# 通胀风险下的企业家投资–消费和对冲问题

费 晨[1], 杜宏俊[2], 费为银[2], 闫理坦[1]
(1. 东华大学旭日工商管理学院, 上海 200051; 2. 安徽工程大学数理学院, 安徽 芜湖 241000)

**摘要**: 对于面临通胀风险企业家一次性获得投资回报, 建立了企业家执行实业投资项目期权前后的随机动力学, 并且利用动态规划原理推导出企业家价值函数所满足的动态规划方程. 进而, 在企业家具有常数绝对风险厌恶效用函数下, 获得了最优消费和投资组合的半闭型解. 最后, 利用数值模拟分析通胀如何影响企业家最优消费和投资组合策略. 结果表明在不允许利用股票市场做风险对冲时, 企业家最优消费自有财富依赖于项目价值过程的预期升值率和波动率以及预期通胀率与通胀波动率. 在企业家拥有项目投资期权同时参与金融股票投资来对冲项目风险时, 投资者消费与投资组合受项目投资价值, 通胀以及股票预期升值率与波动率的影响.

**关键词**: 通胀; 实业投资; 最优消费和投资组合; CARA效用; HJB 方程
**中图分类号**: O211.6; F224.11 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2019)03−0383−12
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2019.03.009

# Entrepreneur's investment-consumption and hedging under inflation risk

**Fei Chen[1], Du Hongjun[2], Fei Weiyin[2], Yan Litan[1]**
( 1. Glorious Sun School of Business and Management, Donghua University, Shanghai 200051, China; 2. School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China)

**Abstract:** Considering inflation uncertainty and the entrepreneur's lump-sum industrial investment payoff, this paper presents the stochastic dynamics both before and after the exercise of the real option and derives the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellmman (HJB) equation of the entrepreneur's value function by using dynamic programming principal. Moreover, the paper deduces the semi-closed solutions of the optimal consumption or/and portfolio with constant coefficient of absolute risk aversion (CARA). Finally, the effect of inflation on the entrepreneur's optimal consumption and portfolio is analyzed by numerical simulations. The result shows that when hedging without investing in stocks, the entrepreneur's optimal consumption depends on the expected appreciation rate and volatility of the project value, and the expected inflation and volatility of the expected inflation. When hedging by investing in stock portfolios, the optimal consumption and portfolio depends on the value of the project, inflation, the expected appreciation rate and volatility of the stocks.

**Key words:** inflation; industrial investment; optimal consumption and portfolio; CARA utility; HJB equation

## 1 引 言

企业家的实业(实物)投资对实体经济的发展至关重要, 也是一个社会经济发展的基础. 由于实业投资项目价值随市场环境的变化而变化, 具有随机不确定性. 因此, 企业家实业项目投资存在时机选择的问题. 从

收稿日期: 2018−09−07; 修订日期: 2019−01−10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71571001).

实物期权视角[1], 当实业投资项目价值给企业家带来足够回报时, 他才会选择投资该项目. 问题是企业家面对不确定经济环境如何选择最佳投资时机？尤其是在他参与金融股票市场投资时, 如何选择投资组合来对冲实业投资项目的风险？为了给出问题的答案, 首先回顾针对企业家面对市场不确定市场环境如何做出实业项目投资的理性决策等问题的相关研究.

随着我国经济的发展, 需要大力发展实体经济, 而企业家面临着实物投资时机选择和风险对冲问题. 由于经济环境的复杂性, 企业家的投资面临着众多风险因素, 一方面企业家所选择的实物投资项目价值因国内外经济环境变化而随机波动, 通常可以用一个随机微分方程来刻画(本文用几何布朗运动描述), 另一方面, 企业家的资金流面临通胀不确定性风险, 尤其是高的通货膨胀会使得企业家的收益贬值, 从而降低企业家的实际效用, 直接导致其投资意愿的降低. 企业家的实物投资项目投资不同于金融资产投资, 实物投资项目是不可自由交易的, 因此他的投资风险不能通过市场交易来对冲风险, 企业家的实物投资风险具有个性特征, 称为异质风险. 由于企业家异质风险不能由现有资产来支撑, 所以完全市场下的金融投资理论将不再适用, 为此, 可以用确定性等价方法来评估不可交易资产的价值, 这种价值可以认为是项目的实物期权价值. 在实际经济领域投资中企业家拥有的可能是一块有待开发的土地或医药技术的研发等. 正由于实物投资项目的不可交易性而产生的异质风险, 在允许企业家参与金融市场投资的情形下, 他往往选择风险资产的投资组合来对冲实物投资项目的风险, 同时企业家有着消费选择. 至于企业家在实物项目投资过程中如何最优地选择消费和投资组合, 他会受到本身对风险的态度, 通胀的不确定程度等因素的影响. 连续时间下的投资组合理论主要基于 Merton[2]在完全市场假设下建立的连续时间最优消费投资组合模型, 以及自此之后国内外许多学者从不同视角研究的动态资产组合理论.

企业家实物投资项目的回报可以是执行实业项目投资时一次性获得全部收益(lump-sum payoff)或者资金收益流(flow payoff). 本文考虑的实业项目投资是不可逆性的、并且具有灵活的投资时机和不确定远期收益, 这些性质表现为永续美式看涨期权特征. 有关实物期权在项目投资中的分析已为一些学者所探讨. Dixit 等[3]引入等待价值和经营灵活性的价值, 利用实物期权的思想分析实业投资项目的价值. 基于上述文献, Miao 等[4]利用实物期权方法获得了执行期权前后的最优消费和投资组合选择策略, 并且分析了异质风险对期权价值和执行时间的影响. Chen 等[5]运用偏微分方程方法优化了 Miao 等[4]的结果． 杨金强等[6]探讨了企业家最优消费投资与定价问题. 其它有关实业投资项目研究, 可参考文献[7–12].

正如上面提到的, 企业家面临影响其投资决策的因素包括实业投资项目的价值波动风险、股票波动风险以及企业家的风险态度等等, 但没有考虑到现实经济环境中通货膨胀不确定性风险, 然而在企业家实物项目投资决策问题中, 考虑通货膨胀因素对其产生的影响是十分必要的. 事实上, 通胀因素对资产配置所产生的显著影响已经引起国内外学者的高度关注和广泛研究. 考虑通胀影响后 Munk 等[13] 探讨了投资者在银行存款、名义债券和风险股票款上的最优动态资产配置. Bensoussan 等[14]通过随机分析方法给出资产价格为部分可观察或完全可观察时通胀对最优消费和组合投资策略的影响. 戴国强等[15] 从实证上检验了我国风险资产价格与通货膨胀的关系. 费为银等[16]研究了通货膨胀率服从均值回复过程时最优资产组合. 除此之外, 文献[17–21]分别从不同的视角探讨了通胀对投资组合和消费的影响.

