量的取值范围将构成问题的 $m$ 维可行域, 即算法的搜索空间

$$x1^d \leq x^d \leq xu^d, d = 1, 2, \dots, m. \tag{25}$$

GSA在解空间随机生成 $N$ 个物体, 第 $i$ 个物体在搜索空间的坐标为

$$\mathbf{X}_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m), i = 1, 2, \dots, N. \tag{26}$$

$t$ 时刻, 物体 $i$ 受到物体 $j$ 的引力为

$$F_{ij}^d(t) = G(t) \frac{M_{pi}(t) \times M_{aj}(t)}{R_{ij}(t) + \varepsilon} (x_j^d(t) - x_i^d(t)), \tag{27}$$

其中  $M_{pi}(t)$ ,  $M_{aj}(t)$ , 分别为物体 $i$ 的被动及主动质量, 由其目标函数值 $f_{obj}(t)$ 确定.  $\varepsilon$  为一个取值很小的常数,  $R_{ij}(t)$  为物体 $i$  与 $j$  之间的欧式距离,  $\|\cdot\|_2$  表示欧式范数, 即 $R_{ij}(t) = \|\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{X}_j(t)\|_2$ .  $G(t)$  为 $t$ 时刻引力常数.

物体 $i$ 在 $d$ 维所受到的合力, 为空间所有物体施加的引力加权之和, 图3展示了“可行解”向“物体”的转换, 以及合力的形成, 即

$$F_i^d(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \text{rand}_j F_{ij}^d(t), \tag{28}$$

其中  $\text{rand}_j$  为 $[0, 1]$ 区间的随机值.

$$x_i^d(t+1) = x_i^d(t) + v_i^d(t+1). \tag{29}$$

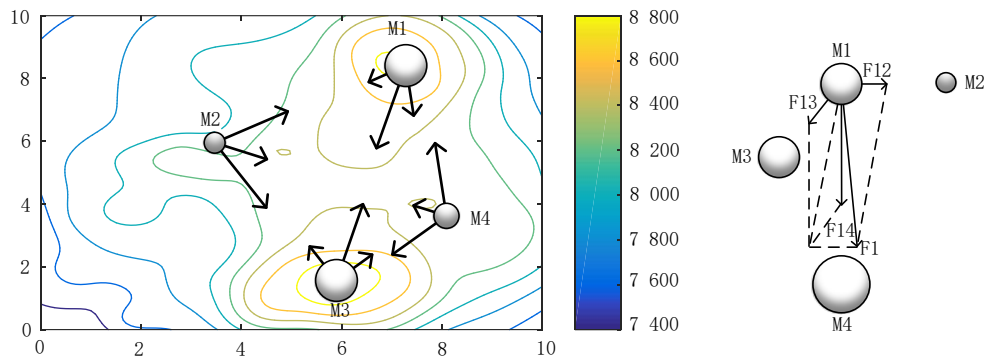


图3 将可行解转为“物体”

Fig. 3 Transform feasible solution to “object”

由经典力学可知, 物体 $i$ 于 $t$ 时刻在 $d$ 维的运动加速度为

$$a_i^d(t) = \frac{F_i^d(t)}{M_{ii}(t)}. \tag{30}$$

物体 $i$ 于 $t + 1$ 时刻速度 $v_i^d(t + 1)$ 为 $t$ 时刻速度与加速度的线性组合, 其速度与坐标按如下公式进行更新,



即

$$v_i^d(t+1) = \text{rand}_i v_i^d(t) + a_i^d(t), \quad (31)$$

GSA中引力常数 $G$ 、适应度函数 $\text{fit}_i(t)$ 、主动质量 $M_{ai}(t)$ 、被动质量 $M_{pi}(t)$ 以及惯性质量 $M_{ii}(t)$ 等参数的计算,可参见文献[29].

## 5.2 PSO-GSA算法

PSO-GSA(particle swarm optimization-gravitational search algorithm)算法最早由Seyedali于2010年提出,这种新型混合算法巧妙结合了PSO算法在“探索”与GSA在“开发”上的优势, Benchmark 测试表明, PSO-GSA有效降低GSA过早收敛并陷入局部最优解的概率. 关于PSO-GSA的原理可参见文献[30].

