第 28 卷第 3 期　系 统 工 程 学 报　Vol.28 No.3
2013 年 6 月　JOURNAL OF SYSTEMS ENGINEERING　Jun. 2013

描述不确定动态系统的新工具: 不确定微分方程

李圣国[1], 彭　锦[2*]
(1. 华中师范大学数学与统计学学院, 湖北 武汉 430079;
2. 黄冈师范学院不确定系统研究所, 湖北 黄冈 438000)

摘要: 不确定微分方程是由不确定过程驱动的一类微分方程, 是一种新的描述不确定动态系统的数学工具. 本文系统地介绍了不确定微分方程的研究现状. 概括了几类可求解析解的不确定微分方程, 并对不易求得解析解的不确定微分方程,介绍了一种求近似解的数值解法. 为了更好地用不确定微分方程描述不确定系统, 给出了不确定微分方程的存在唯一性定理和稳定性定理. 最后介绍了不确定微分方程在经济系统及金融系统等方面的应用.

关键词: 不确定理论; 不确定过程; 不确定微分方程; 不确定动态系统
中图分类号: O175　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1000−5781(2013)03−0419−08

Uncertain differential equation: A new mathematical tool to describe uncertain dynamic system

Li Shengguo[1], **Peng Jin**[2*]
(1. School of Mathematics and Statistics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079, China;
2. Institute of Uncertain Systems, Huanggang Normal University, Huanggang 438000, China)

Abstract: Uncertain differential equation driven by uncertain process is a new mathematical tool to describe the uncertain dynamic system. In this paper, the development of uncertain differential equation is surveyed systematically. Firstly, some types of uncertain differential equations which can be solved by analytic method are listed. For the uncertain differential equation which is difficult to obtain the analytic solution, a numerical method is introduced to obtain the approximate solution. Afterward some existence and uniqueness theorems and a stability theorem are summarized in order to describe uncertain dynamic system better. Finally, the applications of uncertain differential equation in the economic system, financial system and so on are introduced.

Key words: uncertainty theory; uncertain process; uncertain differential equation; uncertain dynamic system

1　引　言

微分方程是经典数学的一个重要分支, 常用来描述随时间变化的动态系统. 由于系统在变化过程中会受到一些未知因素的影响, 为更好地描述此类动态系统, 人们建立了许多重要的微分方程. 1951年, 在随机分析基础上, Ito[1] 提出了随机微分方程的概念. 此后随机微分方程理论不断发展和完善[2−4] 并被广泛应用于物理学, 系统科学, 管理科学和金融学等领域[5−10] . 模糊系统方面, 自从1965年 Zadeh[11]创立模糊集理论以来, 模

收稿日期: 2012−01−09; 修订日期: 2012−08−13.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874067); 湖北省自然科学基金资助项目(2010CDB02801); 湖北省教育厅科技创新团队资助项目(T201110).
*通信作者.

糊微分方程被许多学者研究[12−17]. 由于动态模糊集的微分与积分一般不满足互逆的“还原性”, 故其微积分问题以及相应的微分方程求解等问题都十分困难. 2008年 Liu[18]在可信性理论的框架下提出的模糊微积分克服了这一缺点. 随后, 基于该模糊微积分的模糊微分方程被建立并应用到金融系统[19−21].

然而, 大量调查表明, 系统中的不确定因素有时呈现出来的既非随机性也非模糊性, 即它们不能用概率测度、容度、模糊测度、可能性测度等来度量. 为了描述这类不确定现象, Liu[22] 创立了基于规范性、对偶性、次可加性和乘积公理的不确定理论. 作为处理主观判断或专家数据等不精确信息的新工具, 不确定理论已引起了越来越多学者的关注, 并在理论和应用方面得到了较好的发展[23−28].

为了描述随时间变化的不确定现象, Liu[29]首先给出了一类重要的不确定过程即典范过程. 同时定义了关于典范过程的不确定积分. 有时一些突发的事件, 像战争, 经济危机等可能导致不确定过程出现突然的改变, 产生带跳的不确定过程. 为了研究这类带跳的不确定现象, 不确定更新过程应运而生. Yao[30]定义了一类基于不确定更新过程的不确定积分. 此外, Chen[31] 在前面两个过程的基础上研究了样本轨道为有界变差函数的不确定有界变差过程, 建立了基于有界变差过程的不确定分析.

