PM2.5 污染扩散模型及适定性分析

杨　露, 高　伟, 杨海忠
(西安财经大学统计学院, 陕西 西安 710100)

摘要: 为了更好地解决日益严重的空气污染问题, 建立了三维 PM2.5 污染扩散模型. 运用位势井理论和 Garlerkin 逼近法获得了 PM2.5 浓度的变化规律, 并从理论上严格证明了 PM2.5 污染扩散模型解的适定性、爆破现象及渐进行为. 研究结果表明, PM2.5 遵循一定扩散规律. 若 PM2.5 初始浓度的梯度取平方可积函数空间的范数时存在给定上、下界, 则 PM2.5 浓度值将在有限范围内波动, 不会变化太大. PM2.5 浓度会随时间而缓慢降低. 若 PM2.5 初始浓度的梯度取平方可积函数空间的范数时存在给定上界, 则在之后的某时刻 PM2.5 将达到一个峰值, 形成恶劣雾霾天气.

关键词: 偏微分方程理论; 细颗粒物(PM2.5); 污染扩散规律; 适定性
中图分类号: X513; O175.2　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000−5781(2020)03−0301−14
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2020.03.002

Research on well-posedness of PM2.5 pollution diffusion model

Yang Lu, Gao Wei, Yang Haizhong
(Department of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China)

Abstract: In order to solve the increasingly serious air pollution problem, a three-dimensional PM2.5 pollution diffusion model is established under the theoretical framework of partial differential equation. Based on the potential well theory and Garlerkin approximation method, this paper obtains the variation rule of PM2.5. Moreover, the well-posedness and asymptotic behavior of solution to PM2.5 pollution diffusion model are studied. The results show that PM2.5 follows certain diffusion laws. When there are specific upper and lower bounds for the norm of the gradient of initial concentration of PM2.5, the concentration of PM2.5 will fluctuate within a limited range. As time goes by, the concentration of PM2.5 will gradually decrease. When there are specific upper bounds for the norm of the gradient of initial concentration of PM2.5, the concentration of PM2.5 will reach a peak value later, and form a bad haze weather.

Key words: partial differential equation theory; particulate matter (PM2.5); pollution diffusion laws; well-posedness

1　引　言

近年来, 国内经济快速腾飞, 工业化、城市化进程不断加剧, 随之而来的环境问题也日益凸显, 空气质量不断恶化, 尤其是 2013 年以来, 严重雾霾事件频发, 我国大部分地区遭遇持续性的雾霾天气[1,2]. 据中国气象局统计结果显示, 北京, 上海, 广州等大型城市雾霾污染日数逐渐增多, 且影响范围广. 雾霾是一种空气污染现象, 是对大气中各种悬浮颗粒物含量超标的综合表述, 其中突出表现为大气中的可入肺细颗粒

收稿日期: 2019−03−03; 修订日期: 2019−10−28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11601404).

物(PM2.5) 年均浓度远远超出国家二级标准规定的 35 μg/m^3[3,4]. 雾霾污染对人类健康造成恶劣影响[5−8], 易引起呼吸系统慢性疾病, 尤其是肺癌发病率大范围上升. Chen 等[9]指出我国淮河以北冬季燃煤供暖政策使当地空气中总悬浮颗粒浓度显著上升, PM2.5 每立方米浓度增加 10 μg, 导致当地居民较淮河以南居民的平均寿命减少 5.5 年, 总死亡率增加 4 %. 基于我国严重的雾霾现状, 研究 PM2.5 深层次的传播扩散规律对于雾霾治理具有重要意义, 缓解生存危机迫在眉睫. 建立有效预测 PM2.5 时空扩散分布的数学模型, 可以有针对性地对 PM2.5 进行预警和治理, 助力我国的雾霾治理工作.

目前已有许多学者研究雾霾预测问题. 常见的预测方法有: 人工智能机器学习算法(人工鱼群算法、萤火虫算法、遗传算法和神经网络等)和统计分析方法. 朱旭辉等[10] 融合人工鱼群算法和多重分形建立雾霾预测模型, 预测性能较优, 具有良好的稳定性和可信性, 但是人工鱼群算法在寻优区域较大时, 收敛到全局最优解的速度变慢, 搜索效率劣化; 程美英等[11]运用二元萤火虫算法对雾霾关键影响因素进行分析, 取得较稳定的实验结果, 但是萤火虫算法缺乏完备的数学理论基础, 易出现过早收敛, 陷入局部最优, 并且控制参数选取不合适会导致问题无法收敛; 宗晓萍等[12]基于遗传算法建立保定 PM2.5 浓度预测模型, 但该算法参数设置繁多, 编码复杂, 收敛速度较慢; Bai 等[13]提出了基于小波分析和 BP 神经网络的一种新型混合模型, 应用于 PM2.5 浓度预测, 虽然 BP 神经网络非线性分类能力较突出, 但收敛速度相对较慢, 易陷入局部最优; Pérez-Suárez 等[14]运用 Logistic 回归模型预测温室气体排放量, 以便采取应对措施; Mishra 等[15]使用了 BP 神经网络预测印度德里的 PM2.5 浓度; Reikard[16]基于 Logistic 回归和神经网络构建了夏威夷空气污染的预测模型, 并取得了良好的实际效果, 但是 Logistic 回归对多重共线性较为敏感, 需进行多重共线性检验.

实际问题中很多现象可以借助偏微分方程来建立数学模型, 目前偏微分方程被广泛应用于金融[17−20]、人口发展[21]、航空航天[22]及石油开发[23,24]等领域. 林建伟等[17]通过偏微分方程方法建立公司债券和股票价值定价的连续数学模型, 获得了策略债务支付息票数额的解析表达式; 李蓬实等[18]在随机波动率框架下, 通过对均值回归随机波动模型的偏微分方程进行分析得到两种路径依赖期权的近似解析解; 梁进等[19]研究具信用等级迁移风险的可违约和可赎回的公司债券定价问题, 导出迁移边界耦合的偏微分方程组, 分析了信用等级迁移对债券价格的影响; 江良等[20]基于债券数据利用正则化方法给出了均值函数随机偏微分方程模型的参数估计, 考虑不同期限结构的利率模型对可转换债券价格的影响; 陶涛等[21]基于中国人口宏观统计数据, 使用回归分析及偏微分方程方法, 预测了中国人口的结构变化及其对经济发展的影响; Ding[22]对扑翼机机翼系统进行动力学建模, 借助由偏微分方程和常微分方程所表示的系统函数和边界条件推出系统的稳定性; 郑黎明等[23]基于波动采油技术背景, 对初始状态饱和渗流流体低渗岩土的四阶常(变)系数非线性偏微分方程进行了半解析求解, 得到关于 Laplace 变换域内的流体位移通解; Mlayeh 等[24] 通过二阶双曲偏微分方程建立油田钻井系统的钻杆模型, 证实了所提出基于偏微分方程的观测控制器的有效性.

在环境污染领域偏微分方程也发挥着重要作用. Karatson[25]等对空气污染模式下污染物的抛物型输运系统进行建模, 提出针对该模型的一种条件迭代求解机制, 并取得较好的数值模拟结果; 蒋雪峰等[26]建立多元线性回归方程模型以及偏微分方程模型研究 PM2.5 时空分布及演变规律, 提出空气质量控制管理的治理计划; 王浅宁[27]提出一种基于随机微分方程的重度污染区域河流水质检测方法, 实验结果表明, 所提方法可以准确地对重度污染区域中的河流水质进行检测; Nurgali 等[28]提供了一种在紧急情况下模拟大气表层危险排放物扩散的原始方法, 基于污染物扩散的稳态方程预测地面上方两米层的污染物浓度水平.

综上所述, 偏微分方程理论在处理环境污染问题时具有较大优势, 并取得了显著效果. 但也存在以下局限: 一是现有文献大都采用低阶偏微分方程宏观地分析污染物扩散与分布规律,忽略了微观粒子间的相互作用; 二是已有研究成果直接采用实证分析或数值模拟方法验证污染物传播特征及空间分布规律, 并没有对偏微分方程模型进行深入的理论分析, 无法验证模型的适应性.