从文献[13–24]的研究发现通货膨胀对资产配置产生的影响是不可忽视的. 那么问题是, 当一个企业家面临实业投资项目时, 第一, 他应当如何选择实业项目投资的时机; 第二, 通胀的因素将怎样影响决策; 第三, 如何消费和在金融市场上选择风险股票投资组合. 为此, 本文首先建立了实业投资项目作为标的资产的价值动力学方程, 正因为标的项目未来收益的不确定性, 使得企业家面临收益不确定性风险, 这种风险除了外部投资环境的不确定性外, 还有资金流因通胀带来的贬值风险, 就是说企业家选择项目投资时机需要考虑通胀因素. 另一方面, 投资者为了对冲项目收益不确定性风险, 还需参与金融市场风险股票的投资组合, 同样风险股票收益也面临通胀贬值的压力. 沿用 Kwak 等[23]对个人财富的处理方式, 引进通胀指数债券. 其

次, 根据企业家风险态度所刻画的效用函数, 构建了使其预期累积效用最大化的框架, 并研究了企业家的自保模型, 即企业家不参与金融市场投资, 仅进行实物项目投资. 由于项目投资的不可交易性, 企业家在实物项目投资中所遇到的风险将无法通过在金融市场中进行投资组合来对冲. 在这样的模型下, 通过动态规划原理, 探讨了企业家的最优消费问题. 接下来, 将自保模型中企业家不能在金融市场中进行投资组合的限制取消, 考虑了企业家可以通过金融市场做风险对冲的模型, 利用动态规划原理建立了企业家值函数所满足的 HJB 方程, 并找到最优消费和对冲的投资组合策略. 最后, 通过数值模拟分析通胀的不确定对企业家的最优消费和投资组合的影响, 分析表明通胀的不确定性对不同风险厌恶企业家的最优消费和投资组合产生显著的影响.

## 2　企业家投资模型

### 2.1　基本假设

假设企业家拥有一个实业投资项目(例如房地产或医药技术的开发), 不同于金融资产, 由于实业投资项目的不可交易性, 企业家决定执行投资时刻 $\tau(\tau>0)$后, 该项投资具有不可逆性, 而执行投资的时刻 $\tau$ 由企业家对未来市场的预期决定, 对该项目的执行与否表现为一个永续美式看涨期权. 企业家需要支付投资项目的投资成本 $m_0(m_0>0)$, 同时获得一次性的项目价值, 假设企业家拥有充足的个人财富来承担该项目的投资成本. 本文考虑企业家在通胀指数债券(inflation-linked bond)和风险股票上进行投资组合. 以下所有过程都定义在完备带流概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$, 且 $\mathcal{F}_t=\sigma\{B^{\mathrm{X}}(s),B^{\mathrm{P}}(s),B^{\mathrm{L}}(s);0\leqslant s\leqslant t\}$, $B^{\mathrm{X}},B^{\mathrm{P}},B^{\mathrm{L}}$ 都是一维标准布朗运动, 其中 $B^{\mathrm{X}}$ 反映企业家投资项目收益的风险源, $B^{\mathrm{P}}$ 是风险股票价格的风险源, $B^{\mathrm{L}}$ 为通胀的风险源. 这里,考虑这三个风险源具有并假设两两之间的相关系数 $\rho_{\mathrm{xp}},\rho_{\mathrm{xl}},\rho_{\mathrm{pl}}$ 满足

$$\mathrm{d}B^{\mathrm{X}}(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{P}}(t)=\rho_{\mathrm{xp}}\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}B^{\mathrm{X}}(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t)=\rho_{\mathrm{xl}}(t),\ \mathrm{d}B^{\mathrm{P}}(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t)=\rho_{\mathrm{pl}}\mathrm{d}t.$$

现设企业家准备投资的项目价值(名义价值, 即没有经过通胀折现的价值)过程 $X(t)$服从几何布朗运动

$$\mathrm{d}X(t)=\alpha_{\mathrm{x}}X(t)\mathrm{d}t+\sigma_{\mathrm{x}}X(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{X}}(t),\ X(0)=x,$$

其中 $\alpha_{\mathrm{x}}$ 和 $\sigma_{\mathrm{x}}$ 是正常数, 而 $\alpha_{\mathrm{x}}$ 表示企业家投资项目价值的预期升值率, $\sigma_{\mathrm{x}}$ 表示项目价值的预期波动率. 注意到文献[4]对企业家投资项目价值采用算术布朗运动来描述项目价值的动力学行为, 但由于算术布朗运动的状态取值可能为负值, 为了避免价值为负的情形, 本文用几何布朗运动刻画项目价值过程.

在考虑企业家参与金融市场组合投资时, 拥有开发项目的实物投资期权企业家将利用金融市场风险股票的投资组合来对冲实物投资项目的异质风险(注意到异质风险是由于投资项目的不可交易性引起). 现假设风险股票的名义价格$\{P(t),t\geqslant 0\}$过程为

$$\mathrm{d}P(t)=\mu_{\mathrm{e}}P(t)\mathrm{d}t+\sigma_{\mathrm{e}}P(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{P}}(t),\ P(0)=p,$$

其中 $\mu_{\mathrm{e}},\sigma_{\mathrm{e}}$ 为正常数, 而 $\mu_{\mathrm{e}}$ 表示股票的预期回报率, $\sigma_{\mathrm{e}}$为风险股票收益的波动率.

假设消费篮子价格$\{L(t),t\geqslant 0\}$服从几何布朗运动

$$\mathrm{d}L(t)=b_{\mathrm{l}}L(t)\mathrm{d}t+\sigma_{\mathrm{l}}L(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t),\ L(0)=l,$$

其中 $b_{\mathrm{l}},\sigma_{\mathrm{l}}$ 为正常数, $b_{\mathrm{l}}$ 表示预期通胀率, $\sigma_{\mathrm{l}}>0$ 为通胀波动率.

现假设金融市场有实际回报率为 $r$ 的通胀指数债券, 与通胀有着相同风险源, 与Siu[24]类似, 假设通胀指数债券名义价格$\{I(t),t\geqslant 0\}$满足下列方程

$$\mathrm{d}I(t)/I(t)=r\mathrm{d}t+\mathrm{d}L(t)/L(t)=(r+b_{\mathrm{l}})\mathrm{d}t+\sigma_{\mathrm{l}}\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t),\ \ I(0)=i.$$

由上式可知, 通胀指数债券的名义预期名义收益率是实际收益率与预期通胀率之和.

用价格水平 $L(t)$将名义价值或价格折算成真实的价格或价值, 令 $Y(t)=X(t)/L(t)$表示 $t$ 时刻投资项目的真实价值, 利用 Itô 公式, 可得 $Y(t)$满足随机微分方程

$$\mathrm{d}Y(t)=(\alpha_{\mathrm{x}}-b_{\mathrm{l}}+\sigma_{\mathrm{l}}^2-\rho_{\mathrm{xl}}\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{l}})Y(t)\mathrm{d}t+\sigma_{\mathrm{x}}Y(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{X}}(t)-\sigma_{\mathrm{l}}Y(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}t,$$

其中 $\alpha_{\mathrm{x}}-b_{\mathrm{l}}+\sigma_{\mathrm{l}}^2-\rho_{\mathrm{xl}}\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{l}}$ 表示投资项目真实的预期回报率.

