

学习带边信息专家意见的在线投资组合策略

杨兴雨, 郑丽娜, 林虹, 黄帅*

(广东工业大学管理学院, 广东 广州 510520)

摘要: 针对以往学习专家意见的在线投资组合策略中专家策略并未考虑有助于提高投资者收益的边信息的不足, 选取在相同边信息状态下投资相同单只股票、不同边信息状态下可能投资不同单只股票的策略为专家意见, 基于指数加权平均算法(EWA)提出了学习带边信息专家意见的在线投资组合策略(EWAES). 然后, 从理论上证明了对任何的股票价格序列该策略都能够追踪最优专家意见. 最后, 采用中美金融市场实际股票数据对EWAES策略进行了数值分析, 结果说明了该策略的有效性.

关键词: 在线投资组合; 边信息; 专家意见; 指数加权平均算法

中图分类号: F830.59

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2024)01-0048-13

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2024.01.004

Online portfolio selection strategy by learning from expert advice with side information

Yang Xingyu, Zheng Lina, Lin Hong, Huang Shuai*

(School of Management, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: Previous online portfolio selection strategies by learning from expert advice often do not employ side information to improve the return of investors. This paper selects the strategies of investing in the same single stock under the same side information state and possibly investing in different single stocks under different side information states as the expert advice. Meanwhile, this paper proposes an online portfolio selection strategy by learning from expert advice with side information (EWAES) based on the exponentially weighted average algorithm (EWA). It is theoretically proved that the strategy can track the optimal expert advice for any stock price sequence. Finally, the numerical analysis for the EWAES strategy using the actual stock data of Chinese and American financial markets shows the effectiveness of this strategy.

Key words: online portfolio; side information; expert advice; exponentially weighted average algorithm

1 引言

投资组合选择是指投资者在不确定环境下将资金合理地分配于多种资产的决策问题, 受到了众多学者的广泛关注^[1-3]. 1952年, Markowitz^[4]提出了均值-方差投资组合选择模型, 揭开了现代投资组合理论研究的序幕. 不同于传统的均值-方差模型, 在线投资组合选择模型不对资产价格作任何概率假设, 投资者定期

收稿日期: 2020-12-29; 修订日期: 2022-04-25.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(72371080); 广东省基础与应用基础研究基金资助项目(2023A1515012840); 广东省哲学社会科学规划项目(GD23XGL022).

*通信作者

对资产头寸进行动态调整,在每一期的期初仅根据当前掌握的信息进行投资决策,当期获取的信息可以用于下一期期初的决策,如此循环,直至投资结束.这里的“在线”决策是相对于“离线”决策而言的,后者是指在获取全部信息后作出的事后决策.为了说明在线投资组合策略的性能,往往选取表现较好的离线策略作为基准策略,证明它可以追踪该基准策略,即其平均对数收益率渐近地趋向于基准策略的平均对数收益率.以往的在线投资组合策略大多根据当期掌握的资产价格历史数据构造投资比例,然而,在实际的投资过程中,投资者往往还知道一些诸如行业基本状况、市场情绪等有助于提高策略收益的市场信息.因此,本文考虑引入这些市场信息,构造在线投资组合策略.

在线投资组合问题得到了广泛和深入的研究. Cover^[5]最先将在线决策的思想引入投资组合问题中,设计了第一个泛证券投资组合策略(universal portfolios, UP). Helmbold等^[6]基于两个目标,即在每一期期初追踪上一期表现最好的股票及最小化与上一期投资比例的差距,设计了指数梯度策略(exponential gradient, EG). Gaivoronski和Stella^[7]认为市场是非平稳的,将随机优化的思想引入在线投资组合问题中,提出了连续定常再调整策略(successive constant rebalanced portfolios, SCRP). 随后,他们推广了上述研究成果,提出了一系列适应性投资组合选择策略^[8]. Agarwal等^[9]提出了在线优化的牛顿算法(online Newton step, ONS),从理论上证明了该算法具有泛证券性,并利用大量的数值算例说明了算法的实用性. 考虑到当股票数目较多时UP策略的计算难度高,张卫国等^[10]基于线性学习函数设计了一个在线投资组合策略LFM. O'Sullivan和Edelman^[11]考虑到UP策略可能需要很长时间才能取得显著增长,设计了适应性的UP策略,在保留UP策略大部分性能的同时提高了策略的早期性能. 李斌等^[12]基于次梯度投影算子,提出了一个具有线性时间复杂度的泛证券投资组合策略(sub-gradient projection, SGP). 针对高频调整资产头寸产生高额交易成本而导致累积收益不佳的问题,吴婉婷等^[13]设计了一个泛证券的半指数梯度投资组合策略(semi-exponential gradient, SEG). 通过适应性地预测资产价格, Guan和An^[14]提出了一种融合防御性策略和激进性策略的自适应学习投资组合模型,增强了策略的适应性和获利能力. Borodin等^[15]利用股票价格均值回复的思想,提出了一个在线投资组合策略Anticor,并通过数值分析说明了其在多个数据集上的收益均远远超过了BCRP策略. Li等^[16]利用市场的均值回归特性和机器学习中的在线被动主动学习技术,提出了被动主动均值回归策略(passive aggressive mean reversion, PAMR). Li等^[17]假设投资组合向量服从高斯分布,并按照市场的均值回归特性更新该分布,构造了置信加权均值回归策略(confidence weighted mean reversion, CWMR). Li等^[18]分别利用简单移动平均和指数移动平均的方法对股票价格进行预测,提出了两种在线移动平均回归策略(on-line moving average reversion, OLMAR). Huang等^[19]通过组合多个预测方法的预测值预测资产价格,设计了一个新颖的在线投资组合策略(combination forecasting reversion, CFR).