不确定微分方程是处理不确定环境下动态系统的一个重要工具, 是由不确定过程驱动的一类微分方程, 其解也是不确定过程. 2008 年 Liu 给出了一类由典范过程驱动的不确定微分方程. 为了很好地了解此类不确定微分方程的性质, 很多学者对它进行了研究. Chen 等[32]给出了一类解的存在唯一性定理, Liu 等 [33]对一类系数函数非李普希兹的不确定微分方程给出了一个解的存在唯一性定理. 为了使不确定微分方程能在现实中更好的应用, Liu[29]提出了稳定性的概念. 在求解不确定微分方程方面, 最先求得解析解的是线性不确定微分方程, Liu[34]列出了几类可求解析解的非线性不确定微分方程, Yao 等[35]提供了一种求解数值解的方法. 鉴于不确定环境下动态系统具有多样性的特点, Yao[30]定义了不确定更新过程驱动的不确定微分方程用来描述带跳的动态系统, Chen[31]给出有界变差过程驱动的不确定微分方程并讨论了其诸多性质.

本文主要对不确定微分方程的研究现状进行总结, 介绍了几类重要的不确定微分方程, 概括了不确定微分方程在解的求法、解的存在性、唯一性和稳定性方面的工作, 并总结了其在经济、金融等方面的应用.

2 基础知识

不确定理论最核心的概念是不确定测度、不确定变量、不确定分布和期望值. 不确定理论正是在这些核心概念的基础上发展成为了研究不确定性现象的数学分支. 下面介绍与不确定微分方程有关的知识.

定义 1 设 T 表示时间, $(\varGamma, \mathcal{L}, M)$ 是一个不确定空间, 一个不确定过程是从 $T \times (\varGamma, \mathcal{L}, M)$ 到实数集上的可测函数, 即对任意 $t \in T$ 和 Borel 集合 B 有

$$\{X_t \in B\} = \{\gamma \in \varGamma \mid X_t(\gamma) \in B\} \tag{1}$$

是一个事件.

定义 2 [29] 一个不确定过程 C_t 称为典范过程[1], 如果它满足

1) $C_0 = 0$, 几乎所有样本轨道是 Lipschitz 连续的;

2) C_t 具有稳态独立的增量;

3) 对于时间 t, 增量 $C_{s+t} - C_s$ 是一个具有期望 0 和方差 t^2 的正态不确定变量, 其不确定分布为

$$\varPhi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{-\pi x}{\sqrt{3}t}\right)\right)^{-1}, x \in R. \tag{2}$$

[1]典范过程和维纳过程都是描述随时间变化现象的工具. 它们的不同在于典范过程是一个不确定过程而且几乎所有的样本轨道是Lipschitz连续的, 而维纳过程是一个随机过程, 而且几乎所有的样本轨道是连续的.

定义 3 [29] 假设 X_t 是一个不确定过程, C_t 是一个典范过程, $a=t_1<t_2<\cdots<t_{k+1}=b$ 是 $[a,b]$ 的任意一个分割. 设 $\Delta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mid t_{i+1}-t_i\mid$, 若极限

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{k}X_{t_i}(C_{t_{i+1}}-C_{t_i}) \tag{3}$$

几乎处处存在且有限, 则称该极限是不确定过程 X_t 关于 C_t 的积分, 记为 $\int_a^b X_t\mathrm{d}C_t$, 此时称不确定过程 X_t 关于 C_t 是可积的.

假设 $h(t,\,c)$ 是一个连续可导的二元函数, 则 $X_t=h(t,\,C_t)$ 是一个不确定过程. Liu[29] 证明了下面的式(4).

$$\mathrm{d}X_t=\frac{\partial h}{\partial t}(t,\,C_t)\mathrm{d}t+\frac{\partial h}{\partial c}(t,\,C_t)\mathrm{d}C_t, \tag{4}$$

从而得到了链式法则、换元积分和分部积分公式.

3 不确定微分方程

不确定微分方程是由不确定过程驱动的微分方程,是描述不确定系统的新工具. 随机微分方程是由随机过程驱动的微分方程. 不确定微分方程和随机微分方程均属微分方程范畴, 都是描述随时间变化的动态系统的工具. 系统在随时间变化中, 会受到一些未知因素的影响, 若把未知因素看成是随机的, 则可选择用随机微分方程来处理此类动态系统, 若看成是不确定的, 则可选择不确定微分方程.