类似的, 令 $\tilde{P}(t)=P(t)/L(t)$表示 $t$ 时刻风险资产的真实价值, 同理可得 $\tilde{P}(t)$满足

$$\mathrm{d}\tilde{P}(t)=(\mu_{\mathrm{e}}-b_{\mathrm{l}}+\sigma_{\mathrm{l}}^2-\rho_{\mathrm{pl}}\sigma_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{l}})\tilde{P}(t)\mathrm{d}t+\sigma_{\mathrm{e}}\tilde{P}(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{P}}(t)-\sigma_{\mathrm{l}}\tilde{P}(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t),$$

其中 $\mu_{\mathrm{e}}-b_{\mathrm{l}}+\sigma_{\mathrm{l}}^2-\rho_{\mathrm{pl}}\sigma_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{l}}$ 表示风险资产真实的预期收益率.

令 $\tilde{I}(t)=I(t)/L(t)$表示 $t$ 时刻通胀指数债券的真实价格, 可得 $\tilde{I}(t)$满足 $\mathrm{d}\tilde{I}(t)=r\tilde{I}(t)\mathrm{d}t$, 这和通胀指数债券实际收益率的假设是一致的.

假设可交易的通胀指数债券折现后相当于真实经济中的无风险资产, 企业家将一部分资产投资于通胀指数债券中, 取代通常的无风险资产投资, 这样很好的对冲掉由于通胀带来的银行现金存款贬值风险.

本文假设企业家获得连续的无限时域消费过程带来的预期效用为

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}U(C(t))\mathrm{d}t\Big],$$

其中 $U$ 是单增的凹函数(concave function), $\beta>0$ 是主观折现率, 消费效用由 $t$ 时刻真实的消费 $C(t)$所决定. 为了讨论方便, 假设 $\beta$ 等于无风险利率 $r$.

为了表达的简洁, 引入下列记号:

$$\begin{aligned}
a_1&=\mu_e-b_l+\sigma_l^2-\rho_{\mathrm{pl}}\sigma_e\sigma_l-r,\\
a_2&=\sigma_{\mathrm{e}}^2-2\rho_{\mathrm{pl}}\sigma_e\sigma_l+\sigma_l^2,\\
a_3&=\rho_{\mathrm{xp}}\sigma_x\sigma_e-\rho_{\mathrm{xl}}\sigma_x\sigma_l-\rho_{\mathrm{pl}}\sigma_e\sigma_l+\sigma_l^2,\\
a_4&=\alpha_x-b_l+\sigma_l^2-\rho_{\mathrm{xl}}\sigma_x\sigma_l,\\
a_5&=\sigma_x^2-2\rho_{\mathrm{xl}}\sigma_x\sigma_l+\sigma_l^2.
\end{aligned}$$

### 2.2 不允许风险对冲的自保模型(模型 I)

企业家在实物项目投资时机选择过程中, 允许投资于通胀指数债券, 但不允许参与金融市场股票的投资, 上节表明. 在经价格水平折现后, 通胀指数债券类似利率为 $r$ 的无风险资产, 于是本节的模型等价于一个基于实物期权标准不可逆投资的规范消费/储蓄模型.

按照实物期权的思想, 企业家项目投资执行时 $\tau$ 名义上付出成本是 $m_0$, 得到投资项目回报为 $X(\tau)$, 将他的其余资产投资于通胀指数债券. 令 $\{C_{\mathrm{N}}(t),t\geqslant 0\}$ 为企业家名义消费率, $\{W_{\mathrm{N}}(t),t\geqslant 0\}$ 是企业家名义财富过程, 易知财富方程为

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{N}}(t)=((r+b_{\mathrm{l}})W_{\mathrm{N}}(t)-C_{\mathrm{N}}(t))\mathrm{d}t+\sigma_{\mathrm{l}}W_{\mathrm{N}}(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t),\tag{1}$$

其中 $W_{\mathrm{N}}(0)$是给定的.

在企业家选择实物项目投资时, 他的总财富此时发生了跳变, 满足 $W_{\mathrm{N}}(\tau)=W_{\mathrm{N}}(\tau-)+X(\tau)-m_0$, 其中 $W_{\mathrm{N}}(\tau-)$ 和 $W_{\mathrm{N}}(\tau)$分别表示执行项目投资 $\tau$ 前后的即期名义财富值. 本文考虑投资实物项目企业家的效用来自剔除通胀因素后的实际财富价值, 所以采用 Kwak 等[23]中的处理方式, 给出通胀折现后真实财富价值动力学方程, 它为以下分析提供基础, 为此给出下面的引理 1. (证明见附录)

**引理 1** 如果企业家真实消费率是 $C(t)$, 选择项目投资成本为 $\tilde{m}_0=m_0/L(\tau)$, 那么通胀调整后的真实财富过程 $W(t)$满足

$$\mathrm{d}W(t)=(rW(t)-C(t))\mathrm{d}t.\tag{2}$$

在企业家选择实业项目投资时, 付出成本是 $\tilde{m}_0$, 而获得真实的投资回报为 $Y(\tau)$, 总财富满足 $W(\tau) = W(\tau-) + Y(\tau) - \tilde{m}_0$.

假设企业家通过最优的选择消费过程来使得其整个生命周期内消费预期效用最大化, 该预期效用最大化的值称为企业家的值函数, 用 $J^0(w)$来表示, 利用最优性原理得到值函数 $J^0(w)$满足下面的 HJB 方程

$$rJ^0(W) = \underset{C\in R}{\text{Max}} \left(U(C) + (rW - C)J^0_W\right),$$

其中横截条件为 $\lim\limits_{T\to\infty} \mathrm{e}^{-rT}|J^0(W(T))| = 0$. $\mathrm{e}^{-rT}|J^0(W(T))| = 0$. 从经济学的视角, 企业家的未来效用流 $rJ^0(W)$一部 $U(C)$, 另一部分来自净利息收入 $rW - C$ 与企业家财富对其效用值的边际贡献率的乘积所产生的效用增量.

横截条件表明, 企业家效用值不可无限贴现, 意味着企业家无限等待的价值为零. 这是由于平滑消费的结果. 由此得出以下两点: 第一, 主观折现率 $\beta$ 与利率 $r$ 相等意味着边际效用不变($U'(C(t)) = U'(C(s))$); 第二, 由效用函数的凹性可知 $C(t) = C(s)$. 于是知道值函数为 $J^0(W) = U(rW)/r$.