近年来,计算机科学中发展起来的专家学习算法为在线投资组合问题提供了一种新的方法. 专家学习算法是一种学习机制,它根据一组专家提供的决策给出一个综合的决策,并根据实际值不断调整策略,使之在不同情况下都能尽量接近最优的专家决策. Das和Banerjee^[20]将泛证券策略UP、EG、ONS和反转策略Anticor置于专家池中,通过元算法构建了在线梯度更新策略和在线牛顿更新策略,并证明所构造的策略能够接近最优的专家策略. 张永等^[21]将投资于单只股票的策略视为专家意见,基于弱集成算法提出了单一集成策略,进一步将投资于不同股票数目的策略视为专家意见,提出了混合集成策略,并分别证明提出的策略能够追踪最优专家策略. 指数加权平均算法^[22]是专家学习算法之一,本文将基于该算法构造学习专家意见的在线投资组合策略.

在现实投资过程中,投资者往往会搜集各种市场信息对资产头寸进行调整以获得更高的收益,这些信息被称为边信息. Cover和Ordentlich^[23]基于UP策略提出了考虑边信息的在线投资组合策略. Fagioli等^[24]将边信息引入到SCRP策略中,构造了混合连续定常再调整投资组合策略(mixture successive constant rebalanced portfolios, MSCRP). 杨兴雨等^[25]将边信息引入指数梯度策略,构造了带边信息的指数梯度策略(exponential gradient with side information, EGS),并从理论上证明了该策略是泛证券投资组合策略.

在以往的学习专家意见的在线投资组合策略中,专家并未考虑能够提高投资者收益的边信息,因此,本

文将在相同边信息状态下投资相同单只股票、不同边信息状态下可能投资不同单只股票的策略视为专家策略,利用专家学习算法综合考虑带边信息的专家意见,构造学习带边信息专家意见的在线投资组合策略,从理论上证明该策略的竞争性能,并利用中美金融市场实际股票数据检验策略的表现。

2 相关符号和概念

假设投资者可以自由地将资金分散投资于 m 只股票,整个投资期的期数有 n 期. 这 m 只股票第 t 期的相对价格向量用 $\mathbf{x}_t = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,m})$ 表示,其中 $x_{t,i}$ 为第 i 只股票在第 t 期的相对价格,即第 t 期收盘价与第 $t-1$ 期收盘价的比值, $t = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$. 整个投资期的相对价格向量序列为 $\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^n$,简记为 $\mathbf{x}^n$. 投资者在第 t 期的投资比例用 $\mathbf{b}_t = (b_{t,1}, b_{t,2}, \dots, b_{t,m})$ 表示,其中 $b_{t,i}$ 为第 i 只股票在第 t 期的投资比例. 所有可能的投资比例构成的集合记为 $\Delta_m = \{\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) : b_i \geq 0, \sum_{i=1}^m b_i = 1\}$. 整个投资期的投资比例构成的序列 $\{\mathbf{b}_t\}_{t=1}^n$ 称为一个在线投资组合策略,简记为 $\mathbf{b}^n$.

在整个投资期期初,一般采用均匀投资的方式,即 $\mathbf{b}_1 = (1/m, 1/m, \dots, 1/m)$. 之后每一期的期初仅使用当前掌握的信息构造投资比例 $\mathbf{b}_t, t \geq 2$. 对于第 t 期,相对价格向量为 $\mathbf{x}_t$,投资组合为 $\mathbf{b}_t$,投资者的资产变为原来的 $\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^m b_{t,i} x_{t,i}$ 倍. 那么,整个投资期的累积财富值为

$$S_n(\mathbf{b}^n) = S_0 \prod_{t=1}^n \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t = S_0 \prod_{t=1}^n \sum_{i=1}^m b_{t,i} x_{t,i}, \quad (1)$$

其中 S_0 表示初始财富值. 不失一般性,取 $S_0 = 1$.

在学习专家意见的在线投资组合策略中,在线投资组合策略 $\mathbf{b}^n$ 对应的最优专家策略记为 $\mathbf{b}^*$,二者的平均对数收益率分别为 $LS(\mathbf{b}^n, \mathbf{x}^n) = \sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t)/n$ 和 $LS(\mathbf{b}^*, \mathbf{x}^n) = \sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{x}_t)/n$. 如果在线投资组合策略 $\mathbf{b}^n$ 的平均对数收益率渐近于最优专家策略 $\mathbf{b}^*$ 的平均对数收益率,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{x}^n} [LS(\mathbf{b}^*, \mathbf{x}^n) - LS(\mathbf{b}^n, \mathbf{x}^n)] \leq 0, \quad (2)$$

则称该策略可以追踪最优专家策略.