基于此, 本文提出拟抛物方程模拟污染物扩散过程, 与以往研究相比, 创新点主要体现在: 第一, 分析了雾霾污染物的内在传播规律, 建立 PM2.5 污染扩散模型, 利用初始条件和边界条件研究解的适定性、渐进行为和爆破性质. 第二, 在 PM2.5 污染扩散模型中加入能反映雾霾粒子之间相互作用(粘性效应)的粘性项, 为

研究 PM2.5 的时空分布及扩散规律等提供严谨的理论依据.

通过研究 PM2.5 污染扩散模型解的适定性和渐进行为, 得到当 PM2.5 初始浓度的梯度取 L^2范数时存在特定上、下界, 则 PM2.5 浓度值将在有限范围内波动, 不会变化太大, 并且 PM2.5 的浓度会随时间而慢慢降低, 当时间持续到一定程度时, PM2.5 浓度将持续下降, 理想状态下会趋于 0; 通过研究 PM2.5 污染扩散模型解的爆破性质, 得到当 PM2.5 初始浓度的梯度取 L^2 范数时存在特定上界, 在之后的某时刻 PM2.5 将达到一个峰值, 形成恶劣雾霾天气. 这将为我国重污染天气监测、预警和发展机制提供理论方法及应对措施.

2　PM2.5 污染扩散模型

2.1　符号说明

PM2.5 污染扩散模型是用于描述雾霾分子分布扩散规律的, 因实际空气污染问题处于三维空间, 故需要通过具有某些特性的度量空间来表征 PM2.5 的传播规律. 为进一步明晰本文研究内容, 将涉及的参数和符号在表 1 中进行说明.

表 1　参数与符号的说明

Table 1　Description of parameters and symbols

符号	含义
Ω	$\mathbb{R}^n$ 中带有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 这里指雾霾天气所处的空间区域
∇	梯度, 即若 $f=f(x,y,z)$, 则 $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$
Δ	拉普拉斯算子, 即若 $f=f(x,y,z)$, 则 $\Delta f=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$
$\\|\cdot\\|_q$	Banach 空间 $L^q(\Omega)$ 中的范数, 即 $\\|f\\|_q=\left(\int_\Omega \|f\|^q dx\right)^{1/q}$
$\\|\cdot\\|_{H_0^1}$	Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数, 即 $\\|f\\|_{H_0^1}^2=\\|f\\|_2^2+\\|\nabla f\\|_2^2$
f_t	对时间变量的一阶偏导数
u	PM2.5 污染扩散模型的弱解, 即 PM2.5 浓度
T	PM2.5 污染扩散模型弱解的最大存在时间

2.2　模型的假设及建立

为了更加真实地模拟雾霾污染的扩散分布规律, 考虑 PM2.5 空间分布及传播对大气污染的影响, 建立 PM2.5 污染扩散模型

$$u_t(x,t)-\Delta u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=u^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y,\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T]. \tag{1}$$

假设任取三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中任一闭曲面 S 所围的区域为 Ω, 并且 Ω 带有光滑边界 $\partial\Omega$. 考虑 Ω 内 PM2.5 浓度随时间扩散演变情况. 这里 $u(x,t)$为不同位置点 $x\in\Omega$ 在 t 时刻 PM2.5 的浓度, 函数 $-\Delta u$ 度量区域 Ω 内 PM2.5 扩散速率, 即 PM2.5 从高浓度区向低浓度区的流动速率. 三阶导数项 Δu_t 是由雾霾粒子之间的相互作用引起的粘性效应.

假设雾霾污染源在 $t=0$, 且为瞬时点源, 提出初值条件

$$u(x,0)=u_0(x)\in H_0^1(\Omega),\qquad x\in\Omega. \tag{2}$$

假设雾霾在研究区域的边界处浓度衰减为零, 提出边值条件

$$u(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]. \tag{3}$$

方程(1)右端非线性项中指数 p 满足

$$0<p\leqslant 2, \tag{4}$$

$k:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ 表示可积的实值函数, 满足以下条件

$$\begin{cases}\int_\Omega\int_\Omega k^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,\ \ k(x,y)=k(y,x)\\ \int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.\end{cases}\tag{5}$$

下面将主要利用偏微分方程相关理论方法——位势井方法研究带有初边值条件的 PM2.5 污染扩散模型(1)对应弱解的性质, 进而探索 PM2.5 浓度在所研究区域的分布变化规律. 接下来介绍位势井方法涉及的一些泛函记号.

首先定义 PM2.5 污染扩散模型(1)对应的雾霾系统的能量泛函 J: $H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$,

$$J(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-\frac{1}{2p+2}\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{6}$$

和 Nehari 泛函 I: $H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$,

$$I(u)=\|\nabla u\|_2^2-\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{7}$$

其次, PM2.5 污染扩散模型(1)所有非平凡稳态解均包含在 Nehari 区域

$$\mathcal{N}=\{u\in H_0^1(\Omega)|I(u)=0,\|u\|_{H_0^1}\neq0\}.$$

结合模型(1), 引入经典位势井的井内空间表达式

$$W=\{u\in H_0^1(\Omega)|I(u)>0,J(u)<d\}\cup\{0\},$$

和位势井的井外空间表达式

$$V=\{u\in H_0^1(\Omega)|I(u)<0,J(u)<d\}.$$

定义位势井深度

$$d=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\sup_{\lambda\geqslant0}J(\lambda u)=\inf_{u\in\mathcal{N}}J(u).\tag{8}$$

通常情况下, 偏微分方程的解可分为经典解和广义解. PM2.5 污染扩散模型(1)的解是指弱解, 它属于广义解的范畴, 是利用格林公式通过积分恒等式来定义.

下面给出 PM2.5 污染扩散模型式(1)～式(3)的弱解定义.

定义 1 函数 $u=u(x,t)$ 称为 PM2.5 污染扩散模型式(1)～式(3)在 $\Omega\times[0,T)$上的弱解, 若 $u(x,t)\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u_t(x,t)\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, 并且在积分意义下满足以下恒等式

$$(u_t,v)+(\nabla u_t,\nabla v)+(\nabla u,\nabla v)=\left(u^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y,v\right),\tag{9}$$

对 $\forall v(x)\in H_0^1(\Omega),t\in(0,T)$ 均成立.

下面给出 PM2.5 污染扩散模型式(1)～式(3)的弱解在有限时间爆破的定义.

定义 2 令 $u(x,t)$为 PM2.5 污染扩散模型式(1)～式(3)的弱解. 若 $u(x,t)$的最大存在时间 T 是有限的, 且 $\lim\limits_{t\to T^-}\int_0^T\|u(x,t)\|_{H_0^1}^2\mathrm{d}t=\infty$, 则称 $u(x,t)$在有限时间爆破.

定义 2 说明当 PM2.5 污染扩散模型的解在有限时间 $t=t_0$ 爆破时, PM2.5 浓度在 $t=t_0$ 时刻达到一个峰值, 此时可认为研究区域出现了恶劣雾霾天气.

3 位势井理论

在求解一些偏微分方程时, 如果通过能量方法无法计算出该方程解的先验估计, 那么就得不到解的全局存在性. 由 Sattinger[29] 在 1968 年提出的位势井方法解决了负能量情形下偏微分方程解的全局存在性问题(负能量情形下无法得到解的先验估计). 此后, 位势井方法成为研究非线性发展方程解的全局存在性的一

个有力、高效的手段, 而被学者们广泛改进和应用.

3.1　位势井族

首先给出位势井 W 和泛函 $J(u), I(u)$的一些性质.

引理 1　对于任意 $u=u(x,t)\in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla u\|_2^2\neq 0$, 有

1) $\lim\limits_{\lambda\to 0}J(\lambda u)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to +\infty}J(\lambda u)=-\infty$.

2) 当 $0<\lambda<\infty$ 时, 存在唯一的 $\lambda=\lambda^*$, 使得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u)|_{\lambda=\lambda^*}=0$.

3) 当 $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$ 时, $J(\lambda u)$ 递增; 当 $\lambda^*\leqslant\lambda\leqslant\infty$ 时, $J(\lambda u)$ 递减; 在 $\lambda=\lambda^*$ 时, $J(\lambda u)$取得最大值.