PSO-GSA主要基于PSO的粒子群移动改进了GSA算法中的速度更新方程为

$$V_i^d(t+1) = wV_i^d(t) + c_1 \text{rand}_i a_i^d(t) + c_2 \text{rand}(g\text{best} - X_i(t)), \quad (32)$$

其中  $V_i^d(t)$  为物体 $i$ 于 $t$ 时刻在 $d$ 维空间的速度分量,  $w, c_1, c_2$ 为权重值,  $\text{rand}$ 为取值 $[0, 1]$ 的随机量,  $a_i^d$ 为物体 $i$ 于 $t$ 时刻在 $d$ 维空间的加速度,  $X_i(t)$ 为空间坐标,  $g\text{best}$ 为 $t$ 时刻全局最优解.

虽然PSO-GSA对GSA并未做出更多修正,仅优化其速度更新方程,但是数值实验表明,针对本文构建的竞争性选址与设计优化问题, PSO-GSA在解的质量及收敛速度上有着更为优秀的表现.

## 6 数值实验

本章节主要通过数值实验,分析GSA、PSO-GSA、CGSA1-10算法的表现,为本文构建的CFDLP模型选择合适的解法. CGSA1-10是GSA的改进型算法,在此给出其基本定义及程序步骤.

### 6.1 混沌引力搜索算法

CGSA即混沌引力搜索算法(chaotic gravitational search algorithm, CGSA),是指将混沌算子(chaotic operator)引入GSA以增强全局搜索能力的一类算法. CGSA依照混沌算子嵌入位置及处理方式的不同而略有区别,本文参考Seyedali的研究<sup>[31]</sup>. Seyedali将10种混沌算子嵌入至GSA算法中引力常数 $G(t)$ 的计算,其基于基准函数的测试结果表明,CGSA8及CGSA9型相较于GSA有着较大提升. 鉴于尚不明确针对本文特定模型,何种混沌算子引入会有更佳表现,同时取所有CGSA1-10型算法与GSA及PSO-GSA进行对比,详情见表2.

表2 混沌算子  
Table 2 Chaotic operators

算法	混沌算子	公式
CGSA1	Chebyshev	$x_{i+1} = \cos(i \cos^{-1}(x_i))$
CGSA2	Circles	$x_{i+1} = \text{mod}(x_i + b - (\frac{a}{2\pi}) \sin(2\pi x_i), 1), a = 0.5, b = 0.2$
CGSA3	Gauss/mouse	$x_{i+1} = \begin{cases} 1, & x_i = 0 \\ \frac{1}{\text{mod}(x_i, 1)}, & \text{otherwise} \end{cases}$
CGSA4	Iterative	$x_{i+1} = \sin(\frac{a\pi}{x_i}), a = 0.7$
CGSA5	Logistic	$x_{i+1} = ax_i(1 - x_i), a = 4$
CGSA6	Piecewise	$x_{i+1} = \begin{cases} \frac{x_i}{P}, & 0 \leq x_i < P \\ \frac{x_i - P}{0.5 - P}, & P \leq x_i < 0.5 \\ \frac{1 - x_i - P}{0.5 - P}, & 0.5 \leq x_i < 1 - P \\ 1 - \frac{x_i}{P}, & 1 - P \leq x_i < 1 \end{cases}, P = 0.4$
CGSA7	Sine	$x_{i+1} = \frac{a}{4} \sin(\pi x_i), a = 4$
CGSA8	Singer	$x_{i+1} = \mu(7.86x_i - 23.32x_i^2 + 28.75x_i^3 - 13.302875x_i^4), \mu = 2.3$
CGSA9	Sinusoidal	$x_{i+1} = ax_i^2 \sin(\pi x_i), a = 2.3$
CGSA10	Tent	$x_{i+1} = \begin{cases} \frac{x_i}{0.7}, & x_i < 0.7 \\ \frac{10}{3}(1 - x_i), & x_i \geq 0.7 \end{cases}$

### 6.2 实验基本设定

本次数值实验参数包括算法参数及模型参数两部分. 算法参数: GSA, PSO-GSA, CGSA1-10中的种群数  $N = 50$ , 最大迭代次数  $\max\_it = 300$ , 引力常数中的  $G_0 = 100$ ,  $\alpha = 20$ ,  $\varepsilon = \text{eps}$ (eps为MATLAB中的最小正数), 所有算法采取Kbest 精英策略.