下面介绍两种专家策略. 第一种专家策略为购买并持有策略(buy and hold, BAH),即投资者在买入股票后不再对股票作任何调整,直至投资期结束的投资策略. 最优的BAH策略是投资于表现最好的单只股票策略. 将全部资产投资于第 i 只股票的策略记为 $\mathbf{e}_i$,其最终累积财富值为 $S_n(\mathbf{e}_i) = \prod_{t=1}^n \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}_t = \prod_{t=1}^n x_{t,i}$. 最终累积财富值 $S_n(\mathbf{e}_i)$ 最大的BAH策略称为Best策略,记为 $\mathbf{e}^\diamond$,即

$$\mathbf{e}^\diamond = \arg \max_{i=1,2,\dots,m} S_n(\mathbf{e}_i). \quad (3)$$

第二种专家策略为定常再调整策略(constant rebalanced portfolios, CRP),即每一期期初均调整为相同的投资比例 $\mathbf{b}$ 的策略. 该策略的最终累积财富值为 $S_n(\mathbf{b}) = \prod_{t=1}^n \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_t = \prod_{t=1}^n \sum_{i=1}^m b_i x_{t,i}$. 最终累积财富值 $S_n(\mathbf{b})$ 最大的CRP策略称为最优定常再调整策略BCRP,记为 $\mathbf{b}^\diamond$,即

$$\mathbf{b}^\diamond = \arg \max_{\mathbf{b} \in \Delta_m} S_n(\mathbf{b}). \quad (4)$$

在投资决策过程中,投资者,尤其是机构投资者,不仅会使用资产价格历史数据,往往还会利用各种反映市场状况的边信息. 边信息的形式多种多样,例如机构投资者往往会开发一些处理市场信息的信号算法,这些信号算法生成的信号即为一种边信息,指示着即将面临的投资机会的性质. 假设边信息状态有有限种,其数量记为 k . 所有边信息状态构成的集合记为 $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots, k\}$,第 t 期的边信息状态记为 $y_t, y_t \in \mathcal{Y}$. 整个投资期的边信息状态构成的序列为 $\{y_t\}_{t=1}^n$,简记为 $\mathbf{y}^n$. 在第 t 期期初,投资者首先识别边信息状态 y_t ,再

根据该边信息状态进行相应的投资决策, 投资比例向量记为 $\mathbf{b}_t(y_t)$. 所有期的投资比例向量构成的序列记为 $\{\mathbf{b}_t(y_t)\}_{t=1}^n$, 简记为 $\mathbf{b}^n(\cdot)$, 则整个投资期的最终累积财富值为

$$S_n(\mathbf{b}^n(\cdot)) = \prod_{t=1}^n \mathbf{b}_t(y_t) \cdot \mathbf{x}_t. \quad (5)$$

如果带边信息的在线投资组合策略 $\mathbf{b}^n(\cdot)$ 的平均对数收益率渐近于最优的带边信息的专家策略 $\mathbf{b}^*(\cdot)$ 的平均对数收益率, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{x}^n, y^n} [\text{LS}(\mathbf{b}^*(\cdot); \mathbf{x}^n, y^n) - \text{LS}(\mathbf{b}^n(\cdot); \mathbf{x}^n, y^n)] \leq 0, \quad (6)$$

其中 $\text{LS}(\mathbf{b}^*(\cdot); \mathbf{x}^n, y^n) = \sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}^*(y_t) \cdot \mathbf{x}_t)/n$, $\text{LS}(\mathbf{b}^n(\cdot); \mathbf{x}^n, y^n) = \sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}_t(y_t) \cdot \mathbf{x}_t)/n$, 则称该策略可以追踪最优的带边信息的专家策略.

3 策略设计

本节采用指数加权平均算法对带边信息的专家意见进行综合考虑, 进而设计在线投资组合策略.

3.1 指数加权平均算法

指数加权平均(exponentially weighted average, EWA)算法是一种专家学习算法, 它依据专家过去的表现进行决策. 下面介绍基于收益的EWA算法. 在EWA算法中, 有两类决策者, 分别是专家决策者和在线决策者. 专家决策者针对具体决策问题给出意见, 在线决策者通过对众多专家决策者的意见加权平均进行决策. 用 Θ 表示专家集合, Γ 表示在线决策者和专家决策者的决策集合, Ω 表示实际结果集合. 在第 t 期, 在线决策者的决策记为 $\gamma_t \in \Gamma$, 专家 θ 的决策记为 $\gamma_t^\theta \in \Gamma$, $\theta \in \Theta$, 实际结果记为 $\omega_t \in \Omega$. 设收益函数为 π , 专家 θ 在第 t 期的收益为 $g_t^\theta = \pi(\gamma_t^\theta, \omega_t)$, 则过去 t 期的累积收益为 $G_t^\theta = \sum_{\tau=1}^t g_\tau^\theta$. 在第 t 期期初, 依据各专家在过去 $t-1$ 期的累积收益确定其权重, 具体地, 专家 θ 的权重为

$$w_t^\theta = \frac{\exp(\eta G_{t-1}^\theta)}{\sum_{\theta \in \Theta} \exp(\eta G_{t-1}^\theta)}, \quad (7)$$

其中 $\eta > 0$ 为学习率.