4) 当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时, $I(\lambda u)>0$; 当 $\lambda^*<\lambda<\infty$ 时, $I(\lambda u)<0$, $I(\lambda^* u)=0$.

证明　1) 根据泛函 $J(u)$的定义 6 可知

$$J(\lambda u)=\frac{\lambda^2}{2}\|\nabla u\|_2^2-\frac{\lambda^{2p+2}}{2p+2}\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{10}$$

分别令 $\lambda\to 0$ 和 $\lambda\to\infty$, 对式(10)取极限可得结论 1).

2) 对式(10)求导计算得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u)=\lambda\left(\|\nabla u\|_2^2-\lambda^{2p}\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right), \tag{11}$$

进而根据 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u)=0\Rightarrow\lambda^*=\left(\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)^{1/(2p)}$, 可得结论 2).

3) 对式(11)进行分析, 结合导函数和单调性的联系, 可得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u)\geqslant 0\Rightarrow J(\lambda u)\text{递增}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u)\leqslant 0\Rightarrow J(\lambda u)\text{递减},\end{cases}$$

计算 λ 的取值范围, 可得结论 3).

4) 由泛函 $I(u)$的定义 7 可知

$$I(\lambda u)=\lambda^2\|\nabla u\|_2^2-\lambda^{2p+2}\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u),$$

对式中 $I(\lambda u)$和 $J(\lambda u)$的关系进行分析, 结合结论 3)可得结论 4).　　证毕.

引理 1 给出能量泛函 $J(\lambda u)$的极限性质和单调性以及 Nehari 泛函 $I(\lambda u)$的取值情况. 结合式(8)可知, 研究 $J(\lambda u)$的性质对于确定位势井深度值 d 有关键作用. 位势井深度值 d 是 PM2.5 污染扩散模型探索雾霾分布规律的重要数字指标. 由下面的定理 1、定理 2 和定理 3 可看出, 引理 1 是研究低初始能量和临界初始能量情形, 即初始能量函数 $J(u_0)\leqslant d$, PM2.5 的扩散传播规律的基础.

下面引入位势井族 W_δ和对应的井外集合 V_δ, 并结合模型(1)研究其一系列性质.

对于 $\delta>0$, 引入一族 Nehari 泛函

$$I_\delta(u)=\delta\|\nabla u(t)\|_2^2-\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

和 Nehari 流形

$$\mathcal{N}_\delta=\{u\in H_0^1(\Omega)|I_\delta(u)=0,\|u\|_{H_0^1}\neq 0\}.$$

给出位势井族 $W_\delta=\{u\in H_0^1(\Omega)|I_\delta(u)>0,J(u)<d(\delta)\}\cup\{0\}$ 和对应的井外集合 $V_\delta=\{u\in H_0^1(\Omega)|I_\delta(u)<0,J(u)<d(\delta)\}$.

针对位势井族, 定义新的位势井深度为

$$d(\delta)=\inf_{u\in\mathcal{N}_\delta}J(u). \tag{12}$$

在引入位势井族相关定义之后, 首先给出 Nehari 泛函族 $I_\delta(u)$的性质.

引理 2 令 $u(x,t)\in H_0^1(\Omega)$. 则

1) 若 $0<\|u\|_{H_0^1}<r(\delta)$, 那么 $I_\delta(u)>0$,

2) 若 $I_\delta(u)<0$, 那么 $\|u\|_{H_0^1}>r(\delta)$,

3) 若 $I_\delta(u)=0$, 则 $\|u\|_{H_0^1}=0$ 或 $\|u\|_{H_0^1}\geqslant r(\delta)$,

4) 若 $I_\delta(u)=0$, $\|u\|_{H_0^1}\neq 0$, 那么当 $0<\delta<p+1$ 时, $J(u)>0$; 当 $\delta=p+1$ 时, $J(u)=0$, 当 $\delta>p+1$ 时, $J(u)<0$,

其中 $r(\delta)=\left(\dfrac{\delta}{\kappa C_*^{2p+2}}\right)^{\frac{1}{2p}}$, $\kappa=\left(\int_\Omega\int_\Omega k^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac12}<\infty$, C_* 是 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega))\hookrightarrow L^{2p+2}(\Omega)$的嵌入常数.

证明

1) 运用两次 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\leqslant\int_\Omega u^{p+1}(x,t)\left(\int_\Omega k^2(x,y)\mathrm{d}y\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega u^{2p+2}(y,t)\mathrm{d}y\right)^{\frac12}\mathrm{d}x\\&=\|u\|_{2p+2}^{p+1}\int_\Omega u^{p+1}(x,t)\left(\int_\Omega k^2(x,y)\mathrm{d}y\right)^{\frac12}\mathrm{d}x\\&\leqslant\|u\|_{2p+2}^{p+1}\left(\int_\Omega u^{2p+2}(x,t)\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega\int_\Omega k^2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\\&=\|u\|_{2p+2}^{2p+2}\left(\int_\Omega\int_\Omega k^2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac12}=\kappa\|u\|_{2p+2}^{2p+2}.\end{aligned}\tag{13}$$

由于 $0<\|u\|_{H_0^1}<r(\delta)$, 则 $\kappa\|u\|_{2p+2}^{2p+2}\leqslant\kappa C_*^{2p+2}\|u\|_{H_0^1}^{2p+2}<\delta\|\nabla u\|_2^2$, 由式(13)和 $I_\delta(u)$的定义, 可得结论.

2) 由于 $I_\delta(u)<0$, 则 $\|u\|_{H_0^1}\neq 0$. 由式(13)可得

$$\delta\|u\|_{H_0^1}^2=\delta\|\nabla u\|_2^2<\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\kappa\|u\|_{2p+2}^{2p+2}\leqslant\kappa C_*^{2p+2}\|u\|_{H_0^1}^{2p}\|u\|_{H_0^1}^2,$$

由上式可得 $\|u\|_{H_0^1}>r(\delta)$.

3) 若 $I_\delta(u)=0$, 且$\|u\|_{H_0^1}\neq 0$, 则由

$$\delta\|u\|_{H_0^1}^2=\delta\|\nabla u\|_2^2=\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\kappa\|u\|_{2p+2}^{2p+2}\leqslant\kappa C_*^{2p+2}\|u\|_{H_0^1}^{2p}\|u\|_{H_0^1}^2,$$

可得 $\|u\|_{H_0^1}\geqslant r(\delta)$.

4) 由$J(u)=\dfrac{1}{2p+2}I_\delta(u)+\dfrac{1}{2p+2}(p+1-\delta)\|\nabla u\|_2^2=\dfrac{1}{2p+2}I_\delta(u)+\dfrac{1}{2p+2}(p+1-\delta)\|u\|_{H_0^1}^2$ 可得结论. 证毕.

引理 2 给出 Nehari 泛函族 $I_\delta(u)$的一些性质. 由下面的定理 1、定理 2 和定理 3 研究结果可知, 当 $\delta=1, I_\delta(u_0)>0$ 时, 在所研究区域内 PM2.5 浓度值将在有限范围内波动, 不会变化太大; 当 $\delta=1, I_\delta(u_0)<0$ 时, 会出现较严重的雾霾污染, PM2.5 浓度值将远超国家相关标准, 广泛影响社会生活和人类健康. 因此, 研究泛函族 $I_\delta(u)$的性质对于预判是否出现恶劣雾霾天气起至关重要的作用.

下面给出新位势井深度 $d(\delta)$的性质, 并揭示 $d(\delta)$与 d 之间的内在联系.

引理 3 对于式(12)定义的 $d(\delta)$, 有

1) 当 $0<\delta<p+1$ 时, $d(\delta)\geqslant\left(\dfrac12-\dfrac{\delta}{2p+2}\right)r^2(\delta)$;

2) $\lim\limits_{\delta\to 0}d(\delta)=0$; $d(p+1)=0$; 当 $\delta>p+1$ 时, $d(\delta)<0$;

3) $d(\delta)$在区间 $0\leqslant\delta\leqslant 1$ 上严格递增, 在区间 $1\leqslant\delta\leqslant p+1$ 上严格递减, 在 $\delta=1$ 时取得最大值 $d=d(1)$.