模型参数: 为提升本文研究结果适用性, 将模型参数设置为均匀分布, 并适当放宽模型参数的取值范围, 以尽可能覆盖现实中模型参数的可能取值, 详情见表3.

表3 模型参数分布  
Table 3 Distribution of model parameters

参数	$c$	$w_i$	$\lambda_I$	$N_{i1}$	$\beta_i$	$\beta_{id}$	$N_{i2}$
分布	$U \sim (80, 120)$	$U \sim (0, 5)$	$U \sim (0.5, 1)$	$U \sim (2, 5)$	$U \sim (0, 5)$	$U \sim (-5, 0)$	$U \sim (2, 5)$
参数	$\varphi_{i1}$	$\varphi_{i2}$	$\varphi_{i3}$	$\psi_{h1}$	$\psi_{h2}$	$\psi_{h3}$	$p_i$
分布	$U \sim (1, 6)$	$U \sim (1, 6)$	$U \sim (1, 6)$	$U \sim (1, 2)$	$U \sim (1, 2)$	$U \sim (1, 2)$	$U \sim (0, 100)$

所有算法均在MATLAB2016a上编写运行, 实验电脑处理器为Core(TM)i5-4200M, 主频2.5GHz, 内存为8GB.

模型的自变量为新设施点的坐标  $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ , 以及新设施点的属性  $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{05})$ , 待设计的设施点属性值限定为5个.

在给定模型参数分布下, 程序会自动生成1个算例, 由GSA, PSO-GSA, 以及CGSA1-10算法同时对此算例进行求解, 所有算法解得的最大值视为此算例最优解. 将此过程重复100次, 分别计算12种算法此100次仿真中的各项指标, 包括: 平均CPU运行时间(ACT)、平均计算误差(ARE)以及最大计算误差(MRE)、获得最优解的概率(NOS).

各项指标的计算方法如下:

- 1) ACT(average CPU time/s): 每100次仿真中, 算法首次获得最终解的平均运行时间, ACT 反映算法的收敛性能.
- 2) ARE(average relative error/%): 每100次仿真中, 算法输出最终解与该次仿真最优解的最大相对差值, ARE反映算法的搜索性能.
- 3) MRE(maximum relative error/%): 每100次仿真中, 算法输出最终解与本算例最优解的平均相对差值, MRE反映算法的稳定性能.
- 4) NOS(number of optimal solutions): 每100次仿真中, 算法获得该次仿真最优解的次数, NOS 反映算法获得最优解的能力.

每次仿真中, 算法的最终输出视为其最终解, 所有算法最终输出的最大值, 视为本次仿真的最优解.

此外, 考虑到需求点数量增加可能带来更多局部最优解, 并干扰算法搜寻全局最优解的进程. 本文在[20, 10 000]范围内调节需求点数量, 分析12种算法的各项指标表现是否稳定.

### 6.3 数值实验结果分析

不同算法获取最终解的平均CPU时间见表4.

表4 每100次仿真中最早获取最终解的平均时间/s  
Table 4 Average CPU time to get the final solution in every 100 simulations/s