定义 4 设 C_t 是一个典范过程, f,g 是两个给定的函数, X_t 是一个未知的不确定过程, 则称

$$\mathrm{d}X_t=f(t,\,X_t)\mathrm{d}t+g(t,\,X_t)\mathrm{d}C_t \tag{5}$$

为不确定微分方程, 它的解是满足式(5)的不确定过程.

例 1 设 a,b 是两个实数, 则 $\mathrm{d}X_t=a\mathrm{d}t+b\mathrm{d}C_t$ 是一个不确定微分方程, 解为 $X_t=X_0+at+bC_t$.

例 2 设 μ_t,ν_t 两个可积的不确定过程, 不确定微分方程

$$\mathrm{d}X_t=\mu_tX_t\mathrm{d}t+\nu_tX_t\mathrm{d}C_t \tag{6}$$

称为齐次方程, 解为

$$X_t=X_0\exp\left(\int_0^t\mu_s\mathrm{d}s+\int_0^t\nu_s\mathrm{d}C_s\right). \tag{7}$$

3.1 解 法

给定一个不确定微分方程, 求出它的解是一个重要的问题, 下面是可求得解析解的不确定微分方程.

$$\mathrm{d}X_t=(\mu_{1t}X_t+\mu_{2t})\mathrm{d}t+(\nu_{1t}X_t+\nu_{2t})\mathrm{d}C_t, \tag{8}$$

$$\mathrm{d}X_t=f(t,\,X_t)\mathrm{d}t+\sigma_tX_t\mathrm{d}C_t, \tag{9}$$

$$\mathrm{d}X_t=\alpha_tX_t\mathrm{d}t+g(t,\,X_t)\mathrm{d}C_t, \tag{10}$$

$$\mathrm{d}X_t=f(t,\,X_t)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}C_t, \tag{11}$$

$$\mathrm{d}X_t=\alpha_t\mathrm{d}t+g(t,\,X_t)\mathrm{d}C_t, \tag{12}$$

其中 $\mu_{1t},\mu_{2t},\nu_{1t},\nu_{2t}$ 是可积的不确定过程, f 和 g 是二元函数, σ_t 和 α_t 是可积的不确定过程.

在很多情况下, 求不确定微分方程的解析解是一件很困难的事, 为此 Yao 等[35] 设计了一个求不确定微

分方程数值解的方法,该方法引入了 α–轨道的概念,把求不确定微分方程问题转化为求经典微分方程的问题.下面介绍这种数值方法.

定义 5 设 $\alpha \in (0,\,1)$ 是一个实数,称不确定微分方程

$$\mathrm{d}X_t = f(t,\,X_t)\mathrm{d}t + g(t,\,X_t)\mathrm{d}C_t \tag{13}$$

有一个 α 轨道 X_t^α,如果 X_t^α 是一般微分方程

$$\mathrm{d}X_t^\alpha = f(t,\,X_t^\alpha)\mathrm{d}t + \mid g(t,\,X_t^\alpha) \mid \varPhi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}t \tag{14}$$

的解,其中 $\varPhi^{-1}(\alpha)$ 是标准正态不确定变量的逆分布函数,即

$$\varPhi^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1. \tag{15}$$

定理 1 [35] 设 X_t 和 X_t^α 分别是不确定微分方程

$$\mathrm{d}X_t = f(t,\,X_t)\mathrm{d}t + g(t,\,X_t)\mathrm{d}C_t \tag{16}$$

的解和 α–轨道,对任意的 $t \geqslant 0$,有 $M\{X_t \leqslant X_s^\alpha\} = \alpha$, 即 X_t 有如下逆不确定分布

$$\varPsi_t^{-1}(\alpha) = X_t^\alpha, 0 < \alpha < 1. \tag{17}$$

基于上面α–轨道的概念和定理 1,下面给出求解不确定微分方程数值解的步骤.