证明

1) 若 $u\in\mathcal{N}_\delta$, 即 $I_\delta(u)=0$, $\|\nabla u\|_2^2\neq 0$, 则由引理 2 得 $\|u\|_{H_0^1}\geqslant r(\delta)$.

因此由

$$J(u)=\frac{1}{2p+2}I_\delta(u)+\frac{1}{2p+2}(p+1-\delta)\|\nabla u\|_2^2\geqslant\frac{1}{2p+2}(p+1-\delta)r^2(\delta)$$

得到 $d(\delta)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2p+2}\right)r^2(\delta), 0<\delta<p+1$.

2) 由条件(5)知, 对任意 $u\in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{H_0^1}\neq 0$, 且任意 $\delta>0$, 可定义唯一的

$$\lambda=\lambda(\delta)=\left(\frac{\delta\|u\|_{H_0^1}^2}{\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)^{1/2p},\tag{14}$$

使得 $I_\delta(\lambda u)=0$. 则 $\lambda u\in\mathcal{N}_\delta$, 并且 $\lim\limits_{\delta\to 0}\lambda(\delta)=0$.

由引理 1 得到 $\lim\limits_{\delta\to 0}J(\lambda u)=\lim\limits_{\lambda\to 0}J(\lambda u)=0$, $\lim\limits_{\delta\to 0}d(\delta)=0$. 进一步由引理 2 的结论 4), 可得到结论.

3) 要证明 $d(\delta)$的单调性, 只需证明对任意 $0<\delta'<\delta''<1$ 或 $1<\delta''<\delta'<b$, 及任意 $u\in\mathcal{N}_{\delta''}$, 存在一个 $v\in\mathcal{N}_{\delta'}$ 和常数 $\varepsilon(\delta',\delta'')>0$, 使得 $J(v)<J(u)-\varepsilon(\delta',\delta'')$. 事实上, 对上述 u, 可类似式(14)来定义 $\lambda(\delta)$, 那么 $I_\delta(\lambda(\delta)u)=0$, $\lambda(\delta'')=1$.

令 $g(\lambda)=J(\lambda(\delta)u)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left((1-\delta)\|\nabla(\lambda u)\|_2^2+I_\delta(\lambda u)\right)=(1-\delta)\lambda\|\nabla u\|_2^2,$$

取 $v=\lambda(\delta')u$, 则 $v\in\mathcal{N}_{\delta'}$.

若 $0<\delta'<\delta''<1$, 因函数 $\lambda(\delta)$关于 δ 递增, 则

$$\begin{aligned}J(u)-J(v)&=g(1)-g(\lambda(\delta'))=g(\lambda(\delta''))-g(\lambda(\delta'))=\int_{\lambda(\delta')}^{\lambda(\delta'')}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}g(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_{\lambda(\delta')}^{\lambda(\delta'')}(1-\delta)\lambda\|\nabla u\|_2^2\mathrm{d}\lambda\geqslant(1-\delta'')r^2(\delta'')\lambda(\delta')(1-\lambda(\delta'))\\&=\varepsilon(\delta',\delta'')>0.\end{aligned}$$

若 $1<\delta''<\delta'<b$, 则

$$J(u)-J(v)=\int_{\lambda(\delta')}^{\lambda(\delta'')}(1-\delta)\lambda\|\nabla u\|_2^2\mathrm{d}\lambda\geqslant(\delta''-1)r^2(\delta'')\lambda(\delta'')(\lambda(\delta')-1)=\varepsilon(\delta',\delta'')>0.$$ 证毕.

在引入位势井族 W_δ 和对应的井外集合 V_δ 后, 引理3给出新位势井深度 $d(\delta)$的极限性质和单调性, 以及与原位势井深度 d 的联系. 结合引理 1、引理 2 和引理 3 可知, PM2.5 初始时刻所具能量大小直接影响未来 PM2.5 的传播扩散情况. 以新位势井深度函数 $d(\delta)$的最大值作为衡量初始时刻雾霾系统具有能量大小的精确数字指标, 因此引理 3 为后续研究做好理论铺垫工作.

引理 4　若存在某 $u\in H_0^1(\Omega)$, 使得 $0<J(u)<d$. 假设 $\delta_1<\delta_2$ 是方程 $d(\delta)=J(u)$的两个根. 则在区间 $\delta_1<\delta<\delta_2$ 上, $I_\delta(u)$的符号不变.

证明　$J(u)>0$ 可推知 $\|\nabla u\|_2\neq 0$. 若在区间 $\delta_1<\delta<\delta_2$ 上, $I_\delta(u)$ 的符号是变化的, 那么存在 $\tilde{\delta}\in(\delta_1,\delta_2)$, 使得 $I_{\tilde{\delta}}(u)=0$.

因此, 由 $d(\delta)$的定义, 得到 $J(u)\geqslant d(\tilde{\delta})$, 这与 $J(u)=d(\delta_1)=d(\delta_2)<d(\tilde{\delta})$矛盾.　证毕.

引理 4 表明 PM2.5 具有低能量时, 其浓度在各个时间点始终保持相同的变化趋势.

3.2　不变集合

这部分将讨论某些集合在式(1)～式(3)下的不变性.

引理 5　令 p 满足式(4), $u_0\in H_0^1(\Omega)$. 假设 $0<e<d$, $\delta_1<\delta_2$ 是方程 $d(\delta)=e$ 的两个根. 若 $u=u(x,t)$ 是式(1)～式(3)的一个弱解, 满足 $J(u_0)=e$, 那么

1) 对任意 $\delta_1 < \delta < \delta_2, 0 \leqslant t < T$, 若 $I(u_0) > 0$, 则 $u \in W_\delta$;

2) 对任意 $\delta_1 < \delta < \delta_2, 0 \leqslant t < T$, 若 $I(u_0) < 0$, 则 $u \in V_\delta$.

证明

1) 由条件 $J(u_0) = e, I(u_0) > 0$ 和引理 4 可得, $I_\delta(u_0) > 0, J(u_0) = d(\delta_1) = d(\delta_2) < d(\delta)$. 则 $u_0 \in W_\delta$, $\delta_1 < \delta < \delta_2$.

在式(1)两边同时乘以 u_t, 并在区间 $\Omega \times [0, T]$上积分, 计算得到

$$\int_0^t \left(\|u_\tau\|_2^2 + \|\nabla u_\tau\|_2^2\right) \mathrm{d}\tau + J(u) = J(u_0) < d(\delta),\ \ t \in [0, T),\ \delta \in (\delta_1, \delta_2). \tag{15}$$

现在证明 $u(x,t) \in W_\delta$, $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, $0 < t < T$. 若不然, 假设存在一个$t_0 \in (0, T)$ 使得对于某$\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, 有 $u(x, t_0) \in \partial W_\delta$, 那么有 $I_\delta(u(t_0)) = 0, \|\nabla u(t_0)\|_2 \neq 0$ 或者 $J(u(t_0)) = d(\delta)$.

由式(15)可知, $J(u(t_0)) = d(\delta)$ 不成立, 于是 $I_\delta(u(t_0)) = 0$ 及 $\|\nabla u(t_0)\|_2 \neq 0$. 然而, 由 $d(\delta)$的定义得到, $J(u(t_0)) \geqslant d(\delta)$, 这与式(15)矛盾.

2) 令 $u = u(x,t)$ 是式(1)~式(3)满足 $J(u_0) = e$, $I(u_0) < 0$ 的弱解. 由条件 $J(u_0) = e, I(u_0) < 0$ 和引理 4, 得到 $I_\delta(u_0) < 0, J(u_0) < d(\delta)$. 即 $u_0 \in V_\delta$,$\delta_1 < \delta < \delta_2$.

接下来证明 $u(x,t) \in V_\delta$, 其中 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, $0 < t < T$. 若不然, 令 $t_0 \in (0, T)$是使得 $u(x,t) \in V_\delta$, $0 \leqslant t < t_0, u(x, t_0) \in \partial V_\delta$ 成立的第一个时间点, 即对于某 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, 有$I_\delta(u(t_0)) = 0$, 或 $J(u(t_0)) = d(\delta)$.