需求点数量	GSA	PSO-GSA	CGSA1	CGSA2	CGSA3	CGSA4	CGSA5	CGSA6	CGSA7	CGSA8	CGSA9	CGSA10
20	0.85	0.77	0.86	0.85	0.88	0.83	0.85	0.78	0.85	0.96	0.84	0.93
60	0.78	1.2	0.83	0.76	0.81	0.78	0.75	0.77	0.71	0.77	0.7	0.83
100	1.26	1.77	1.25	1.16	1.11	1.29	1.38	1.32	1.17	1.24	1.21	1.24
200	2.14	2.71	2.3	2.06	2.18	1.98	1.92	2.14	2.09	2.05	2.15	1.97
300	2.8	3.77	2.75	2.79	2.79	2.97	2.78	2.78	2.82	2.72	2.67	2.69
500	3.48	4.74	3.43	3.26	3.44	3.25	3.42	3.6	3.52	3.69	3.49	3.62
1 000	4.95	6.75	5.13	4.98	5.41	5.16	5.04	4.94	4.99	5.21	5.08	4.84
3 000	21.59	26.3	20.84	20.88	19.94	19.78	20.43	21.5	20.29	20.95	22.68	20.1
10 000	63.5	73.52	59.53	62.23	60.78	59.7	60.65	59.49	57.7	59.09	65.49	60.91

12种算法的收敛速度都非常快,当需求点数量小于60时,所有算法均能在1 s内输出结果.即使需求点数量高达10 000,最大平均CPU时间也仅为73.52 s.因此,可以设想继续增加需求点数量、或模型变量,GSA、PSO-GSA、CGSA1-10算法均可在可负担时间内,给出模型解.相较于GSA及CGSA1-10,PSO-GSA总要耗费稍微更高的时间,来获取最终解.从图4中,可以看出此明显趋势.可能的原因是为避免早熟收敛,PSO-GSA耗费更长时间在可行域搜索,着重于解空间的“探索”.

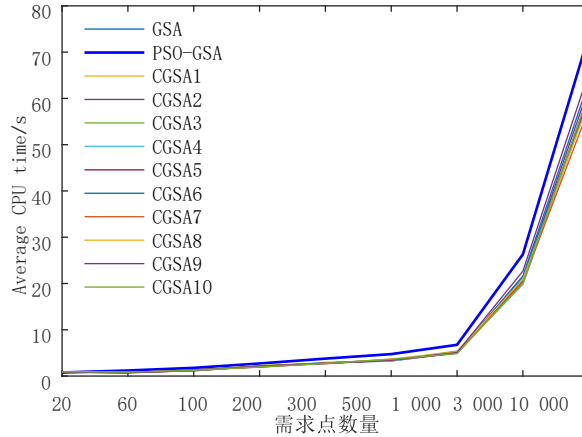


图4 平均CPU时间/s

Fig. 4 Average CPU time/s

表5为各个算法的最终解与最优解的平均相对误差.除PSO-GSA,随着需求点增多,其余11种算法的ARE逐渐降低.当需求点数量为20时,GSA及CGSA1-10的ARE指标在2%左右.当需求点数量增多时,不同算法的表现差异逐渐显现.在需求点数量小于1 000时,PSO-GSA该项指标保持领先,但领先程度不断降低,从最高的1.71%降至最低的0.03%.而当需求点数量为3 000及10 000时,PSO-GSA表现再无优势.

表5 每100次仿真中最终解与最优解的平均相对误差

Table 5 Average relative error between final solution and optimal solution in every 100 simulations

需求点数量	GSA	PSO-GSA	CGSA1	CGSA2	CGSA3	CGSA4	CGSA5	CGSA6	CGSA7	CGSA8	CGSA9	CGSA10
20	2.00%	0.89%	1.89%	1.81%	1.77%	1.93%	2.07%	1.84%	1.78%	2.07%	2.07%	1.72%
60	2.04%	0.33%	2.15%	2.21%	2.16%	2.26%	2.33%	2.34%	2.36%	2.31%	2.35%	2.27%
100	2.01%	0.37%	2.15%	2.24%	2.03%	2.04%	2.31%	1.93%	2.10%	2.27%	1.93%	2.13%
200	1.51%	0.75%	1.44%	1.46%	1.36%	1.54%	1.52%	1.42%	1.41%	1.31%	1.54%	1.55%
300	1.25%	0.67%	1.14%	1.20%	1.19%	1.13%	1.08%	1.25%	1.25%	1.08%	1.19%	1.22%
500	0.88%	0.80%	0.92%	0.92%	0.97%	0.85%	0.87%	0.89%	0.87%	0.86%	0.88%	0.97%
1 000	0.79%	0.62%	0.67%	0.68%	0.73%	0.69%	0.75%	0.71%	0.68%	0.65%	0.71%	0.76%
3 000	0.48%	0.76%	0.47%	0.50%	0.44%	0.52%	0.52%	0.52%	0.46%	0.49%	0.49%	0.50%
10 000	0.40%	0.79%	0.47%	0.45%	0.39%	0.42%	0.45%	0.45%	0.46%	0.43%	0.41%	0.37%