步骤 1 选取 $\alpha \in (0,1)$;

步骤 2 解普通微分方程

$$\mathrm{d}X_t^\alpha = f(t,\,X_t^\alpha)\mathrm{d}t + \mid g(t,\,X_t^\alpha) \mid \varPhi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}t, \tag{18}$$

得到 X_t^α.解析解不易求时可用如下递推法

$$X_{i+1}^\alpha = X_i^\alpha + f(t_i,\,X_i^\alpha)\mathrm{h} + \mid g(t_i,\,X_i^\alpha) \mid \varPhi^{-1}(\alpha)\mathrm{h}, \tag{19}$$

其中 h 是步长;

步骤 3 得到解 X_t 的逆不确定分布 $\varPsi_t^{-1}(\alpha) = X_t^\alpha, 0 < \alpha < 1$.

以上介绍的是关于不确定微分方程及其求解法,下面讨论有关解的存在性、唯一性和稳定性问题.

3.2 存在唯一性和稳定性定理

定理 2 [33] 设f,g是二元函数,如果系数f,g满足Lipschitz 条件和线性增条件,即存在实常数 L 使得

$$\mid f(t,\,x) - f(t,\,y) \mid + \mid g(t,\,x) - g(t,\,y) \mid \leqslant \mathrm{L} \mid x - y \mid, \forall x,\,y \in R, t \geqslant 0 \tag{20}$$

$$\mid f(t,\,x) \mid + \mid g(t,\,x) \mid \leqslant \mathrm{L}(1 + \mid x \mid), \forall x \in R, t \geqslant 0, \tag{21}$$

则不确定微分方程 $\mathrm{d}X_t = f(t,\,X_t)\mathrm{d}t + g(t,X_t)\mathrm{d}C_t$ 有唯一的解,并且解是轨道连续的.

定理 3 [33] 如果系数 f,g 满足$\mid f(x) - f(y) \mid + \mid g(x) - g(y) \mid \leqslant \mathrm{L} \mid x - y \mid r(\mid x - y \mid^2), \mid x - y \mid < 1$,函数 $r:(0,\,1) \to [1,+\infty)$ 连续且对 $a \in (0,\,1)$,满足 $\int_0^a (sr(s))^{-1}\mathrm{d}s = +\infty$,则不确定微分方程 $\mathrm{d}X_t = f(X_t)\mathrm{d}t + g(X_t)\mathrm{d}C_t$ 有唯一的解.

定义 6 [29] 对任意 $\varepsilon > 0, t > 0$,如果任意解 X_t 和 Y_t 满足 $\lim\limits_{|X_0 - Y_0| \to 0} M\{\mid X_t - Y_t \mid > \varepsilon\} = 0$, 则称不确定微分方程为稳定的.

定理 4 [36] 设 μ_t, ν_t 是连续函数满足 $\sup\limits_{t \geqslant 0} \int_0^t \mu_s \mathrm{d}s < +\infty, \int_0^{+\infty} \mid \nu_t \mid \mathrm{d}t < +\infty$,则不确定微分方程 $\mathrm{d}X_t = \mu_t X_t \mathrm{d}t + \nu_t X_t \mathrm{d}C_t$ 是稳定的.

4　其它不确定微分方程

不确定微分方程是描述不确定环境下动态系统的工具, 由于不确定环境下动态系统具有复杂性和多样性的特点, 因此需要不同的不确定微分方程来刻画. 本节介绍两类不确定微分方程, 一类是由更新过程驱动的不确定微分方程即带跳不确定微分方程, 另一类是有界变差过程驱动的不确定微分方程.

4.1　带跳不确定微分方程

定义 7 [18]　设 $\xi_1, \xi_2, \ldots$ 是一列同分布的正不确定变量. 令 $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, 不确定过程

$$N_t = \max_{n \geqslant 0}\{n \mid S_n \leqslant t\} \tag{22}$$

称为更新过程.

不确定更新过程的样本轨道不是连续的, 而是单增右连续且取值为非负整数的阶梯函数.

定义 8 [30]　假设 X_t 是一个不确定过程, N_t 是一个不确定更新过程, $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = b$ 是 $[a, b]$ 的任意一个分割. 设 $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \mid t_{i+1} - t_i \mid$, 若极限

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} X_{t_i}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \tag{23}$$

几乎处处存在且有限, 则称该极限是不确定过程 X_t 关于 N_t 的积分, 记为 $\int_a^b X_t \mathrm{d}N_t$, 此时称不确定过程 X_t 关于 N_t 是可积的.