下面考虑企业家选择项目投资之前的价值函数 $J(W, Y)$, 利用动态规划原理可得 HJB 方程

$$rJ(W, Y) = \underset{C\in R}{\text{Max}}(U(C) + (rW - C)J_W) + a_4 Y J_Y + a_5 Y^2 J_{YY}/2.$$

上式表明, 企业家未来效用流来自如下三个部分, 第一部分是企业家当期最优的选择消费的效用值 $U(C)$, 第二部分是企业家的净利息收入流对其效用的贡献度 $(rW - C)J_W$, 第三部分是企业家所选择项目价值对其效用的贡献度 $a_4 Y J_Y + \dfrac{1}{2}a_5 Y^2 J_{YY}$. 另外, 上述 HJB 方程边界条件可以分析如下. 首先, 由于企业家不可能投资一个带来无穷损失的项目, 所以必须有无泡沫(no bubble) 条件$\lim\limits_{Y\to 0} J(W, Y) = J^0(W)$. 其次, 企业家在选择执行项目投资时, 其效用值匹配条件必须成立, 即

$$J(W, Y) = J^0(W + Y - \tilde{m}_0). \tag{3}$$

方程(3)定义了投资临界值, 记为 $\bar{Y}(W)$, 即当项目真实的期权回报过程 $Y$ 首次达到临界值 $\bar{Y}$ 时, 企业家就会选择项目投资. 最后, 由于企业家选择项目投资时, 临界值能使得企业家的值函数是最优的, 于是有平滑粘性条件(smooth-pasting condition)

$$\frac{\partial J(W, Y)}{\partial Y}\Big|_{Y=\bar{Y}(W)} = \frac{\partial J^0(W + Y - \tilde{m}_0)}{\partial Y}\Big|_{Y=\bar{Y}(W)}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial J(W, Y)}{\partial W}\Big|_{Y=\bar{Y}(W)} = \frac{\partial J^0(W + Y - \tilde{m}_0)}{\partial W}\Big|_{Y=\bar{Y}(W)}. \tag{5}$$

条件(4)表明, 企业家实业项目投资机会的边际变化对项目投资执行前后值函数具有相同的边际效应. 同样的, 式(5)表明, 企业家个人财富的边际变化对实业项目投资执行前后值函数具有相同的边际效应.

有别于传统的不可逆实业投资模型(如文献[2]), 本文假设企业家的个人财富为一个额外的状态变量.

企业家最优化问题为一个最优消费和停时(决定实业项目投资)问题, 为了问题的阐述, 假设企业家效用函数为 CARA 效用函数 $U(c) = -\mathrm{e}^{-\gamma c}/\gamma, \gamma > 0$, 而 $\gamma = -U'''(c)/U''(c)$表示绝对风险厌恶系数, 考虑预防性储蓄动机, 该效用函数的采用可以得到半闭式解.

企业家选择实业投资项目之后由平滑消费条件和 CARA 效用可知值函数形式为

$$J^0(W) = -\frac{1}{\gamma r}\mathrm{e}^{-\gamma r W}.$$

进而可猜测企业家选择项目投资之前的值函数形式为

$$J(W, Y) = -\frac{1}{\gamma r}\mathrm{e}^{-\gamma r(W + \Theta(Y))},$$

上式中 $\Theta(Y)$是待确定函数, 解释为投资机会的确定性等价财富, 具有期权的性质, 只有在执行时才能得到一次性回报. 根据消费理论, 确定性等价财富定义为 $w_{\mathrm{ce}}$ 满足 $J^0(W + w_{\mathrm{ce}}) = J(W, Y)$.

利用最优性条件可以得到企业家进行实业项目投资前后的最优消费有下列结论.

**命题 1** 企业家在实业投资项目真实价值过程 $Y$ 首次达到临界值 $\bar{Y}$ 时执行实业项目投资. 执行项目投资后, 真实的最优消费为

$$C^*(W) = rW. \tag{6}$$

执行实业项目投资前, 其真实的最优消费为

$$C^*(W, Y) = r(W + \Theta(Y)), \tag{7}$$

其中$(\Theta(Y), \bar{Y})$是如下自由边界问题的解, 即

$$r\Theta(Y) = a_4 Y\Theta'(Y) + \frac{1}{2}a_5 Y^2\Theta''(Y) - \frac{1}{2}a_5\gamma r Y^2\left(\Theta'(Y)\right)^2, \tag{8}$$

此时无泡沫条件为 $\Theta(0) = 0$, 边界条件为

$$\Theta(\bar{Y}) = \bar{Y} - \tilde{m}_0, \tag{9}$$

$$\Theta'(\bar{Y}) = 1. \tag{10}$$

命题 1 中, 由于实业投资项目价值服从几何布朗运动, 不同于Miao 等[4]无泡沫条件(他们假定实业投资项目价值服从算术布朗运动), 当项目资产价值为零时, 实物期权价值 $\Theta(0) = 0$ 为本文的无泡沫条件. 而边界条件式(9)表明企业家在实业投资项目价值一旦达到投资临界值时, 确定性等价财富值就应为一次性获得回报 $\bar{Y}$ 与真实付出的成本 $\tilde{m}_0$ 之差值. 式(10)表明企业家在执行实业项目投资时刻, 其确定性等价财富关于投资临界值呈线性增长. 比较式(6)和式(7)可知, 由于企业家不参与金融市场的股票投资, 考虑到消费平滑以及不再进行实业项目投资, 企业家的消费由通胀指数债券投资利得 $rW$ 所提供, 继而由于通胀指数债券折现后的收益相当于无风险资产, 于是通胀不确定性对最优消费不产生影响. 然而, 企业家进行实业项目投资前由于通胀对实业投资预期收益产生影响, 继而影响确定性等价财富, 于是通胀对执行实业项目投资前的最优消费可由式(7)表示.

企业家需要选择最佳时机执行实业项目的投资, 这点类似于实物期权, 但不同于标准实物期权方法, 本文企业家在非完备市场下投资决策依赖于风险厌恶和通胀等因素.

由命题 1, 式(8)∼式(10)可以知道确定性等价财富 $\Theta(Y)$, 又称为实业投资项目的隐含期权价值 $Q$, 其满足 $J(W - Q, Y) = J^0(W)$, 易知 $Q = \Theta(Y)$. 为了便于分析, 给出以下两个引理, 利用二阶 Euler 方程的求解方法, 容易得到下面的推论.

**推论 1** 假设企业家是风险中性的, 即 $\gamma = 0$, 则式(8)简化为

$$r\Theta(Y) = a_4 Y\Theta'(Y) + \frac{1}{2}a_5 Y^2\Theta''(Y).$$

如果 $\rho_{\mathrm{xl}} \neq 1$, 那么隐式期权价值 $\Theta(Y)$和投资临界值 $\bar{Y}$的精确解为

$$\Theta(Y) = \frac{\tilde{m}_0}{\lambda_{\mathrm{l}} - 1}\left(\frac{Y}{\bar{Y}}\right)^{\lambda_{\mathrm{l}}},\ Y \leqslant \bar{Y}$$

和

$$\bar{Y} = \frac{\lambda_{\mathrm{l}}}{\lambda_{\mathrm{l}} - 1}\tilde{m}_0,$$

其中 $\lambda_{\mathrm{l}} = \dfrac{2}{a_5}\left(\dfrac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{2} - \dfrac{\sigma_{\mathrm{l}}^2}{2} - \alpha_{\mathrm{x}} + b_{\mathrm{l}}\right) + \dfrac{2}{a_5}\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{2} - \dfrac{\sigma_{\mathrm{l}}^2}{2} - \alpha_{\mathrm{x}} + b_{\mathrm{l}}\right)^2 + 2a_5 r}.$

在引理 1 中, 由 $\rho_{\mathrm{xl}} \neq 1$(即驱动企业家的实业资产价值风险源和通胀风险源并非同一风险源)可推得 $a_5 > 0$, 从而确保 $\lambda_l$ 的存在性. 从推论可发现隐含期权价值 $\Theta(Y)$受到实业项目回报波动率 $\sigma_{\mathrm{x}}$, 预期通胀率 $b_{\mathrm{l}}$ 和通胀波动率 $\sigma_{\mathrm{l}}$ 的影响, 为了对比分析, 下面给出没有通胀影响的隐含期权价值 $\Theta(Y)$.