表6为最终解及最优解的最大相对误差.与ARE相似,当需求点数量小于1 000时,PSO-GSA该项指标的表现与GSA、CGSA1-10处于同一水平.且随着需求点增加,所有算法均呈现下降趋势,从最高的12%降至2.5%.而当需求点数量超过1 000时,PSO-GSA的MRE指标开始上升,GSA及CGSA1-10则继续下降.PSO-GSA算法此项指标的表现,表明当需求点数量超过1 000时,PSO-GSA的稳定性较弱,计算结果可能存在更高的相对误差.

表7为算法获得最优解的次数.事实上,这是本文更为关注的指标.在每100次仿真中,PSO-GSA在获得最优解的能力上有着压倒性的优势.当需求点的数量为20, 60, 100, 200, 300, 500和1 000时,PSO-GSA获得的最优解数量为53, 73, 62, 30, 28, 22和22.图5展现出PSO-GSA算法在此项指标上的优势.考虑到任

一种基于种群的启发式算法都有着较强的随机性, 机理相似的12种算法TGOS 项取值应近似均值8.3. PSO-GSA算法在与11种机理相似的算法对比时仍能取得如此好的表现, 表明其运行机理却有独到之处. 然而, PSO-GSA的此项优势依然受需求点数量的限制, 当需求点数量在[20, 300]区间内, 此优势最为明显. 需求点数量超出3 000时, PSO-GSA该项指标趋于平均水平8.3.

表 6 每100次仿真中最终解与最优解的最大相对误差  
Table 6 Maximum relative error between final solution and optimal solution in every 100 simulations

需求点数量	GSA	PSO-GSA	CGSA1	CGSA2	CGSA3	CGSA4	CGSA5	CGSA6	CGSA7	CGSA8	CGSA9	CGSA10
20	12.20%	11.51%	12.47%	12.22%	10.41%	11.82%	11.59%	11.08%	11.67%	12.47%	12.22%	11.54%
60	8.86%	5.29%	9.40%	6.87%	6.81%	7.72%	7.13%	7.21%	8.27%	7.11%	6.71%	6.87%
100	6.20%	2.98%	6.59%	7.18%	6.54%	7.34%	6.45%	6.68%	6.09%	6.52%	6.11%	6.53%
200	4.49%	4.08%	6.52%	4.71%	4.88%	4.38%	4.21%	4.66%	4.62%	3.94%	4.75%	4.37%
300	3.95%	3.75%	4.69%	4.06%	4.16%	3.74%	3.39%	4.56%	4.38%	4.12%	3.87%	4.84%
500	2.59%	3.05%	2.96%	3.45%	2.88%	2.54%	2.90%	3.04%	2.54%	2.76%	3.31%	3.09%
1 000	2.54%	2.57%	1.91%	2.00%	1.97%	2.78%	2.53%	2.10%	2.04%	2.49%	2.08%	2.86%
3 000	1.50%	2.97%	1.48%	1.59%	1.52%	1.43%	1.36%	1.75%	1.39%	1.36%	2.05%	1.52%
10 000	1.46%	4.55%	1.55%	1.41%	1.13%	1.27%	1.38%	1.69%	1.55%	1.52%	1.84%	1.69%

表 7 每100次仿真中获得最优解的次数  
Table 7 The number of optimal solution in every 100 simulations