定义 9 [30]　设 C_t 是一个典范过程, N_t 是一个不确定更新过程, f, g, h 是给定的函数, X_t 是一个未知的不确定过程, 则称

$$\mathrm{d}X_t = f(t,\ X_t)\mathrm{d}t + g(t,\ X_t)\mathrm{d}C_t + h(t,\ X_t)\mathrm{d}N_t \tag{24}$$

为带跳的不确定微分方程, 它的解是满足式(24)的不确定过程.

例 3　设 a, b, c 是三个实数, 则 $\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}C_t + c\mathrm{d}N_t$ 是一个带跳不确定微分方程, 其解为 $X_t = X_0 + at + bC_t + cN_t$.

4.2　有界变差不确定微分方程

有界变差不确定微分方程由有界变差过程驱动, 有界变差过程的样本轨道是有界变差函数. 因为典范过程的样本轨道是李普希兹连续函数从而是有界变差函数, 故有界变差不确定微分方程可看成不确定微分方程的推广.

定义 10 [31]　一个不确定过程 A_t 称为有界变差过程, 如果它可以表示成两个非负增过程 U_t 和 V_t 的差

$$A_t = U_t - V_t. \tag{25}$$

定义 11 [31]　假设 X_t 是一个不确定过程, A_t 是一个不确定有界变差过程, $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = b$ 是 $[a,\ b]$ 的任意一个分割. 设 $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \mid t_{i+1} - t_i \mid$, 若极限

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} X_{t_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) \tag{26}$$

几乎处处存在且有限,则称该极限是不确定过程 X_t 关于 A_t 的积分, 记为 $\int_a^b X_t \mathrm{d}A_t$, 此时称不确定过程 X_t 关于 A_t 是可积的.

定义 12 [31]　设 A_t 是一个有界变差过程, f, g 是给定的函数, X_t 是一个未知的不确定过程, 则称

$$\mathrm{d}X_t = f(t,\ X_t)\mathrm{d}t + g(t,\ X_t)\mathrm{d}A_t \tag{27}$$

为有界变差的不确定微分方程, 它的解是满足式(27)的不确定过程.

例 4 设 a, b 是两个实数, A_t 是一个有界变差过程, 则 $\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}A_t$ 是一个有界变差不确定微分方程, 解为 $X_t = X_0 + at + bA_t$.

5 应 用

不确定微分方程在理论方面已得到了较大的发展. 此外, 作为处理不确定环境下动态系统的一个重要工具, 不确定微分方程在应用方面的优势也日益显现. 在不确定环境下, Liu[29]应用不确定微分方程来建立证券模型, 分析证券价格. 此后很多学者给出了其它一些重要的证券模型, 这些模型为不确定金融的发展打下了良好的基础. 下面介绍几个重要的证券模型.

5.1 几何证券模型

令 X_t 是债券价格, Y_t 是股票价格, 在股票价格服从几何典范过程的假设下, Liu [29]给出了如下不确定证券模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = rX_t\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}Y_t = eY_t\mathrm{d}t + \sigma Y_t\mathrm{d}C_t\,, \end{cases} \tag{28}$$

其中 r 是无风险利率, e 是漂移系数, σ 是扩散系数, C_t 是典范过程.

设交割时间为 s, 执行价格为 K, 则欧式买入期权的收益是 $(Y_s - K)^+$. 考虑到债券导致的时间价值, 期权收益的现值是 $\exp(-rs)(Y_s - K)^+$. 因此, 欧式买入期权价格应当是收益现值的期望值

$$f_c = \exp(-rs)\mathrm{E}[(Y_s - K)^+]. \tag{29}$$

类似分析, 欧式卖出期权价格为

$$f_p = \exp(-rs)\mathrm{E}[(K - Y_s)^+]. \tag{30}$$

按照如上欧式期权价格定义, Liu 计算出了交割时间为 s, 执行价格为 K 的欧式期权定价公式

$$f_c = \exp(-rs)Y_0\int_{K/Y_0}^{+\infty}\left(1+\exp\left(\frac{\pi(\ln y - es)}{\sqrt{3}\sigma s}\right)\right)^{-1}\mathrm{d}y, \tag{31}$$

$$f_p = \exp(-rs)Y_0\int_0^{K/Y_0}\left(1+\exp\left(\frac{\pi(es - \ln y)}{\sqrt{3}\sigma s}\right)\right)^{-1}\mathrm{d}y. \tag{32}$$

此外, 基于该模型, Liu 推广建立了不确定市场下多只证券的模型, Chen[37]给出了美式期权价格公式.