**推论 2** 假设风险中性的企业家不考虑通胀对其投资决策的影响, 其隐含期权价值 $\Theta(Y)$满足

$$r\Theta(Y)=\alpha_{\mathrm{x}}Y\Theta'(Y)+\sigma_{\mathrm{x}}^2Y^2\Theta''(Y)/2.$$

$\Theta(Y)$ 和 $\bar{Y}$ 的精确解为

$$\begin{cases}\Theta(Y)=\dfrac{\tilde{m}_0}{\lambda_2-1}\Big(\dfrac{Y}{\bar{Y}}\Big)^{\lambda_2},\ Y\leqslant\bar{Y}\\ \bar{Y}=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2-1}\tilde{m}_0.\end{cases}$$

这里, 当 $\sigma_{\mathrm{x}}>0$ 时, $\lambda_2=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2\alpha_{\mathrm{x}}}{\sigma_{\mathrm{x}}^2}\right)+\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-\dfrac{2\alpha_{\mathrm{x}}}{\sigma_{\mathrm{x}}^2})^2+\dfrac{2r}{\sigma_{\mathrm{x}}^2}}$; 当 $\sigma_{\mathrm{x}}=0$ 时, $\lambda_2=r/\alpha_{\mathrm{x}}$.

对比推论 1 和推论 2, 不难发现通胀因素对隐含期权价值 $\Theta(Y)$产生影响.

### 2.3　允许对冲模型(模型 Ⅱ)

上一节假设企业家在实业项目期权执行过程中, 他只能在金融市场上投资通胀指数债券, 由于企业家面临实业项目投资风险, 需要参与金融市场股票投资以对冲投资实业项目带来的风险, 现在推广模型 Ⅰ 的假设, 允许企业家进行风险股票的投资.

现假定企业家拥有一项实业投资项目机会, 选择执行项目期权的时间 $\tau$, 其消费为 $C_N(t)$, 在风险股票上的投资组合是 $\pi(t)$, 投资于通胀指数债券比例为 $1-\pi(t)$, 目的是使其生命周期内预期累积效用最大化. 由此不难得出企业家的名义财富动力学方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_{\mathrm{N}}(t)=&\Big((r+b_{\mathrm{l}})(1-\pi(t))W_{\mathrm{N}}(t)+\mu_{\mathrm{e}}\pi(t)W_{\mathrm{N}}(t)-C_{\mathrm{N}}(t)\Big)\mathrm{d}t+\\&\sigma_{\mathrm{e}}\pi(t)W_{\mathrm{N}}(t)(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{P}}(t)+\sigma_{\mathrm{l}}(1-\pi(t))W_{\mathrm{N}}(t)\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t),\end{aligned}\tag{11}$$

其中初始财富 $W_{\mathrm{N}}(0)$是已知的.

企业家真实的财富由名义财富通过价格水平折现得到, 其真实财富方程由下面引理提供.

**引理 2** 设 $C(t)$表示企业家真实消费率, 风险股票上的投资比例是 $\pi(t)$, 执行实业项目投资期权时实际付出成本是 $\tilde{m}_0$, 那么由式(11)表示的企业家名义财富过程 $W_{\mathrm{N}}(t)$经通胀调整后的真实财富过程 $W(t)$满足如下动态方程

$$\mathrm{d}W(t)=\Big(rW(t)+a_1\pi(t)W(t)-C(t)\Big)\mathrm{d}t+\pi(t)W(t)\sigma_{\mathrm{e}}dB^{\mathrm{P}}(t)-\pi(t)W(t)\sigma_{\mathrm{l}}\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t).$$

采用 CARA 效用函数来考虑企业家在执行实业项目期权后的情形, 利用标准动态规划方法得到值函数 $J^0(W)$满足 HJB 方程

$$rJ^0(W)=\underset{(C,\pi)\in R^2}{\mathrm{Max}}\Big(U(C)+(rW+\pi Wa_1-C)J_W^0+\frac{1}{2}a_2\pi^2W^2J_{WW}^0\Big),$$

其中横截条件为 $\lim\limits_{T\to\infty}E[\mathrm{e}^{-rT}J^0(W(T))]=0$.

上述 HJB 方程表明, 在实业投资期权执行之后, 企业家进行实业项目投资的当期效用流 $rJ^0(W)$由三个部分组成, 第一部分是企业家当期消费的效用值 $U(C)$; 第二部分企业家在股票和通胀指数债券上投资当期净收益对效用的贡献值$(rW+\pi Wa_1-C)J_W^0$; 第三部分反映企业家在股票上的投资所带来的效用增加值 $\dfrac{1}{2}a_2\pi^2W^2J_{WW}^0$, 其中效用增加值既受股票波动率也受通胀波动率以及两者相关系数的影响.

现考虑企业家在执行实业项目期权前的情形, 其值函数 $J(W,Y)$满足HJB 方程

$$\begin{aligned}rJ(W,Y)=&\underset{(C,\pi)\in R^2}{\mathrm{Max}}\Big(U(C)+(rW+a_1\pi W-C)J_W+a_4YJ_Y+\\&\frac{1}{2}a_2\pi^2W^2J_{WW}+\frac{1}{2}a_5Y^2J_{YY}+a_3\pi WYJ_{WY}\Big).\end{aligned}$$

上述 HJB 方程表明, 在实业投资期权执行之前, 企业家进行实业项目投资的当期效用流 $rJ(W,Y)$也

由三个部分组成, 第一部分 $U(C)$是企业家当期消费的效用值; 第二部分 $(rW+\pi W a_1-C)J_W+a_4YJ_Y$ 是企业家在股票和通胀指数债券上投资当期净收益以及实业项目价值对效用的贡献值; 第三部分 $a_2\pi^2W^2J_{WW}/2+a_5Y^2J_{YY}/2+a_3\pi WYJ_{WY}$ 反映企业家在股票上的投资风险以及实业项目价值波动风险所带来的效用增加值. 上述效用增加值受风险股票价格波动风险, 通胀波动风险、实业投资项目价值波动风险以及他们之间相关系数的影响.