需求点数量	GSA	PSO-GSA	CGSA1	CGSA2	CGSA3	CGSA4	CGSA5	CGSA6	CGSA7	CGSA8	CGSA9	CGSA10
20	5	53	10	9	5	10	6	6	13	8	9	9
60	3	73	5	5	2	3	1	4	2	2	1	2
100	2	62	4	3	6	5	3	3	1	4	5	3
200	4	30	2	5	10	8	4	10	8	9	6	4
300	8	28	7	9	5	4	6	11	3	6	4	9
500	7	22	2	6	5	11	7	4	8	8	15	5
1 000	4	22	8	6	5	5	10	4	10	12	8	6
3 000	10	14	6	9	10	5	6	3	7	7	11	12
10 000	10	7	5	5	10	7	7	7	5	11	8	18

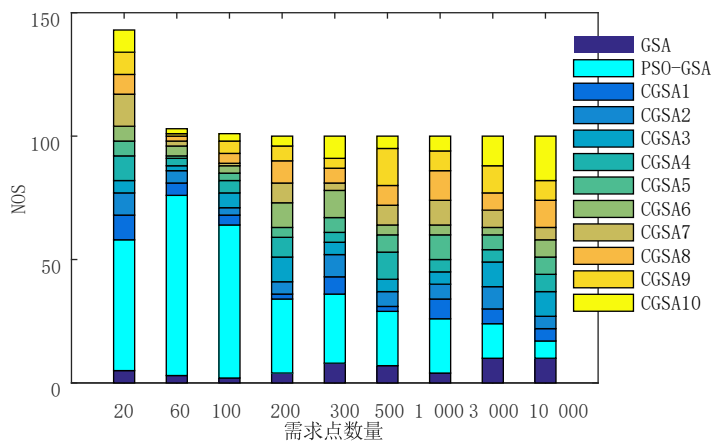


图 5 获得最优解的次数

Fig. 5 Number of obtaining optimal solutions

基于表4~表7实验数据, 作出如下结论:

CGSA1-10型算法的表现基本一致,基于10种混沌算子CGSA算法在ACT、ARE、MRE、NOS多项指标上的表现基本并无明显差别.相较于GSA算法,CGSA1-10型算法同样并无明显优势.因此,针对本文的特定模型,混沌算子的引入并未提升GSA的算法性能,两类算法表现相似.图6是GSA、PSO-GSA、CGSA的对比,在需求点数量为50时,将GSA与CGSA1-10型算法100次仿真迭代过程中获得的值取均值,并绘制成迭代曲线.从图6可得出,GSA与CGSA1-10算法的收敛速度、收敛方式以及最优解是基本一致的.

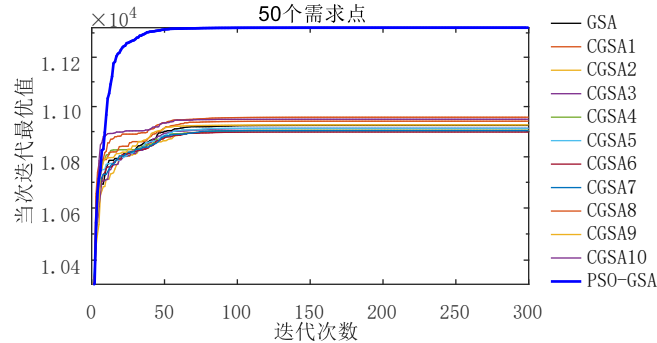


图6 GSA、CGSA1-10、PSO-GSA对比

Fig. 6 Comparison of CGSA1-10, GSA and PSO-GSA

而PSO-GSA的表现截然不同.如表7及图5所示,PSO-GSA算法的主要优势在于搜寻最优解的能力.图7是需求点数量为50时,PSO-GSA与GSA的性能对比,从中可以看出PSO-GSA的明显优势.然而,随着需求点数量增加,PSO-GSA的优势逐渐减弱.此外,当需求点数量超过3 000时,PSO-GSA的最大相对误差及平均相对误差,要略高于GSA及CGSA.

考虑到现实情况下,该模型计算的需求点数量超出1 000的可能极小.而PSO-GSA算法在[20, 1 000]区间内有着良好且稳定的表现.因此将其确定为本文CFLDP模型的求解方法.