5.2 均值回归模型

令 X_t 是债券价格, Y_t 是股票价格, Peng 等[38]给出了一类新的不确定证券模型(33), 并推得了的欧式期权定价公式.

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = r_tX_t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}Y_t = (m - eY_t)\mathrm{d}t + \sigma Y_t\mathrm{d}C_t, \end{cases} \tag{33}$$

其中 r, m, e 和 σ 是给定的正常数.

该模型描述的是经济中常见的均值回归现象, 即当 $Y_t > m/e$ 时, 股票价格更有可能下跌; 当 $Y_t < m/e$ 时, 股票价格更有可能上涨. 从长期来看, 股票价格在 m/e 附近波动.

5.3 货币模型

设 X_t 是本国货币, 利率为 μ, Y_t 是国外货币, 利率为 ν, Z_t 是汇率, 则汇率服从几何典范过程下的货币模型为

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}Y_t = \nu Y_t \mathrm{d}t + \sigma Y_t \mathrm{d}C_t \\ \mathrm{d}Z_t = eZ_t \mathrm{d}t + \sigma Z_t \mathrm{d}C_t\,. \end{cases} \tag{34}$$

不确定微分方程在证券市场和货币市场的成功应用使不确定金融得到了很好的发展. 优化控制方面, Zhu[39]应用不确定微分方程应建立了不确定优化控制模型, Yao 等[40]提出了一类不确定优化模型并应用于生产库存系统. 不确定微分方程正在被广泛地应用于经济、金融等领域.

6 结束语

不确定微分方程是描述不确定动态系统的新工具. 本文总结了不确定微分方程的研究现状, 介绍了几类描述不确定动态系统的不确定微分方程, 总结了它们在经济、金融等方面的一些应用. 由于不确定微分方程是建立在不确定分析的基础之上, 所以可以继续研究更多更广义的不确定分析及其与之对应的不确定微分方程, 为不确定动态系统的研究提供更多有效的数学工具.

参考文献:

[1] Ito K. On stochastic differential equations[J]. Memory of American Mathematical Society, 1951, 4(1): 1–51.

[2] Gihman I, Skorohod A. Stochastic Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1974.

[3] Bernt O. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications[M]. 6th Edition. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[4] 彭实戈. 倒向随机微分方程及其应用[J]. 数学进展, 1997, 26(2): 97–112.
Peng Shige. The backward stochastic differential equations and its application[J]. Advances in Mathematics, 1997, 26(2): 97–112. (in Chinese)

[5] Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications[M]. New York: John Wiley, 1974.

[6] Elliott K. Mathematics of Financial Markets[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[7] 陈森发, 张文红, 张建坤, 等. 短期降雨预测的随机微分模型[J]. 系统工程学报, 2004, 19(3): 239–244.
Chen Senfa, Zhang Wenhong, Zhang Jiankun, et al. Short-term rainfall prediction of stochastic differential models[J]. Joumal of Systems Engineering, 2004, 19(3): 239–244. (in Chinese)

[8] 郭培栋, 陈启宏, 张寄洲. 随机利率下亚式双币种期权的定价[J]. 系统工程学报, 2010, 25(2): 235–240.
Guo Peidong, Chen Qihong, Zhang Jizhou. Asian quanto options pricing under stochastic interest rate[J]. Joumal of Systems Engineering, 2010, 25(2): 235–240. (in Chinese)

[9] 乌 画, 易传和, 杜 军, 等. 基于多元随机波动模型的信用风险衍生定价[J]. 管理科学学报, 2010, 13(10): 55–62.
Wu Hua, Yi Chuanhe, Du Jun, et al. Pricing credit risk with multivariate stochastic volatility model[J]. Joumal of Management Sciences in China, 2010, 13(10): 55–62. (in Chinese)

[10] 黎锁平, 白志文, 马成业, 等. 保费率交替变化的马氏调制风险模型[J]. 系统工程学报, 2011, 26(6): 752–759.
Li Suoping, Bai Zhiwen, Ma Chengye, et al. Markov modulated risk model with alternative premium rate[J]. Joumal of Systems Engineering, 2011, 26(6): 752–759. (in Chinese)

[11] Zadeh L. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338–353.