在实业项目执行投资之后, 基于 CARA 效用函数假设, 值函数 $J^0(W)$形式为

$$J^0(W)=-\frac{1}{\gamma r}\exp\left(-\gamma r\left(W+\frac{a_1^2}{2\gamma r^2a_2}\right)\right),$$

而在实业项目执行投资之前, 猜测值函数 $J(W,Y)$形式为

$$J(W,Y)=-\frac{1}{\gamma r}\exp\left(-\gamma r\left(W+\frac{a_1^2}{2\gamma r^2a_2}+\Theta(Y)\right)\right).$$

可导出企业家实业项目执行投资前后两个阶段的最优消费和最优投资组合选择结果, 有下列结论.

**命题 2** 企业家在实业投资项目真实价值过程 $Y$ 首次达到投资临界值 $\bar{Y}$ 时执行该项投资期权. 在执行项目投资期权后, 最优消费和投资组合策略分别为

$$C^*(W)=r\left(W+\frac{a_1^2}{2\gamma r^2a_2}\right), \tag{12}$$

$$\pi^*(W)=\frac{a_1}{\gamma rWa_2}. \tag{13}$$

企业家在执行项目投资期权之前, 最优消费和投资组合策略分别为

$$C^*(W,Y)=r\Big(W+\frac{a_1^2}{2\gamma r^2a_2}+\Theta(Y)\Big), \tag{14}$$

$$\pi^*(W,Y)=\frac{a_1}{\gamma rWa_2}-\frac{a_3}{Wa_2}Y\Theta'(Y), \tag{15}$$

其中$(\Theta(Y),\bar{Y})$是下面自由边界问题的解, 即

$$r\Theta(Y)=\left(a_4-\frac{a_1a_3}{a_2}\right)Y\Theta'(Y)-\frac{1}{2}\gamma r\left(a_5-\frac{a_3^2}{a_2}\right)Y^2\Theta'(Y)^2+\frac{1}{2}a_5Y^2\Theta''(Y), \tag{16}$$

遵从无泡沫条件 $\Theta(0)=0$ 和边界条件 $\Theta(\bar{Y})=\bar{Y}-\tilde{m}_0,\ \Theta'(\bar{Y})=1$.

现在讨论命题 2 结论的经济学解释. 企业家在实业项目投资执行之后, 其投资就是参与金融市场的风险投资了, 他的最优消费和投资组合准则就是标准 Merton 型消费– 投资组合选择问题的解. 等式(13)给出了最优投资组合表达式是 CARA 效用下的标准均方形式的解. 相对于模型 Ⅰ, 企业家可以选择在风险股票上投资, 去追求更高的风险溢价, 因此企业家变得更加富有, 愿意把更多的财富用于消费, 具体反应在最优消费式(12)中第二项上, 为 $a_1^2/(2\gamma ra_2)$, 其中 $a_2>0$.

对于企业家执行实业项目投资之前的最优消费, 式(14)表明企业家的最优消费等于三项的年金值, 即企业家的金融财富、风险股票投资对应的风险溢价和实业投资项目的确定性等价财富. 相对于模型 Ⅰ 执行实业项目投资期权之前的最优消费公式, 由于企业家在风险股票上的投资, 使得企业家更加富有, 在其他条件不变的情况下愿意把更多的财富用于当前消费, 反映在式(14)的第二项. 另外, 理性企业家会拿出他的投资机会确定性等价财富 $\Theta(Y)$中一定的份额用于当前消费, 由式(14)的第三项给出.

对于执行实业项目投资期权之前的企业家最优投资组合选择问题, 因为项目回报与市场投资组合相关, 除了式(15)中右边第一项标准(Merton 均方项)外, 企业家需要风险股票用于对冲实业投资项目风险, 因此产生了式(15)右边第二项. 因为前面已经假设风险股票与项目投资回报、通胀均是相关的, 于是当$|a_3|$ 越大, 对冲需求就会越高; 同时, 如果 $\Theta'(Y)$越大, 对冲需求也会更强, 这也很直观的, 因为在执行实业项目投资期权

之前企业家持有一项不可交易资产的有价期权, 如果隐含期权价值对标的资产的价值变化更敏感, 自然就会有更大的对冲需求, 在风险股票上投资份额会加大. 另外, 类似命题 1 的讨论, 当项目资产价值为零时, 实物期权价值 $\Theta(0)=0$ 为命题 2 的无泡沫条件.

## 3　数值分析及经济学含义

现在具体分析通胀因素是如何影响最优消费和投资组合选择的, 模型 I 并没有考虑风险资产的投资, 于是将主要分析模型 II 给出的结果式(12)∼式(16). 为了更加直观, 下面将通过 MATLAB 数值模拟量化分析. 具体参数设定为 $\mu_{\mathrm{e}}=0.3, b_{\mathrm{l}}=0.02, \rho_{\mathrm{pl}}=\rho_{\mathrm{xl}}=\rho_{\mathrm{xp}}=0.5, \sigma_{\mathrm{e}}=\sigma_p=\sigma_{\mathrm{x}}=0.2, r=0.02, \alpha_{\mathrm{x}}=0.01$. 为了让消费和投资在数量上具有相同量级, 下面模拟中风险资产实际投资数量随通胀波动率不同而产生的变化, 这里统一假设企业家拥有财富为 $W=200, Y=25, \tilde{m}_0=15$, 模拟结果图 1 和图 2 所示.

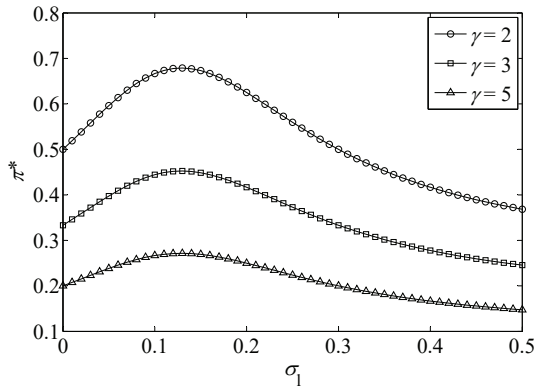


图 1 通胀波动率($\sigma_{\mathrm{l}}$)对最优组合投资($\pi^*$)的影响

Fig. 1 Effect of inflation volatility on the optimal portfolio

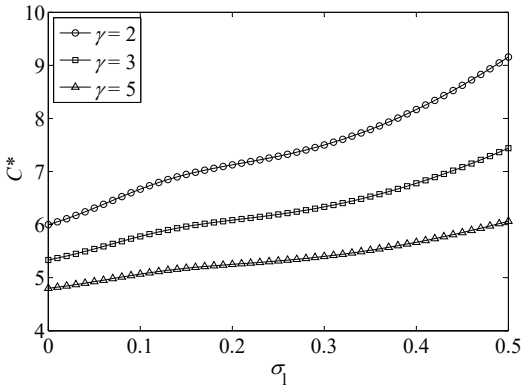


图 2 通胀波动率($\sigma_{\mathrm{l}}$)对最优消费($C^*$) 的影响

Fig. 2 Effect of inflation volatility on the optimal consumption

通过对执行期权后的最优消费和投资进行模拟, 可以得到相应结论如下.

图 1 描述了风险厌恶系数 $\gamma$ 分别为 2, 3 和 5 对应下的最优组合投资随通胀波动率的变化情形.