依据各专家权重对其决策意见进行加权平均, 得到在线者第 t 期的策略

$$\gamma_t = \sum_{\theta \in \Theta} w_t^\theta \gamma_t^\theta. \quad (8)$$

在线者第 t 期的收益为 $g_t = \pi(\gamma_t, \omega_t)$, 过去 t 期的累积收益为 $G_t = \sum_{\tau=1}^t g_\tau$.

关于指数加权平均算法的累积收益下界, 有如下结论.

引理 1 假设收益函数 $\pi = \pi(\gamma, \omega)$ 为关于 γ 的凹函数, 且取值于区间 $[a, 0]$, $a < 0$. 对于任意实际结果序列 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, 有

$$G_n \geq \max_{\theta \in \Theta} G_n^\theta - \frac{\ln N}{\eta} - \frac{\eta a^2 n}{8}, \quad (9)$$

其中 N 为专家集合 Θ 中元素的个数.

引理1将用于讨论本文构造的在线投资组合策略的竞争性能, 其证明见附录.

3.2 学习带边信息专家意见的在线投资组合策略

考虑到不同专家对边信息可能会有不同的决策意见, 投资者无法事先知道依赖哪些专家意见进行决策能够获得较高的收益, 本文将利用EWA算法综合考虑带边信息的专家策略, 构造学习带边信息专家意见的

在线投资组合策略. 首先, 选取带边信息的专家策略; 其次, 计算各专家策略的权重; 最后, 通过对专家策略加权平均得到在线投资者的策略.

本文选取的专家策略为在相同边信息状态下投资相同单只股票、在不同边信息状态下可能投资不同单只股票的策略. 在期初, 专家决策者识别当期的边信息状态. 如果当期的边信息状态与上一期的不同, 专家可能会将全部资产从一只股票调整到另一只股票上. 有 m 只股票, k 种边信息状态, 在每种边信息状态下都会有 m 种投资比例, 共有 m^k 个专家, 即专家集合 Θ 中专家的个数为 $N = m^k$.

对于在线投资组合问题, 选取收益函数 $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \ln(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})$. 边信息状态为 y 时, 专家 θ 的投资比例记为 $\mathbf{b}^\theta(y)$, $\theta \in \Theta$, $y \in \mathcal{Y}$. 在第 t 期期初, 首先, 识别当期的边信息状态 y_t , 获取各专家在当期边信息状态下的投资比例 $\mathbf{b}^\theta(y_t)$. 其次, 计算各专家在过去 $t-1$ 期内边信息状态为 y_t 时对应的累积对数收益, 记为 $G_{t-1}^\theta(y_t)$. 若过去尚未出现过边信息状态 y_t , 则 $G_{t-1}^\theta(y_t) = 0$; 否则, $G_{t-1}^\theta(y_t) = \sum_{\tau \leq t-1: y_\tau = y_t} \ln(\mathbf{b}^\theta(y_\tau) \cdot \mathbf{x}_\tau)$. 然后, 利用各专家的累积对数收益计算他们的权重, 根据式(7), 权重为

$$w_t^\theta = \frac{\exp(\eta_{y_t} G_{t-1}^\theta(y_t))}{\sum_{\theta \in \Theta} \exp(\eta_{y_t} G_{t-1}^\theta(y_t))}, \quad (10)$$

其中 η_{y_t} 表示边信息状态为 y_t 时的学习率.

最后, 计算在线投资者的投资比例, 根据式(8), 投资比例的更新公式为

$$\mathbf{b}_t = \sum_{\theta \in \Theta} w_t^\theta \mathbf{b}^\theta(y_t). \quad (11)$$

在线投资者的累积对数收益为 $G_t = \sum_{\tau=1}^t \ln(\mathbf{b}_\tau \cdot \mathbf{x}_\tau)$. 称这样的策略为学习带边信息专家意见的在线投资组合策略EWAES (exponentially weighted average learning from expert advice with side information). 具体算法步骤如下:

步骤1 初始化 $S_0 = 1$, $G_0^\theta(y) = 0$, $y \in \mathcal{Y}$, $t = 1$.

步骤2 接收第 t 期的边信息状态 y_t .

步骤3 各专家给出第 t 期的决策意见 $\mathbf{b}^\theta(y_t)$.

步骤4 计算第 t 期各专家的权重 $w_t^\theta = \frac{\exp(\eta_{y_t} G_{t-1}^\theta(y_t))}{\sum_{\theta \in \Theta} \exp(\eta_{y_t} G_{t-1}^\theta(y_t))}$.

步骤5 计算第 t 期在线者的投资比例 $\mathbf{b}_t = \sum_{\theta \in \Theta} w_t^\theta \mathbf{b}^\theta(y_t)$.

步骤6 获取第 t 期的相对价格向量 $\mathbf{x}_t = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,m})$.

步骤7 计算第 t 期投资者的累积收益 $S_t = S_{t-1} \times (\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t)$.