式(15)表明 $J(u(t_0)) = d(\delta)$ 不成立. 若 $I_\delta(u(t_0)) = 0$, $I_\delta(u(t)) < 0$, 其中 $0 < t < t_0$, 则引理 2 表明 $\|u\|_{H_0^1} \geqslant r(\delta), 0 < t \leqslant t_0$. 因此, 由 $d(\delta)$定义知, $J(u(t_0)) \geqslant d(\delta)$, 这与式(15)矛盾. 这证明了 $u(x,t) \in V_\delta$, $t \in [0, T), \delta \in (\delta_1, \delta_2)$. 证毕.

引理 5 说明初始能量低于位势井深度($J(u_0) < d$)时问题(1)-(3)的流之下的位势井和井外集合的不变性. 结合位势井和井外集合的定义可知, 在初始能量低于位势井深度时, 若 $u_0 \in W$, 则所有弱解 $u \in W$; 若 $u_0 \in V$, 则所有弱解 $u \in V$. 引理 5 揭示了 PM2.5 初始浓度对其扩散分布行为的影响规律, 表明之后一段时间 PM2.5 呈现出与其初始时刻大致相同的浓度分布特征.

4 PM2.5 污染扩散模型的适定性分析

在这部分主要利用位势井方法求解式(1)~式(3), 所得主要结论呈现如下: 定理 1 运用经典偏微分方程方法(Galerkin 逼近法)研究式(1)~式(3)在初始能量小于等于位势井深度($J(u_0) \leqslant d$)时弱解的全局存在性.

定理 1 设式(4)和式(5)成立, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

1) 若 $J(u_0) < d$, $I(u_0) > 0$, 则式(1)~式(3)存在一个全局弱解 $u(x,t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, 并且满足 $u_t(x,t) \in L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega)), u(x,t) \in W, 0 \leqslant t < \infty$;

2) 若 $J(u_0) = d$, $I(u_0) \geqslant 0$, 则式(1)~式(3)存在一个全局弱解 $u(x,t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, 并且满足 $u_t(x,t) \in L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega)), u(x,t) \in \overline{W} = W \cup \partial W, 0 \leqslant t < \infty$.

证明 1) 首先证明低能量情形 $J(u_0) < d$ 下的全局弱解存在性.

假设$\{\omega_j(x)\}$是 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$的标准正交基, 构造式(1)~式(3)如下形式的逼近解

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^m g_j(t)\omega_j(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

并在积分形式下满足方程(1)和初始条件

$$(u_{mt}, \omega_s) + (\nabla u_{mt}, \nabla \omega_s) + (\nabla u_m, \nabla \omega_s) = \left(u_m^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u_m^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y, \omega_s\right),\ s = 1, 2, \dots, m \tag{16}$$

$$u_m(x,0)=\sum_{j=1}^{m}a_j\omega_j(x)\to u_0(x)\quad\in\ H_0^1(\Omega). \tag{17}$$

式(16)两边同时乘以 $g_s'(t)$, 关于 s 求和, 再关于变量 t 在区间$[0,t)$积分, 计算可得

$$\int_0^t\left(\|u_{m\tau}\|_2^2+\|\nabla u_{m\tau}\|_2^2\right)\mathrm{d}\tau+J(u_m(t))=J(u_m(0))<d, \tag{18}$$

上式对于充分大的 m 和 $t\in[0,T)$均成立.

接下来证明对于充分大的 m 和 $t\in[0,T)$, 有 $u_m(x,t)\in W$. 若不然, 则存在 $t_0\in(0,T)$ 使得 $u_m(x,t_0)\in\partial W$, 那么 $I(u_m(t_0))=0$, $\|\nabla u_m(t_0)\|_2\neq 0$ 或 $J(u_m(t_0))=d$.

由式(18)可知, $J(u_m(t_0))=d$ 不成立, 则有 $I(u_m(t_0))=0$, $\|\nabla u_m(t_0)\|_2\neq 0$. 然而根据 d 的定义, 可推知 $J(u_m(t_0))\geqslant d$, 这与式(18)矛盾. 即证得 $u_m(x,t)\in W$. 由式(18) 及 $J(u)$ 与 $I(u)$之间的关系式 $J(u_m)=\dfrac{1}{2p+2}I(u_m)+\dfrac{p}{2p+2}\|u_m\|_{H_0^1}^2$, 计算得

$$\int_0^t[\|u_{m\tau}\|_2^2+\|\nabla u_{m\tau}\|_2^2]\mathrm{d}\tau+\frac{p}{2p+2}\|u_m\|_{H_0^1}^2<d. \tag{19}$$

另一方面, 两次使用 Hölder 不等式, 其中 $q=\dfrac{2p+2}{2p+1}$, 得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left|u_m^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u_m^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y\right|^q\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_\Omega|u_m(x,t)|^{pq}\left(\int_\Omega|k(x,y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega|u_m(y,t)|^{2p+2}\mathrm{d}y\right)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\|u_m\|_{2p+2}^{q(p+1)}\left(\int_\Omega|u_m(x,t)|^{pq\frac{2p+1}{p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2p+1}}\left(\int_\Omega\left(\int_\Omega|k(x,y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{q}{2}\frac{2p+1}{p+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+1}{2p+1}}\\
&\leqslant\|u_m\|_{2p+2}^{2p+2}\left(\int_\Omega\int_\Omega|k(x,y)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+1}{2p+1}}\\
&=\|u_m\|_{2p+2}^{2p+2}\,\kappa^{\frac{2p+2}{2p+1}}\leqslant C_*^{2p+2}\|u_m\|_{H_0^1}^{2p+2}\,\kappa^{\frac{2p+2}{2p+1}},
\end{aligned}\tag{20}$$

这里 $\kappa=\left(\int_\Omega\int_\Omega k^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$, C_* 是 $H_0^1(\Omega))\hookrightarrow L^{2p+2}(\Omega)$的嵌入常数.

由式(19)和式(20)可知, 对于充分大的 m, 有

$$\|u_m\|_{H_0^1}^2<\frac{2(p+1)}{p}d, \tag{21}$$

$$\int_0^t\left(\|u_{m\tau}\|_2^2+\|\nabla u_{m\tau}\|_2^2\right)\mathrm{d}\tau<d, \tag{22}$$

$$\|u_m^p\int_\Omega k(x,y)u_m^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y\|_q^q\leqslant C_*^{2p+2}\left(\frac{2(p+1)}{p}d\right)^{p+1}\kappa^{\frac{2p+2}{2p+1}}. \tag{23}$$

由式(21)~式(23)可得, 存在 u 和$\{u_m\}$的一个子序列, 为简便起见, 该子序列仍记为$\{u_m\}$, 当 $m\to\infty$ 时, 有

$$u_m\xrightarrow{w^*}u\in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)),$$

$$u_{mt}\xrightarrow{w^*}u_t\in L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)),$$

$$u_m^p\int_\Omega k(x,y)u_m^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y\xrightarrow{w^*}u^p\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y\in L^\infty(0,\infty;L^q(\Omega)).$$

因此, 在式(16)中, 取极限 $m\to\infty$, 得

$$(u_t,\omega_s)+(\nabla u_t,\nabla\omega_s)+(\nabla u,\nabla\omega_s)=\left(u^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y,\omega_s\right).$$

进一步, 因$\{\omega_s\}, \forall s \geqslant 1$是空间 $H_0^1(\Omega)$的一组正交基, 则对于任意 $v \in H_0^1(\Omega), t \in (0,\infty)$, 由上式可得

$$(u_t, v) + (\nabla u_t, \nabla v) + (\nabla u, \nabla v) = \left(u^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y, v\right),$$

而且, 式(17)给出 $u(x,0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$. 由引理 5 得到 $u(x,t) \in W, t \in [0,\infty)$.

2) 现在证明临界初始能量情形 $J(u_0) = d$ 下弱解的全局存在性.