PSO-GSA算法表现逐渐趋于平均水平的原因,应在于需求点的增多提升了解空间的混乱与无序,算法运行机理上的优势被越来越高的混乱度所掩盖,即使迭代完毕算法也无法有效覆盖解空间而易陷入局部最优解,表现出结果有着较强的随机性,这也是现有启发式算法的通病.因此,当使用PSO-GSA算法求解该模型时,仍应进行多次计算,或适当调高种群规模,以获得模型满意解.

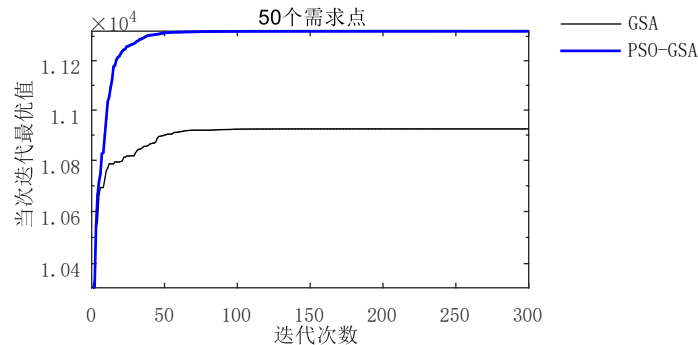


图7 GSA、PSO-GSA对比

Fig. 7 Comparison of GSA and PSO-GSA

## 7 结束语

现有的竞争性选址与设计问题研究多基于Huff重力模型,存在因IIA特性带来的概率估算偏差.本文引入离散选择理论中嵌套Logit模型来更新顾客的效用函数,将其选择行为划分为两个决策阶段,消除全选择集内选择项相关性带来的负面影响.基于Fernández的成本及收益函数<sup>[8]</sup>,本文构建了嵌套Logit效用

函数下、考虑顾客属性敏感系数的、设施点多个属性值为连续变量的竞争性选址与设计模型. 为选取求解模型的高效算法, 本文还测试了基于种群的启发式算法GSA及其两种改进算法CGSA1-10、PSO-GSA的性能, 数值实验表明三种算法有着相似的收敛速度, 而PSO-GSA有着更优秀的解空间搜索能力, 解的质量远优于GSA、CGSA1-10算法. 但当需求点数量超过3 000个, 问题复杂性上升时, PSO-GSA表现逐渐趋同于GSA、CGSA1-10, 优势逐渐变小, 但仍不失为本模型的一种优秀解法.