步骤8 更新第 t 期期末各专家在每种边信息状态下的累积对数收益

$$G_t^\theta(y) = \begin{cases} G_{t-1}^\theta(y) + \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_t), & y = y_t; \\ G_{t-1}^\theta(y), & y \neq y_t. \end{cases}$$

步骤9 当 $t = n$ 时, 结束循环并输出最终累积收益 S_n , 否则, $t \leftarrow t + 1$, 转至步骤2.

4 竞争性能分析

本节将从理论上分析EWAES策略的竞争性能, 即证明该策略可以追踪最优专家策略.

按照边信息状态, 将相对价格向量序列 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 分为 k 个子序列. 每个子序列中元素的个数记为 n_y , $y = 1, 2, \dots, k$, 则有 $\sum_{y=1}^k n_y = n$. 边信息状态 y 对应的子序列记为 $\{\mathbf{x}_{t_y}^y\}_{t_y=1}^{n_y}$, 相应的投资比例记为 $\{\mathbf{b}_{t_y}^y\}_{t_y=1}^{n_y}$. 通过EWA算法计算可得, 每个子序列的初始投资比例为 $\mathbf{b}_1^y = (1/m, 1/m, \dots, 1/m)$. 对于边信

息状态 y 对应的子序列, 专家 θ 在第 t_y 期的累积对数收益为 $G_{t_y}^{\theta,y} = \sum_{\tau_y=1}^{t_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{\tau_y}^y)$.

对于状态 y 对应的子序列, 根据式(10), 第 t_y 期专家 θ 的权重为

$$w_{t_y}^{\theta,y} = \frac{\exp(\eta_y G_{t_y-1}^{\theta,y})}{\sum_{\theta \in \Theta} \exp(\eta_y G_{t_y-1}^{\theta,y})}.$$

根据式(11), 第 t_y 期在线者的投资比例为

$$\mathbf{b}_{t_y}^y = \sum_{\theta \in \Theta} w_{t_y}^{\theta,y} \mathbf{b}^\theta(y).$$

在线者的累积对数收益为 $G_{t_y}^y = \sum_{\tau_y=1}^{t_y} \ln(\mathbf{b}_{\tau_y}^y \cdot \mathbf{x}_{\tau_y}^y)$.

对于任意的 t , 相对价格向量 $\mathbf{x}_t$ 乘以一个常数 $1/\max_i x_{t,i}$, 不会改变在线策略与专家策略对数收益的差值 $\ln(\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t) - \ln(\mathbf{b}^\theta(y_t) \cdot \mathbf{x}_t)$. 因此, 在下面的证明过程中可以不失一般性地假设每一期所有资产的相对价格最大值为1, 即 $\max_i x_{t,i} = 1$.

定理 1 假设每一期的相对价格向量具有正的下界 l , 即 $x_{t,i} \geq l > 0, t = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$, 则策略EWAES的最终累积对数收益满足

$$\sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t) \geq \sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}^\theta(y_t) \cdot \mathbf{x}_t) - \sum_{y=1}^k \left(\frac{k \ln m}{\eta_y} + \frac{n_y \eta_y (\ln l)^2}{8} \right). \quad (12)$$

证明 由 $x_{t,i} \geq l > 0$ 和 $\max_i x_{t,i} = 1$ 知, $\ln l \leq \ln(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \leq 0$. 对于边信息状态 y 对应的子序列 $\{\mathbf{x}_{t_y}^y\}_{t_y=1}^{n_y}$, 由引理1得

$$G_{n_y}^y \geq G_{n_y}^{\theta,y} - \frac{k \ln m}{\eta_y} - \frac{n_y \eta_y (\ln l)^2}{8}.$$

即

$$\sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) - \frac{k \ln m}{\eta_y} - \frac{n_y \eta_y (\ln l)^2}{8}. \quad (13)$$

对式(13)关于边信息状态 y 求和, 得

$$\sum_{y=1}^k \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \sum_{y=1}^k \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) - \sum_{y=1}^k \left(\frac{k \ln m}{\eta_y} + \frac{n_y \eta_y (\ln l)^2}{8} \right).$$

上式即式(12).

证毕.

当取 $\eta_y = \sqrt{8k \ln m / (n_y (\ln l)^2)}$ 时, 式(12)为

$$\sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t) \geq \sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}^\theta(y_t) \cdot \mathbf{x}_t) - \sum_{y=1}^k \sqrt{\frac{n_y k \ln m (\ln l)^2}{2}}. \quad (14)$$

式(14)表明, 当投资总期数 n 足够大时, 策略EWAES的平均对数收益率能够渐近于最优专家策略的平均对数收益率. 然而, 在实际的金融市场中, 相对价格向量可能不具有正的下界, 而且由于这是一个在线决策问题, n_y 也无法事先知道, 而学习率 η_y 的取值与相对价格向量的下界 l 和子序列的期数 n_y 均有关. 下面首先处理股票相对价格不存在正的下界的问题, 即 $0 \leq x_{t,i} \leq 1$. 对于每一种边信息状态 y , 令

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y = (1 - \alpha_y/m) \mathbf{x}_{t_y}^y + (\alpha_y/m) \mathbf{1},$$

其中 $\alpha_y \in (0, 1]$, $\mathbf{1}$ 表示每个元素均为1的 m 维向量, 并根据策略EWAES基于 $\tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y$ 构造投资组合 $\mathbf{b}_{t_y}^y$. 然后构造

投资比例

$$\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y = (1 - \alpha_y) \mathbf{b}_{t_y}^y + (\alpha_y/m) \mathbf{1}.$$

记该策略为EWAES'. 下面证明策略EWAES'的竞争性能.