首先, $J(u_0) = d$ 表明 $\|u_0\|_{H_0^1} \neq 0$. 令 $\mu_m = 1 - \dfrac{1}{m}$, $u_{0m} = \mu_m u_0, m \geqslant 2$. 考虑以下模型

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u = u^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y,\ \ (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{24}$$

初始条件为

$$u(x,0) = u_{0m}(x),\ \ x \in \Omega, \tag{25}$$

边界条件为

$$u(x,t) = 0,\ \ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \tag{26}$$

由条件 $I(u_0) \geqslant 0$ 和引理 1, 得到 $\lambda^* = \lambda^*(u_0) \geqslant 1$. 继而, 可得 $I(u_{0m}) = I(\mu_m u_0) > 0$, $J(u_{0m}) = J(\mu_m u_0) < J(u_0) = d$. 由本定理结论 1)证明过程可知, 对于临界初始能量情形, 仍然可得到, 对于每一个 m, 模型式(24)~式(26)存在一个全局弱解 $u_m(x,t) \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$, 满足 $u_{mt}(x,t) \in L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega))$ 和 $u_m(x,t) \in W, 0 \leqslant t < \infty$; 同时对于所有 $v \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$(u_{mt}, v) + (\nabla u_{mt}, \nabla v) + (\nabla u_m, \nabla v) = \left(u_m^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u_m^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y, v\right),$$

$$\int_0^t \left(\|u_{m\tau}\|_2^2 + \|\nabla u_{m\tau}\|_2^2\right)\mathrm{d}\tau + J(u_m) = J(u_{0m}) < J(u_0) = d,\quad \forall t \in [0,\infty),$$

则对于临界初始能量情形, 亦可推出式(21), 式(22)和式(23). 接下来的证明过程同 1), 此处省略. 证毕.

定理 1 说明 PM2.5 浓度变化规律与其初始浓度有密切联系. 若 PM2.5 初始浓度满足一定限制条件, 即$\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u_0^{p+1}(x)u_0^{p+1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \|\nabla u_0\|_2^2 \leqslant \dfrac{2d(p+1)}{p}$, 则在所研究区域内 PM2.5 浓度值将在有限范围内波动, 不会变化太大, 并且随着时间的累积, PM2.5 浓度呈现出和其初始时刻相同的分布特征, 即在未来一段时间, PM2.5 浓度满足 $\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \|\nabla u\|_2^2 \leqslant \dfrac{2d(p+1)}{p}$.

根据定理 1 可知, 式(1)~式(3)不仅可以预测 PM2.5 浓度变化规律, 还为霾治理和预防工作提供了理论方法和有效应对措施, 可根据地区实际空气污染情况, 采用限制 PM2.5 初始浓度的方法使得 PM2.5 浓度达到当地环保部门的要求标准.

在偏微分方程应用中有很多热点问题. 其中最重要的问题之一是全局解的存在性, 定理 1 已经解决了该问题; 另外一个热门话题就是解的全局不存在性或有限时间爆破行为. 定理 2 运用位势井方法和凹函数方法建立模型式(1)~式(3)的爆破准则.

定理 2 设式(4)和式(5)成立, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. 假设 $J(u_0) \leqslant d$, $I(u_0) < 0$, 则模型式(1)~式(3)的弱解 $u(x,t)$ 在有限时间内爆破.

令 $u(x,t)$ 是模型式(1)~式(3)的任一弱解, 满足 $J(u_0) < d, I(u_0) < 0$. 定义

$$M(t) = \int_0^t \|u\|_{H_0^1}^2\mathrm{d}\tau,$$

则对$M(t)$分别求一阶导数和二阶导数得到$M'(t) = \|u\|_{H_0^1}^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2$, 和

$$\begin{aligned} M''(t) &= 2(u_t, u) + 2(\nabla u_t, \nabla u) \\ &= -2\left(\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(x,t)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \\ &= -2I(u). \end{aligned} \tag{27}$$

在式(1)两边同乘以 u_t, 并在区域 $\Omega\times[0,T]$上积分, 整理得

$$\int_0^t \left(\|u_\tau(x,\tau)\|_2^2+\|\nabla u_\tau(x,\tau)\|_2^2\right)\mathrm{d}\tau+J(u)=J(u_0). \tag{28}$$

由式(27), 式(28) 及 $J(u)$ 和 $I(u)$ 之间的关系式$J(u)=\dfrac{1}{2p+2}I(u)+\dfrac{p}{2p+2}\|u\|_{H_0^1}^2$, 得

$$M''(t)\geqslant 2pM'(t)+4(p+1)\int_0^t\|u_\tau\|_{H_0^1}^2\mathrm{d}\tau-4(p+1)J(u_0).$$

注意到运用积分和微分计算可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t(\nabla u_\tau,\nabla u)\mathrm{d}\tau\right)^2&=\left(\frac12\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\nabla u\|_2^2\mathrm{d}\tau\right)^2\\&=\frac14\left(\|\nabla u\|_2^4-2\|\nabla u_0\|_2^2\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u_0\|_2^4\right)\\&=\frac14\left((M'(t))^2-2\|\nabla u_0\|_2^2M'(t)+\|\nabla u_0\|_2^4\right),\end{aligned}$$

于是有$(M'(t))^2=4\left(\int_0^t(\nabla u_\tau,\nabla u)\mathrm{d}\tau\right)^2+2\|\nabla u_0\|_2^2M'(t)-\|\nabla u_0\|_2^4$. 那么

$$\begin{aligned}M(t)M''(t)-(p+1)(M'(t))^2\geqslant{}&4(p+1)\left(\int_0^t\|u_\tau\|_{H_0^1}^2\mathrm{d}\tau\int_0^t\|u\|_{H_0^1}^2\mathrm{d}\tau-(\int_0^t(\nabla u_\tau,\nabla u)\mathrm{d}\tau)^2\right)+\\&2pM(t)M'(t)-2(p+1)\|\nabla u_0\|_2^2M'(t)-4(p+1)J(u_0)M(t)\\\geqslant{}&4(p+1)\left(\int_0^t\|\nabla u_\tau\|_2^2\mathrm{d}\tau\int_0^t\|\nabla u\|_2^2\mathrm{d}\tau-(\int_0^t(\nabla u_\tau,\nabla u)\mathrm{d}\tau)^2\right)+\\&2pM(t)M'(t)-2(p+1)\|u_0\|_{H_0^1}^2M'(t)-4(p+1)J(u_0)M(t).\end{aligned}$$

利用 Schwartz 不等式得

$$\begin{aligned}M(t)M''(t)-(p+1)(M'(t))^2\geqslant{}&2pM(t)M'(t)-2(p+1)\|u_0\|_{H_0^1}^2M'(t)-\\&4(p+1)J(u_0)M(t).\end{aligned}\tag{29}$$

接下来, 需要分两种情况讨论.

1) 若 $J(u_0)\leqslant 0$, 则式(29)变为

$$M(t)M''(t)-(p+1)(M'(t))^2\geqslant 2pM(t)M'(t)-2(p+1)\|u_0\|_{H_0^1}^2M'(t).$$

现在证明对所有 $t>0$, 有 $I(u)<0$. 否则, 存在 $t_0>0$, 使得 $I(u(t_0))=0$, 对于 $0\leqslant t<t_0$, $I(u)<0$. 由引理 2 可得, 当 $0\leqslant t<t_0$ 时, $\|u\|_{H_0^1}>r(1)$, 且 $\|u(t_0)\|_{H_0^1}\geqslant r(1)$, $J(u(t_0))\geqslant d$, 这与式(15)矛盾. 由式(27)可得 $M''(t)>0$, $t>0$. 因 $M'(0)=\|u_0\|_{H_0^1}^2\geqslant 0$, 则存在 $t_1>0$, 使得 $M'(t_1)>0$. 对于 $t\geqslant t_1$, 有

$$M(t)\geqslant M(t_1)+M'(t_1)(t-t_1)\geqslant M'(t_1)(t-t_1).$$

因此, 对于充分大的 t, 有 $2pM(t)>2(p+1)\|u_0\|_{H_0^1}^2$, 则$M(t)M''(t)-(p+1)(M'(t))^2>0$.

2) 若 $0<J(u_0)<d$, 则由引理 5 得到 $u(x,t)\in V_\delta$, $1<\delta<\delta_2$, $t\geqslant 0$, 这里 δ_2 是方程 $d(\delta)=J(u_0)$的较大根. 于是推出当 $1<\delta<\delta_2$, $t\geqslant 0$ 时, $I_\delta(u)<0$, $\|u\|_{H_0^1}>r(\delta)$. 因此, 对于 $t\geqslant 0$, 有 $I_{\delta_2}(u)\leqslant 0$, $\|u\|_{H_0^1}\geqslant r(\delta_2)$.