### 参考文献:

- [1] Laporte G, Nickel S, Gama F S D. *Location Science*. Berlin: Springer International Publishing, 2015.
- [2] Plastria F. Static competitive facility location: An overview of optimization approaches. *European Journal of Operational Research*, 2001, 129(3):461–470.
- [3] Hotelling H. Stability in competition. *Economic Journal*, 1929, 39(153): 41–57.
- [4] Reilly W J. The law of retail gravitation. *American Journal of Sociology*, 1931, 37(5): 826–828.
- [5] Huff D L. Defining and estimating a trade area. *Journal of Marketing*, 1964, 28(3): 34–40.
- [6] Nakanishi M. Parameter estimate for multiplicative interactive choice model: Least squares approach. *Journal of Marketing Research*, 1974, 11(3): 303–311.
- [7] Reville C. The maximum capture or “sphere of influence” location problem: Hotelling revisited on a network. *Journal of Regional Science*, 2010, 26(2): 343–358.
- [8] Fernández, J, Pelegrí B, Plastria, F, et al. Solving a Huff-like competitive location and design model for profit maximization in the plane. *European Journal of Operational Research*, 2007, 179(3): 1274–1287.
- [9] Abooliana R, Berman O, Krass D. Competitive facility location and design problem. *European Journal of Operational Research*, 2007, 182(1): 40–62.
- [10] Redondo J L, Fernández J, García I, et al. Sensitivity analysis of a continuous multifacility competitive location and design problem. *Top*, 2009, 17(2): 347.
- [11] Tóth B, Plastria F, Fernández J, et al. On the impact of spatial pattern, aggregation, and model parameters in planar Huff-type competitive location and design problems. *OR Spectrum*, 2009, 31(3): 601–627.
- [12] Plastria F. Sequential versus simultaneous approach in the location and design of two new facilities using planar Huff-like models. *Computers & Operations Research*, 2009, 36(5): 1393–1405.
- [13] Redondo J L, Fernández J, Hervás J D, et al. Approximating the Pareto-front of a planar bi-objective competitive facility location and design problem. *Computers & Operations Research*, 2015, (62): 337–349.
- [14] Arrondo A G, Fernández J, Redondo J L, et al. An approach for solving competitive location problems with variable demand using multicore systems. *Optimization Letters*, 2014, 8(2): 555–567.
- [15] Saidaniaba N. Competitive facility location and design with reactions of competitors already in the market. *European Journal of Operational Research*, 2012, 219(1): 9–17.
- [16] Arrondo A G, Redondo J L, Fernández J, et al. Solving a leader–follower facility problem via parallel evolutionary approaches. *Journal of Supercomputing*, 2014, 70(2): 600–611.
- [17] Kochetov Y, Sokolova I, Amirgaliyeva S, et al. Alternating Heuristic and Exact Method for the Leader-follower Facility Location and Design Problem. *Twelve International Conference on Electronics Computer and Computation*. IEEE, 2016: 1–3.
- [18] Lančinskas A, Ortigosa P M, Žilinskis J. Parallel shared-memory multi-objective stochastic search for competitive facility location. *European Conference on Parallel Processing*. Springer International Publishing, 2014: 71–82.
- [19] Hendrix E M T. On competition in a Stackelberg location-design model with deterministic supplier choice. *Annals of Operations Research*, 2016, 246(1): 19–30.
- [20] Sadjadi S J, Ashtiani M G, Ramezani R, et al. A firefly algorithm for solving competitive location-design problem: A case study. *Journal of Industrial Engineering International*, 2016, 12(4): 517–527.
- [21] Ashtiani M. Competitive location: A state-of-art review. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 2016, 7(1): 1–18.

- [22] Drezner T. A review of competitive facility location in the plane. *Logistics Research*, 2014, 7(1): 114.
- [23] McFadden, D. Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. *Frontiers in Econometric*, 1973, (2): 105–142.
- [24] McFadden, D. Modeling the choice of residential location. *Transportation Research Record*, 1978, (673): 72–77.
- [25] 聂冲, 贾生华. 离散选择模型的基本原理及其发展演进评介. *数量经济技术经济研究*, 2005, 22(11): 151–159.  
Nie C, Jia S H. Research on the theoretical basis and evolution of discrete choice models. *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, 2005, 22(11): 151–159. (in Chinese)
- [26] Kang C. A simulation method to estimate nonparametric distribution of heterogeneous consumer preference from market-level choice data. *Journal of Mechanical Design*, 2016, 138(12): 69–78.
- [27] Chipman J S. The foundations of utility. *Econometrica*, 1960, 28(2): 193–224.
- [28] Fernández J, Boglárka G, Redondo J L, et al. A planar single-facility competitive location and design problem under the multi-deterministic choice rule. *Computers & Operations Research*, 2017, (78): 305–315.
- [29] Rashedi E, Nezamabadipour H, Saryazdi S, et al. GSA: A gravitational search algorithm. *Information Sciences*, 2009, 179(13): 2232–2248.
- [30] Mirjalili S, Hashim S Z M. A new hybrid PSO-GSA algorithm for function optimization. *International Conference on Computer and Information Application*. IEEE, 2010: 374–377.
- [31] Rashedi E, Rashedi E, Nezamabadi-pour. A comprehensive survey on gravitational search algorithm. *Swarm & Evolutionary Computation*, 2018, 107(41): 141–158.

#### 作者简介:

李磊 (1959—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 博士, 教授, 研究方向: 物流管理与优化, 多准则决策, Email: lilei59@jiangnan.edu.cn;

张曙阳 (1996—), 男, 江苏宿迁人, 硕士, 研究方向: 物流管理与优化, Email: aniro@foxmail.com;

李彤 (1967—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 博士, 教授, 研究方向: 物流管理与优化, Email: litong@dlut.edu.cn.