定理 2 对 $\alpha_y \in (0, 1/2]$, 策略EWAES'的最终累积对数收益有

$$\sum_{t=1}^n \ln(\tilde{\mathbf{b}}_t \cdot \mathbf{x}_t) \geq \sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}^\theta(y_t) \cdot \mathbf{x}_t) - \sum_{y=1}^k \left(\frac{k \ln m}{\eta_y} + \frac{n_y \eta_y}{8} \left(\ln \frac{\alpha_y}{m} \right)^2 + 2\alpha_y n_y \right). \quad (15)$$

当 $\eta_y = \sqrt{8k \ln m / (n_y (\ln(\alpha_y/m))^2)}$, $\alpha_y = ((mk \ln m)/n_y)^{1/3}/2$ 时, 得

$$\sum_{t=1}^n \ln(\tilde{\mathbf{b}}_t \cdot \mathbf{x}_t) \geq \sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}^\theta(y_t) \cdot \mathbf{x}_t) - 2(mk \ln m)^{1/3} \sum_{y=1}^k n_y^{2/3}. \quad (16)$$

证明 对于边信息状态 y , 根据 $\max_i x_{t_y, i}^y = 1$, 有

$$\frac{\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y}{\mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y} = \frac{(1 - \alpha_y) \mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y + (\alpha_y/m) \sum_{i=1}^m x_{t_y, i}^y}{(1 - \alpha_y/m) \mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y + \alpha_y/m} \geq \frac{(1 - \alpha_y) \mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y + \alpha_y/m}{(1 - \alpha_y/m) \mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y + \alpha_y/m}.$$

由函数 $f(x) = \frac{(1-\alpha_y)x + \alpha_y/m}{(1-\alpha_y/m)x + \alpha_y/m}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减以及 $\mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y \leq 1$ 可得, $f(\mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq f(1)$, 即

$$\frac{(1 - \alpha_y) \mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y + \alpha_y/m}{(1 - \alpha_y/m) \mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y + \alpha_y/m} \geq 1 - \alpha_y + \alpha_y/m,$$

从而有

$$\ln(\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \ln(\mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y) + \ln(1 - \alpha_y + \alpha_y/m).$$

又由 $\ln(1 - \alpha_y + \alpha_y/m) \geq \ln(1 - \alpha_y) \geq -2\alpha_y$, $\alpha_y \in (0, 1/2]$, 有

$$\sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y) - 2\alpha_y n_y. \quad (17)$$

根据定理1以及 $\tilde{x}_{t_y, i}^y \geq \alpha_y/m$, 有

$$\sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}_{t_y}^y \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y) \geq \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y) - \frac{k \ln m}{\eta_y} - \frac{n_y \eta_y}{8} \left(\ln \frac{\alpha_y}{m} \right)^2,$$

从而有

$$\sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y) - \frac{k \ln m}{\eta_y} - \frac{n_y \eta_y}{8} \left(\ln \frac{\alpha_y}{m} \right)^2 - 2\alpha_y n_y. \quad (18)$$

根据 $\max_i x_{t_y, i}^y = 1$, 有

$$\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{t_y}^y = (1 - \alpha_y/m) \mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y + (\alpha_y/m) \mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{1} \geq \mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y,$$

因此有

$$\sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) - \frac{k \ln m}{\eta_y} - \frac{n_y \eta_y}{8} \left(\ln \frac{\alpha_y}{m} \right)^2 - 2\alpha_y n_y. \quad (19)$$

对式(19)关于边信息状态 y 求和, 即得式(15).

当取 $\eta_y = \sqrt{8k \ln m / (n_y (\ln(\alpha_y/m))^2)}$, 式(19)为

$$\sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) - \sqrt{\frac{n_y k \ln m}{2} \left(\ln \frac{\alpha_y}{m}\right)^2} - 2\alpha_y n_y. \quad (20)$$

由不等式 $(\ln x)^2 \leq 1/x, 0 < x \leq 1$, 得

$$\sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) - \sqrt{\frac{mn_y k \ln m}{2\alpha_y}} - 2\alpha_y n_y. \quad (21)$$

进一步取 $\alpha_y = ((mk \ln m)/n_y)^{1/3}/2$, 有

$$\sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) \geq \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) - 2(mk \ln m)^{1/3} n_y^{2/3}. \quad (22)$$

对上式关于边信息状态 y 求和, 即得式(16).

证毕.