当通胀波动率 $\sigma_l$ 从 0 开始增加时, 企业家增加在股票上的投资, 当通胀波动率 $\sigma_{\mathrm{l}}$ 靠近 0.5, 企业家在股票上组合投资放缓. 因为对于中等风险厌恶程度高企业家, 通胀水平较低会适当促进收入增长, 企业家愿意把更多资产的投资于股票上, 追求更高的风险收益, 并且通过增加股票投资对冲通胀导致财富购买力下降的不利因素. 但是随着波动率增加并达到较高水平的时候, 会增加企业家对金融市场的担忧, 放缓投资. 在其他参数保持不变的情形下, 不同风险厌恶系数下对应的最优组合投资都会随企业家风险厌恶程度增大而减少, 这符合理性企业家的投资心理.

图 2 描述了风险厌恶系数 $\gamma$ 分别为 2, 3 和 5 对应的最优消费随通胀波动率变化曲线. 随着通胀波动率的不断增长, 消费开始快速增加逐渐增速放缓, 并在 $\sigma_{\mathrm{l}}$ 增加到靠近 0.5 时, 企业家的消费又快速增加, 这是由于当通胀波动率很小并且适度增加时, 市场发展形势良好, 企业家盈利能力增大, 在进行投资的同时也会刺激消费从而消费呈快速增长趋势, 但随着通胀不确定程度增加的过高时, 企业家担心投资盈利能力降低, 通过增加消费来对冲通胀贬值的风险. 在其他因素相同的情形下, 对风险更加厌恶的企业家是不愿意把更多的资产用于当期消费, 转而用于预防性储蓄.

由于最优投资和消费公式中均含有 $\Theta(Y)$相关的表达式, $\Theta(Y)$又是由式(16) 给出, 不易于获得解析解, 通过将式(16)化成数值模拟所需的标准化常微分方程, 方便了模拟. 为了对比分析有无投资机会对企业家的投资消费选择的影响, 下面将在同一风险厌恶系数($\gamma=4$)下研究实物期权执行前后的情形, 具体结果图 3 和图 4 所示.

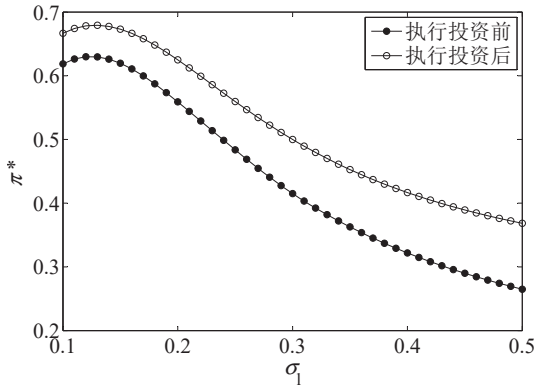


图 3 通胀波动率($\sigma_1$)对期权执行前后最优组合投资($\pi^*$)的影响

Fig. 3 Effect of inflation volatility on optimal portfolio before and after exercising the real option

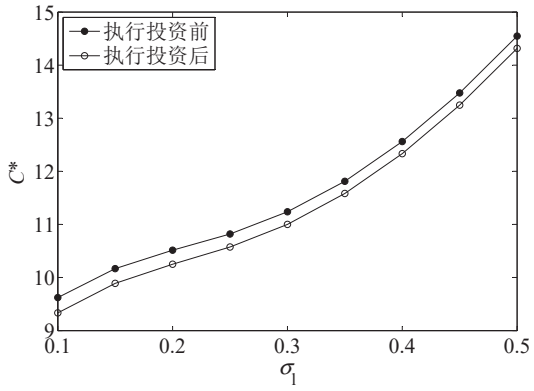


图 4 通胀波动率($\sigma_1$)对期权执行前后最优消费($C^*$)的影响

Fig. 4 Effect of inflation volatility on optimal consumption before and after exercising the real option

图 3 表明通胀波动率对企业家实业投资期权执行前后最优股票投资的影响走势总体上是一致的, 即随着通胀波动率 $\sigma_1$ 的增大(为了方便, 这里取 0.1 之后的情形), 股票投资比例呈先上升后下降的趋势, 最终趋于平缓, 无论通胀波动率 $\sigma_1$ 多大, 执行期权后的最优股票投资始终大于执行期权前的情形, 这是由于在执行期权前, 企业家拥有一项实业投资项目面临着来自非完备市场的风险, 需要更为审慎选择股票投资用于对冲该项目风险. 在实业项目投资执行之后, 由于执行投资时变现了手中的投资机会, 获得正向收益, 从而有更充裕的财富用于风险市场股票投资, 所以在风险股票上投资大于执行期权之前的情形.

图 4 表明通胀波动率对执行期权前后最优消费的影响走势整体上是一致的, 即随着通胀波动率从 0 开始增长, 消费是先快速增长, 然后逐渐减缓, 接近 0.5 时, 消费又快速增加, 这种现象表明, 当通胀水平较低时, 企业家认为通胀促进经济的增长, 实物投资未来的执行和风险资产的投资都会带来稳定甚至更高的收益, 从而大幅增加当前的消费; 当 $\sigma_1$ 进一步增长, 由于此时消费物价的大幅上涨, 当通胀波动率过高时, 为了对冲通胀给财富贬值的风险而增加消费. 图 4 也表明, 无论通胀波动率多大, 执行实业投资项目期权之前的最优消费始终大于执行期权之后的消费, 这是由于对于一个理性的企业家而言, 在期权执行之前手中拥有一项投资机会, 并且预期未来执行可以给自己带来稳定收益, 相对于没有投资机会的情形下, 必定会适度增加当前消费.

## 4 结束语

在实业投资项目不同阶段的消费和投资都会受到通胀的影响, 由于各种原因会导致在不同时期投资者会面临不同的通胀波动率, 企业家应根据通胀波动率的变化情况适时调整其消费和投资组合策略, 以减少投资收益不确定性的风险, 获得更大的收益. 本文考虑通胀不确定性, 研究了企业家在实业投资过程中的最优消费和组合投资策略选择问题, 利用随机分析方法, 得出了通胀下的企业家执行实业投资项目期权投资前后的最优消费以及允许对冲情形下的最优投资组合选择公式. 结果表明, 通胀过高或过低都会降低企业家的投资意愿, 不利于实体经济的发展, 温和通胀会促进经济的发展, 理性的企业家会增加消费和风险股票的投资, 风险厌恶程度低的企业家, 会更加积极追逐高风险溢价, 大幅提高风险股票投资; 然而随着通胀压力的增加, 会加大企业家对市场不确定收益的担忧, 减缓投资.

**参考文献:**

[1] Trigeorgis L. Real Option. Cambridge: The MIT Press, 1996.

[2] Merton R. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4): 373–413.

[3] Dixit A K, Pindyck R S. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994.

[4] Miao J J, Wang N. Investment, consumption, and hedging under incomplete markets. The Journal of Financial Economics, 2007, 86(3): 608–642.

[5] Chen X S, Yi F H. Investment, consumption and hedging with lump-sum payoff in finite horizon under incomplete market. Applicable Analysise, 2014, 93(3): 583–596.