由式(27)可知

$$\begin{aligned}M''(t)&=-2I(u)\\&=2(\delta_2-1)\|u\|_{H_0^1}^2-2I_{\delta_2}(u)\geqslant 2(\delta_2-1)\|u\|_{H_0^1}^2\geqslant 2(\delta_2-1)r^2(\delta_2),\quad t\geqslant 0.\end{aligned}$$

进一步对上式关于时间 t 积分得到

$$M'(t) \geqslant 2(\delta_2-1)r^2(\delta_2)t + M'(0) \geqslant 2(\delta_2-1)r^2(\delta_2)t, \qquad t \geqslant 0,$$

$$M(t) \geqslant (\delta_2-1)r^2(\delta_2)t^2,\ \ t \geqslant 0.$$

因此, 对于充分大的 t, 有 $pM(t) > 2(p+1)\|u_0\|^2_{H^1_0}$, $pM'(t) > 4(p+1)J(u_0)$.

那么, 借助式(29), 可得

$$\begin{aligned} &M(t)M''(t) - (p+1)(M'(t))^2 \geqslant \\ &\qquad 2pM(t)M'(t) - 2(p+1)\|u_0\|^2_{H^1_0}M'(t) - 4(p+1)J(u_0)M(t) \\ &= \left(pM(t) - 2(p+1)\|u_0\|^2_{H^1_0}\right)M'(t) + \left(pM'(t) - 4(p+1)J(u_0)\right)M(t) > 0. \end{aligned}$$

上述两种情况均得到 $(M^{-p}(t))'' = \dfrac{-p}{M^{p+2}}\left(M(t)M''(t) - (p+1)(M'(t))^2\right) \leqslant 0$.

综上所述, 存在 $T_1 > 0$, 使得 $\lim\limits_{t\to T_1} M^{-p}(t) = 0$ 及 $\lim\limits_{t\to T_1} M(t) = \infty$. 由定义 2, 即证明得到低初始能量情形 $J(u_0) < d$ 下弱解的有限时间爆破性质. 临界初始能量情形 $J(u_0) = d$ 时弱解有限时间爆破性质的证明与$J(u_0) < d$情形类似, 此处略去. 证毕.

定理 2 说明 PM2.5 初始浓度对严重雾霾天气的出现有至关重要的影响. 根据定理 2 可推知, 当初始时刻 PM2.5 浓度值满足条件

$$\|\nabla u_0\|_2^2 < \min\left\{\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u_0^{p+1}(x)u_0^{p+1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, 2d + \frac{1}{p+1}\int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u_0^{p+1}(x)u_0^{p+1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$$

时, 在之后的某时刻 PM2.5 将达到一个峰值, 形成极端雾霾天气. 结合定理 1 和定理 2 可得, $I(u_0)$与 0 的大小关系成为是否出现恶劣雾霾天气的分水岭. 当 $I(u_0) > 0$ 时, 则在所研究区域内 PM2.5 浓度值将在有限范围内波动, 不会变化太大; 当 $I(u_0) < 0$ 时, 则会出现较严重的雾霾污染, 广泛影响社会生活和人类健康. 因此, 可观测所研究区域初始时刻各个位置点 PM2.5 浓度值, 将其代入式(7), 计算出 $I(u_0)$具体数值并与 0 比较, 即得到 PM2.5 浓度变化规律, 并预判未来一段时间是否会出现不利的雾霾天气.

定理 3 运用积分估计方法和位势井函数族的一些性质研究全局解的渐进行为. 全局解的渐进行为是指在时间趋于无穷大的过程中, 解是否衰减及解的衰减速度如何.

定理 3 设式(4)和式(5)成立, $u_0 \in H^1_0(\Omega)$. 假设 $J(u_0) \leqslant d$, $I(u_0) > 0$, 则对于模型式(1)$\sim$式(3)的全局弱解 $u(x,t)$, 存在正常数 C, λ 和 t_1, 使得 $\|u(x,t)\|^2_{H^1_0} \leqslant Ce^{-\lambda t}$, $t_1 \leqslant t < \infty$.

证明 首先, 定理 1 确保在条件 $J(u_0) \leqslant d$, $I(u_0) > 0$ 成立时, 模型式(1)$\sim$式(3)的全局弱解是存在的. 令$u(x,t)$ 是模型式(1)$\sim$式(3)的任一全局弱解, 满足 $J(u_0) < d$, $I(u_0) > 0$. 则在 $0 \leqslant t < \infty$ 时, 式(9)式成立. 在式(9)两边同乘以任一函数 $h(t) \in C[0,\infty)$, 得到

$$(u_t, h(t)v) + (\nabla u_t, \nabla(h(t)v)) + (\nabla u, \nabla(h(t)v)) = \left(u^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y, h(t)v\right),$$

上式对于任意 $v(x) \in H^1_0(\Omega)$成立.

由于空间 $H^1_0(\Omega)$, $C[0,\infty)$和 $L^\infty(0,\infty; H^1_0(\Omega)$之间的关系, 于是对于任意 $\omega \in L^\infty(0,\infty; H^1_0(\Omega)$, 有

$$(u_t, \omega) + (\nabla u_t, \nabla\omega) + (\nabla u, \nabla\omega) = \left(u^p(x,t)\int_\Omega k(x,y)u^{p+1}(y,t)\mathrm{d}y, \omega\right). \tag{30}$$

令 $\omega = u$, 对式(30)进行积分微分计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{H^1_0} + 2I(u) = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{31}$$

由 $I(u_0) > 0$ 和 $J(u_0) = \dfrac{1}{2p+2}I(u_0) + \dfrac{p}{2p+2}\|u_0\|^2_{H^1_0}$, 得到 $J(u_0) > 0$.

于是, 由 $0 < J(u_0) < d$, $I(u_0) > 0$ 和引理 5, 得到 $u(t) \in W_\delta$, 其中 δ_1, δ_2 是方程 $d(\delta) = J(u_0)$的两个

根, $\delta_1 < \delta < \delta_2, 0 \leqslant t < \infty$, 且 $\delta_1 < \delta_2$.

因此, 有 $I_\delta(u) \geqslant 0, \delta_1 < \delta < \delta_2; I_{\delta_1}(u) \geqslant 0, 0 \leqslant t < \infty$. 于是, 式(31)推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H_0^1}^2 + 2(1-\delta_1)\|u\|_{H_0^1}^2 + 2I_{\delta_1}(u) = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{32}$$

由式(32)得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H_0^1}^2 + 2(1-\delta_1)\|u\|_{H_0^1}^2 \leqslant 0, t \in [0,\infty)$.

进一步, 由 Gronwall's 不等式, 得 $\|u\|_{H_0^1}^2 \leqslant \|u_0\|_{H_0^1}^2 e^{-2(1-\delta_1)t}, t \in [0,\infty)$. 因此, 存在常数 $\lambda > 0$, 使得 $\|u\|_{H_0^1}^2 \leqslant \|u_0\|_{H_0^1}^2 e^{-\lambda t}, t \in [0,\infty)$, 即证明得到低初始能量情形 $J(u_0) < d$ 下弱解以指数形式衰减的性质. 临界初始能量情形 $J(u_0) = d$ 时弱解以指数形式衰减性质的证明与 $J(u_0) < d$ 情形类似, 此处略去. 证毕.

定理 3 表明模型式(1)～式(3)的系统能量是以指数形式衰减的, 该结果优于解的多项式衰减. 由定理 1 已知, 当 $I(u_0) > 0$ 时, 在所研究区域内 PM2.5 浓度值将在有限范围内波动, 不会变化太大. 定理 3 在定理 1 基础上, 进一步说明 PM2.5 的浓度会随着时间累积而慢慢降低, 当持续到某个时间节点时, PM2.5 浓度将持续下降, 理想状态下会趋于 0.