由式(16)可知, EWAES' 策略的平均对数收益率渐近于最优专家的平均对数收益率. 但是, 仍然存在需要根据 n_y 预先选择学习率 η_y 的问题. 下面用分阶段的技巧处理这个问题, 处理的具体思路如下: 首先, 把每个子序列划分为若干个阶段, 把第一个含有 $2mk \ln m$ 期的连续投资期看作第 0 阶段, 把接下来包含 $2^i mk \ln m$ 期的连续投资期看作第 i ($i \geq 1$) 个阶段; 然后, 在每一个阶段开始时初始化投资组合向量, 即将每一个阶段的期初视为投资期的期初, 并按照 EWAES' 策略更新投资比例. 这样得到的策略称为分阶段的 EWAES' 策略.

定理 3 分阶段的 EWAES' 策略可以追踪最优专家策略.

证明 将边信息状态 y 对应的子序列被划分的阶段数记为 b_y , 它同时满足下面两个不等式:

$$\begin{aligned} n_y &> 2mk \ln m + 2mk \ln m + 2^2 mk \ln m + \cdots + 2^{b_y-1} mk \ln m, \\ n_y &\leq 2mk \ln m + 2mk \ln m + 2^2 mk \ln m + \cdots + 2^{b_y} mk \ln m. \end{aligned}$$

可得 $b_y = \lceil \log_2(n_y / (mk \ln m)) \rceil$. 根据定理 2, 有

$$\begin{aligned} \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\mathbf{b}^\theta(y) \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) - \sum_{t_y=1}^{n_y} \ln(\tilde{\mathbf{b}}_{t_y}^y \cdot \mathbf{x}_{t_y}^y) &\leq 2^{5/3} mk \ln m + 2mk \ln m \sum_{i=1}^{b_y} 2^{2i/3} \\ &\leq 6mk \ln m \left(1 + 2^{2b_y/3}\right) \\ &\leq 6mk \ln m \left(1 + \left(\frac{n_y}{mk \ln m}\right)^{2/3}\right). \end{aligned}$$

对上式关于边信息状态 y 求和, 有

$$\sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}^\theta(y_t) \cdot \mathbf{x}_t) - \sum_{t=1}^n \ln(\tilde{\mathbf{b}}_t \cdot \mathbf{x}_t) \leq 6mk^2 \ln m + 3(mk \ln m)^{1/3} \sum_{y=1}^k n_y^{2/3}.$$

对于最优专家策略 $\mathbf{b}^*(\cdot)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^n \ln(\mathbf{b}^*(y_t) \cdot \mathbf{x}_t) - \sum_{t=1}^n \ln(\tilde{\mathbf{b}}_t \cdot \mathbf{x}_t)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6mk^2 \ln m + 3(mk \ln m)^{1/3} \sum_{y=1}^k n_y^{2/3}}{n} = 0. \quad (23)$$

这说明分阶段的 EWAES' 策略的平均对数收益率渐近于最优专家策略 $\mathbf{b}^*(\cdot)$ 的平均对数收益率, 即分阶段的 EWAES' 策略能够追踪最优专家策略.

证毕.

5 数值分析

为了检验第 3 节设计的 EWAES 策略的竞争性能, 本节采用中美金融市场实际股票数据对策略进行数值

分析.

5.1 数据选取与参数设置

本节采用的测试数据选自国内外金融市场的三个数据集. 第一个是来自纽约证券交易所的数据集NYSE(O), 包含了从1962年7月3日至1984年12月31日5 651个交易日的交易数据. 该数据集被许多文献所采用(如, [5–8, 12–18, 20, 24, 25]), 是研究在线投资组合选择问题的标杆数据集. 第二个是来自纽约证券交易所的数据集NYSE(N), 包含了从1985年1月1日至2010年6月30日6 431个交易日的交易数据. 该数据集也被许多文献所采用(如, [14, 16–19]). 第三个是来自上海证券交易所的数据集SSE, 包含了从2006年1月4日到2019年12月31日3 404个交易日的交易数据, 该数据来源于Resset数据库. 对于每个数据集, 分别选取股票构造4个股票组合, 具体情况见表1.

表1 股票组合名称
Table 1 Names of stock combinations

(a) NYSE(O)		(b) NYSE(N)		(c) SSE	
组合	股票代码	组合	股票代码	组合	股票代码
组合1	Iroquois-Kin Ark	组合5	Kimb-Ingersoll	组合9	600104-600111
组合2	Comm Metal-Iroquois	组合6	Ford-Amer Brands	组合10	600150-600519
组合3	Ford-Kin Ark-Mei Corp-Iroquois	组合7	JNJ-IBM-GM-AHP	组合11	600016-600196-600406-600637
组合4	Lukens-Kin Ark-Kodak-JNJ	组合8	Alcoa-JNJ-HP-Kimb	组合12	600111-600519-600030-600518

在数值算例中, 根据该期的相对价格向量的均值是否大于1来确定当期的边信息状态, 具体地, 当该均值大于1时, $y = 1$; 反之, $y = 2$. 边信息状态集合为 $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$. 学习率的取值为 $\eta_y = 0.05$. 为了说明EWAES策略的竞争性能, 将其与已有的经典策略进行对比, 包括离线策略Market, Best, BCRP, 在线策略UP, EG, EGS. 对比策略所涉及的参数均按照原文献取值. 为了进一步说明考虑边信息的优势, 将专家策略不考虑边信息的EWAES策略也选为对比策略, 记为EWAE, 其学习率的取值也为 $\eta = 0.05$.