[12] Kaleva O. Fuzzy diffrential equations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 24(3): 301–317.

[13] James J. Solving fuzzy equations in economics and finance[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 48(3): 289–296.

[14] Hüllermeier E. An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzzyness and Knowledge-Based Systems, 1997, 5(2): 117–137.

[15] Diamond P. Stability and periodicity in fuzzy diffrential equations[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(5): 583–590.

[16] Lakshmikantham V, Mohapatra R. Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions[M]. New York: Taylor & Francis, 2003.

[17] 张卫国, 史庆盛, 肖炜麟. 考虑支付红利的可转债模糊定价模型及其算法[J]. 管理科学学报, 2010, 13(11): 86–93.
Zhang Weiguo, Shi Qingsheng, Xiao Weilin. Fuzzy pricing model of convertible bonds with dividends payment and its algorithm[J]. Joumal of Management Sciences in China, 2010, 13(11): 86–93. (in Chinese)

[18] Liu B. Fuzzy process, hybrid process and uncertain process[J]. Journal of Uncertain Systems, 2008, 2(1): 3–16.

[19] Peng J. A general stock model for fuzzy markets[J]. Journal of Uncertain Systems, 2008, 2(4): 248–254.

[20] Gao J. Credibilistic option pricing: a new model[J]. Journal of Uncertain Systems, 2008, 2(4): 243–247.

[21] Qin Z, Li X. Option pricing formula for fuzzy financial market[J]. Journal of Uncertain Systems, 2008, 2(1): 17–21.

[22] Liu B. Uncertainty Theory[M]. 2nd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[23] Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

[24] You C. Some convergence theorems of uncertain sequences[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(3-4): 482–487.

[25] Li X, Liu B. Hybrid logic and uncertain logic[J]. Journal of Uncertain Systems, 2009, 3(2): 83–94.

[26] Liu B. Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

[27] Gao X, Gao Y, Ralescu D. On Liu's inference rule for uncertain systems[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2010, 18(1): 1–11.

[28] Chen X, Ralescu D. A note on truth value in uncertain logic[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(12): 15582–15586.

[29] Liu B. Some research problems in uncertainty theory[J]. Journal of Uncertain Systems, 2009, 3(1): 3–10.

[30] Yao K. Uncertain calculus with renewal process[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2012, 11(3): 285–297.

[31] Chen X. Uncertain calculus with finite variation processes[C] // Proceedings of the 9th Annual Conference on Uncertainty. HongKong: Globe-Link, 2011: 66–75.

[32] Chen X, Liu B. Existence and uniqueness theorem for uncertain differential equations[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2010, 9(1): 69–81.

[33] Liu H, Fei W, Liang Y. Existence and uniqueness of solution for uncertain differential equations with non-Lipschitz coefficients[C] // Proceedings of the 3rd Intelligent Computing Conference. HongKong: Globe-Link, 2010: 6–12.

[34] Liu Y. An analytic method for solving uncertain differential equations[J]. Journal of Uncertain Systems, 2012, 6(4): 12–19.

[35] Yao K, Chen X. A numerical method for solving uncertain differential equations[C] // Proceedings of the 6th Intelligent Computing Conference. HongKong: Globe-Link, 2012: 145–152.

[36] Chen X. A review on uncertain differential equation[C] // Proceedings of the 3rd Intelligent Computing Conference. HongKong: Globe-Link, 2010: 53–58.

[37] Chen X. American option pricing formula for uncertain financial market[J]. International Journal of Operations Research, 2011, 8(2): 32–37.

[38] Peng J, Yao K. A new option pricing model for stocks in uncertainty markets[J]. International Journal of Operations Research, 2011, 8(2): 18–26.

[39] Zhu Y. Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model[J]. Cybernetics and Systems, 2010, 41(7): 535–547.

[40] Yao K, Qin Z. An uncertain control model with application to production-inventory system[C] // Proceeding of the 12th Asia Pacific Industrial Engineering and Management Systems Conference. Seoul: The Korean Institute of Industrial Engineers, 2011: 972–977.

作者简介:

李圣国(1979—), 男, 山东莱芜人, 博士生, 讲师, 研究方向: 不确定理论及其应用, Email: lisg@hgnu.edu.cn;

彭　锦(1961—), 男, 湖北黄冈人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 不确定理论及其应用, Email: pengjin01@tsinghua.org.cn.