根据我国《环境空气质量标准》规定, 环境空气污染物基本项目浓度限值: PM2.5 的 24 小时日均浓度, 一级: 35μg/m^3; 二级: 75μg/m^3; 全年平均浓度: 一级: 15μg/m^3; 二级: 35μg/m^3. 为达到我国环境空气质量标准, 可按地区实际情况选取 PM2.5 限值, 根据定理 3 显示结果, 可计算出 PM2.5浓度衰减到达标要求浓度的具体时间节点, 即大致预测雾霾天气的持续时间, 这将为雾霾监测和预警工作提供强有力的理论支撑, 为进一步完善空气重污染应急机制, 不断提高环境管理精细化水平, 保护公众健康提供新的思路.

5　结束语

针对雾霾天气愈发严重及难以预测的问题, 本文通过偏微分方程理论建立三维空间 PM2.5 污染扩散模型, 探索 PM2.5 分布及演变规律, 为治污减霾提供理论方法及应对措施. 本文研究了初始时刻雾霾浓度满足不同条件时, 其浓度遵循的变化规律. PM2.5 污染扩散模型创新性地添加能反映雾霾粒子间相互作用的粘性项, 从理论层面更能贴合实际物理现象的发展规律, 因粘性项是高阶项关于时间的一阶导数, 这不仅增加了理论难度和计算难度, 也是对已有理论体系的改进和完善, 为研究 PM2.5 分布及扩散等现象提供严谨的理论依据.

通过运用偏微分方程相关理论, 本文揭示了 PM2.5 初始浓度在一定限制条件下, 雾霾污染分布及扩散演变规律. 鉴于实际模型的复杂性, 本文只考察了在低初始能量和临界初始能量情形下预测 PM2.5 污染扩散的浓度变化规律, 因此下一步可以在此基础上进行拓展, 考虑高初始能量情形下 PM2.5 污染扩散模型, 为我国重污染天气的监测、预警和发展机制及应对措施提供理论支撑.

参考文献:

[1] 张小曳, 孙俊英, 王亚强. 我国雾霾成因及其治理的思考. 科学通报, 2013, 58(13): 1178–1187.
Zhang X Y, Sun J Y, Wang Y Q. The cause of frog-haze and its governance thinkong in our country. Chinese Science Bulletin, 2013, 58(13): 1178–1187. (in Chinese)

[2] 吴　兑. 近十年中国灰霾天气研究综述. 环境科学学报, 2012, 32(2): 257–269.
Wu D. Hazy weather research in China in the last decade. Acta Scientiae Circumstantiae , 2012, 32(2): 257–269. (in Chinese)

[3] Deng H, Tan H B, Li F, et al. Impact of relative humidity on visibility degradation during a haze event: A case study. Science of the Total Environment, 2016, 569(11): 1149–1158.

[4] Shen X J, Sun J Y, Zhang X Y, et al. Characterization of submicron aerosols and effect on visibility during a severe haze-fog episode in Yangtze River Delta, China. Atmospheric Environment, 2015, 120(34): 307–316.

[5] Miao W, Huang X, Song Y. An economic assessment of the health effects and crop yield losses caused by air pollution in mainland China. Journal of Environmental Sciences, 2017, 56(6): 102–113.

[6] Luo Z X, Gao M R, Luo X S, et al. National pattern for heavy metal contamination of topsoil in remote farmland impacted by haze pollution in China. Atmospheric Research, 2016, 170(3): 34–40.

[7] McLaren J, Williams I D. The impact of communicating information about air pollution events on public health. Science of the Total Environment, 2015, 538(44): 478–491.

[8] Gao M, Sarath K G, Gregory R C, et al. Health impacts and economic losses assessment of the 2013 severe haze event in Beijing area. Science of the Total Environment, 2015, 511(50): 553–561.

[9] Chen Y Y, Ebenstein A, Greenstone M, et al. Evidence on the impact of sustained exposure to air pollution on life expectancy from China's Huai River policy. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2013, 110(69): 936–941.

[10] 朱旭辉, 倪志伟, 程美英, 等. 融合协同进化离散型人工鱼群算法和多重分形的雾霾预测方法. 系统工程理论与实践, 2017, 37(4): 999–1010.
Zhu X H, Ni Z W, Cheng M Y, et al. Haze prediction method based on multi-fractal dimension and co-evolution discrete artificial fish swarm algorithm. Systems Engineering: Theory & Practice, 2017, 37(4): 999–1010. (in Chinese)

[11] 程美英, 倪志伟, 朱旭辉. 融合粗糙集和二元萤火虫算法的雾霾关键影响因素预测方法. 系统工程理论与实践, 2017, 37(1): 242–252.
Cheng M Y, Ni Z W, Zhu X H. Rough set combine with binary glowworm swarm optimization for key haze influence factors. Systems Engineering: Theory & Practice, 2017, 37(1): 242–252. (in Chinese)

[12] 宗晓萍, 武子瀚, 刘 言. 基于遗传算法寻优的SVR雾霾预测模型. 河北大学学报(自然科学版), 2016, 36(3): 307–311.
Zong X P, Wu Z H, Liu Y. Optimization SVR fog prediction model based on genetic algorithm. Journal of Hebei University(Natural Science Edition), 2016, 36(3): 307–311. (in Chinese)

[13] Bai Y, Li Y, Wang X X, et al. Air pollutants concentrations forecasting using back propagation neural network based on wavelet decomposition with meteorological conditions. Atmospheric Pollution Research, 2016, 7(3): 557–566.

[14] Pérez-Suárez R, López-Menéndez A J. Growing green: Forecasting CO_2 emissions with environmental Kuznets curves and logistic growth models. Environmental Science & Policy, 2015, 54(6): 428–437.

[15] Mishra D, Goyal P, Upadhyay A. Artificial intelligence based approach to forecast PM2.5 during haze episodes: A case study of Delhi, India. Atmospheric Environment, 2015, 102(21): 239–248.

[16] Reikard G. Forecasting volcanic air pollution in Hawaii: Tests of time series models. Atmospheric Environment, 2012, 60(52): 593–600.

[17] 林建伟, 宋丽平. 具有资产重组公司债券定价和最佳违约边界. 系统工程学报, 2017, 32(4): 486–498.
Lin J W, Song L P. Pricing of the corporate debt with capital reorganization and optimal default boundary. Journal of Systems Engineering, 2017, 32(4): 486–498. (in Chinese)

[18] 李蓬实, 杨建辉. 基于随机波动率模型的路径依赖期权定价. 系统工程学报, 2017, 32(2): 241–251.
Li P S, Yang J H. Path-dependent option pricing based on stochastic volatility model. Journal of Systems Engineering, 2017, 32(2): 241–251. (in Chinese)

[19] 梁 进, 包俊利, 曾楚焜. 含信用等级迁移的可违约和可赎回公司债券的结构化定价. 系统工程学报, 2018, 33(6): 793–800.
Liang J, Bao J L, Zeng C K. Pricing on a defaultable and callable corporate bond with credit rating migration under the structure framework. Journal of Systems Engineering, 2018, 33(6): 793–800. (in Chinese)

[20] 江 良, 林鸿熙, 林建伟, 等. 基于随机利率模型可转换债券定价分析. 系统工程学报, 2019, 34(1): 57–68.
Jiang L, Lin H X, Lin J W, et al. Analyzing pricing of convertible bonds with stochastic interest rate modelling. Journal of Systems Engineering, 2019, 34(1): 57–68. (in Chinese)

[21] 陶 涛, 朱家明. 全面二孩政策对中国人口结构及经济发展的影响及预测. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2018, 34(3): 31–35.
Tao T, Zhu J M. Impact and forecast of second child policy on population structure and economic development in China. Natural science journal of Harbin Normal University, 2018, 34(3): 31–35. (in Chinese)

[22] Ding S Q. Research on Modeling and Vibration Control of Flapping-wing Aerial Robot. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2018.

[23] 郑黎明, 蒲春生, 刘 静. 考虑渗流压力梯度时低渗岩土固结控制方程的解析解. 应用数学学报, 2017, 40(6): 819–832.
Zheng L M, Pu C S, Liu J. A solution for governing equation of low permeability rock consolidation considering initial seepage pressure gradients. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2017, 40(6): 819–832. (in Chinese)

[24] Mlayeh R, Toumi S, Beji L. Backstepping boundary observer based-control for hyperbolic PDE in rotary drilling system. Applied Mathematics and Computation, 2018, 322(6), 66–78.

下转(第353页)