[6] 杨金强, 杨招军, 石　峰. 企业家的最优投资消费与定价. 经济经纬, 2011 (3): 92–96.
Yang J Q, Yang Z J, Shi F. Entrepreneurial optimal investment, consumption and pricing. Economic Survey, 2011 (3): 92–96. (in Chinese)

[7] Hugonnier J, Morellec E. Corporate control and real investment in incomplete markets. Journal of Economic Dynamics and Control, 2007, 31(5): 1781–1800.

[8] Henderson V, Hobson D G. Real options with constant relative risk aversion. Journal of Economic Dynamics and Control, 2002, 27(2): 329–355.

[9] 阳　军, 孟卫东, 熊维勤. 不确定条件下最优投资时机和最优投资规模决策. 系统工程理论与实践, 2012, 32(4): 752–759.
Yang J, Meng W D, Xiong W Q. Optimal investment timing and investment scale decision making under uncertainty. Systems Engineering: Theory & Practice, 2012, 32(4): 752–759. (in Chinese).

[10] Miao J J, Wang N. Risk, uncertainty, and option exercise. Journal of Economic Dynamics and Control, 2011, 35(4): 442–461.

[11] Chen H, Miao J J, Wang N. Entrepreneurial finance and nondiversifiable risk. Review of Financial Studies, 2010, 23(12): 4348–4388.

[12] Liu Y, Yang J Q. Optimal investment of private equity. Finance Research Letters, 2015, 14: 76–86.

[13] Munk C, Sørensen C, Nygaard V T. Dynamic asset allocation under mean-reverting returns, stochastic interest rates, and inflation uncertainty: Are popular recommendations consistent with rational behavior. International Review of Economics and Finance, 2004, 13(2): 141–166.

[14] Bensoussan A, Keppo J, Sethi S P. Optimal consumption and portfolio decisions with partially observed real prices. Mathematical Finance, 2009, 19(2): 215–236.

[15] 戴国强, 张建华. 我国资产价格与通货膨胀的关系研究: 基于ARDL 的技术分析. 国际金融研究, 2009 (11): 19–28.
Dai G Q, Zhang J H. Research of the relationship between asset price and inflation: Based on ARDL technical analysis. International Finance Research, 2009 (11): 19–28. (in Chinese)

[16] 费为银, 李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究. 工程数学学报, 2012, 29(6): 799–806.
Fei W Y, Li S J. On study of optimal consumption and portfolio with inflation under Knightian uncertainty. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2012, 29(6): 799–806. (in Chinese)

[17] 费为银, 吕会影, 余敏秀. 通胀服从均值回复过程的最优消费和投资决策. 系统工程学报, 2014, 29(6): 791–798.
Fei W Y, Lü H Y, Yu M X. Study of optimal consumption and portfolio under inflation with mean-reverting process. Journal of Systems Engineering, 2014, 29(6): 791–798). (in Chinese)

[18] 费为银, 蔡振球, 夏登峰. 跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置. 管理科学学报, 2015, 18(8): 83–94.
Fei W Y, Cai Z Q, Xia D F. Dynamicasset allocation with inflation under jump-diffusion environment. Journal of Management Sciences in China. 2015, 18(8): 83–94. (in Chinese)

[19] 费为银, 李允贺, 夏登峰. 通胀下带激励的对冲基金最优投资. 系统工程理论与实践, 2015, 35(11): 2740–2748.
Fei W Y, Li Y H, Xia D F. Optimal investment strategies of hedge funds with incentive fees under inflationary environment. Systems Engineering: Theory & Practice, 2015, 35(11): 2740–2748. (in Chinese)

[20] Fei C, Fei W Y. Optimal control of Markovian switching systems with applications to portfolio decisions under inflation. Acta Mathematica Scientia, 2015, 35B(2): 439–458.

[21] 姚海祥, 姜灵敏, 马庆华, 等. 考虑通货膨胀因素下的连续时间均值–方差投资组合选择. 控制与决策, 2013, 28(1): 43–48.
Yao H X, Jiang L M, Ma Q H, et al. Continuous-time mean-variance portfolio selection under inflation. Control and Decision, 2013, 28(1) : 43–48. (in Chinese)

[22] 姚海祥, 伍慧玲, 曾　燕. 不确定终止时间和通货膨胀影响下风险资产的最优投资策略. 系统工程理论与实践, 2014, 34(5): 1089–1099.
Yao H X, Wu H L, Zeng Y. Optimal investment strategy for risky assets under uncertain time-horizon and inflation. Systems Engineering: Theory & Practice, 2014, 34(5): 1089–1099. (in Chinese)

[23] Kwak M, Lim B H. Optimal portfolio selection with life insurance under inflation risk. Journal of Banking & Finance, 2014, 46: 59–71.

[24] Siu T K. Long-term strategic asset allocation with inflation risk and regime switching. Quantitative Finance, 2011, 11(10): 1565–1580.

## 作者简介:

费 晨(1993—), 女, 安徽芜湖人, 博士生, 研究方向: 金融系统工程, Email: jasmine9366@163.com;

杜洪俊(1990—), 男, 安徽六安人, 硕士生, 研究方向: 金融数学, Email: 763426719@qq.com;

费为银(1963—), 男, 安徽芜湖人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融数学, 随机控制, Email: wyfei@ahpu.edu.cn;

闫理坦(1961—), 男, 黑龙江牡丹江人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 数学金融与风险分析, Email: litanyan@dhu.edu.cn.

## 附录 A

### 引理 1 的证明

$W_{\mathrm{N}}(t)$ 由式(1)定义, 令 $W(t)$表示 $t$ 时刻真实的财富值, 即 $W(t)=W_{\mathrm{N}}(t)/L(t)$. 然后, 对 $W(t)$运用 Itô 公式, 有

$$\mathrm{d}W(t)=W_{\mathrm{N}}(t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{L(t)}\right)+\left(\frac{1}{L(t)}\right)\mathrm{d}W_{\mathrm{N}}(t)+\mathrm{d}\left\langle W_{\mathrm{N}}(t),\frac{1}{L(t)}\right\rangle,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{L(t)}\right)=-\frac{1}{L(t)}\left\{\left(b_{\mathrm{l}}-\sigma_{\mathrm{l}}^2\right)dt+\sigma_{\mathrm{l}}\mathrm{d}B^{\mathrm{L}}(t)\right\},$$

$$\mathrm{d}\left\langle W_{\mathrm{N}}(t),\frac{1}{L(t)}\right\rangle=-\sigma_{\mathrm{l}}^2\frac{W_{\mathrm{N}}(t)}{L(t)}\mathrm{d}t=-\sigma_{\mathrm{l}}^2W(t)\mathrm{d}t,$$

把上述所得 $\mathrm{d}W_{\mathrm{N}}(t)$, $\mathrm{d}\left(\frac{1}{L(t)}\right)$和 $\mathrm{d}\left\langle W_{\mathrm{N}}(t),\frac{1}{L(t)}\right\rangle$ 的表达式直接代入计算可以得出式(2). 证毕.