5.2 结果分析

首先, 分析EWAES策略的最终累积收益表现. 各策略在12个股票组合上的最终累积收益见表2. 对于每个股票组合, 各策略最终累积收益中的最大值被加粗标出. 从表2可以看出, EWAES策略在所有股票组合上均取得了最优的累积收益, 表现出了较大的优势, 远远超过了UP, EG, EWAE策略, 超过了离线的基准策略BCRP, 同时也超过了同样考虑边信息的在线策略EGS, 表明本文设计的策略性能较好, 可以适应不同的股票市场. 从表2还可以看出, 考虑边信息的EWAES策略与EWAE策略相比有较大的优势, 说明边信息可以有效地指导投资者进行投资决策, 获得更高的收益.

为了进一步说明所设计策略的性能, 分析策略的逐日累积表现. EWAES策略在股票组合2, 组合4, 组合6, 组合8, 组合10和组合12上的逐日累积对数收益见图1. 为了便于对比EWAES策略的性能, 在图1中同时列出了在线策略UP, EG, EWAE以及离线策略BCRP的逐日累积对数收益. 从图1可以看出, 在整个投资期前期, 各个策略的累积收益比较接近, 随着交易期数的逐期增加, 可以明显地看到EWAES策略的优势.

5.3 准确度对策略的影响

前面的讨论是基于投资者能够完全准确地判断边信息状态的假设, 然而在实际投资过程中, 投资者对边信息状态的判断并不一定完全准确. 因此, 下面讨论投资者在一定程度上能够准确判断边信息状态的情形. 投资者准确判断边信息状态的准确度记为 q . 该准确度用投资者准确判断边信息状态的概率刻画. 投资者判

表 2 各策略在不同股票组合上的最终累积收益

Table 2 Final cumulative return of the strategies on different stock combinations

Strategies	Market	Best	BCRP	UP	EG	EGS	EWAE	EWAES
组合1	6.52	8.92	73.70	38.67	64.43	1.97E+07	64.28	2.92E+07
组合2	24.38	52.02	83.24	44.78	53.82	4.69E+04	67.79	5.07E+04
组合3	10.70	22.92	149.31	60.65	89.45	1.44E+15	88.70	1.74E+15
组合4	7.97	17.22	57.03	26.24	34.29	1.31E+15	32.90	1.52E+15
组合5	19.73	19.78	29.32	24.43	28.74	951.46	28.74	971.48
组合6	9.63	9.92	16.06	12.82	15.65	1.11E+03	15.64	1.14E+03
组合7	16.45	43.87	43.87	12.47	11.31	458.89	11.40	466.74
组合8	17.48	43.87	51.09	19.69	20.49	1.97E+03	31.12	1.99E+03
组合9	22.49	29.37	35.61	28.24	33.05	129.21	33.03	130.45
组合10	51.11	96.38	96.38	42.20	38.00	380.14	38.00	386.12
组合11	11.53	18.69	23.98	15.88	17.43	47.69	17.46	47.91
组合12	38.44	96.38	104.05	46.34	50.52	216.94	50.66	216.98

断的边信息状态 y 与实际的边信息状态 $\hat{y}$ 相同的概率记为 $\Pr(y = \hat{y})$, 则

$$\Pr(y = \hat{y}) = q.$$

为了检验EWAES策略的适用性, 下面分析它在不同准确度水平下的表现. 在数值算例中, 对准确度 $q \in [0, 1]$, 在每一期期初在区间 $[0, 1]$ 上生成一个均匀分布的随机数 μ . 如果随机数 $\mu \leq q$, 所判断的边信息状态 y 是准确的; 否则, 所判断的边信息状态 y 是不准确的.

策略EWAES在组合2, 组合4, 组合6, 组合8, 组合10和组合12上的最终累积对数收益与准确度之间的关系见图2. 为了比较所构造策略的性能, 图2也列出了不同准确度下的对比策略的最终累积对数收益. 从图2可以看到, EWAES所获得的最终累积对数收益关于准确度单调递增, 即准确度越高, 策略的最终累积收益也越高. 从图2还可以看到, 当准确度超过一定数值时, 策略EWAES优于在线策略UP, EG和EWAE; 当准确度更大时, 它甚至优于离线的BCRP策略. 这表明即使投资者不能够完全准确地判断边信息状态, 只要达到一定的程度, 仍然可以获得比其它策略更高的收益.

6 结束语

考虑到投资者在决策时往往会参考各种市场信息, 本文研究了学习带边信息专家意见的在线投资组合策略. 通过利用指数加权平均算法综合考虑带边信息的专家意见, 构造了一个在线投资组合策略, 其中各专家的权重依据他们的历史表现确定. 从理论上证明了该策略可以追踪最优专家策略, 并利用中美金融市场真实股票数据对策略的性能进行了检验. 结果表明, 所构造的策略可以有效地利用边信息, 在不同数据集上均表现优异, 具有较好的性能. 然而, 本文考虑的边信息形式比较单一, 在今后的研究中将考虑更多的形式, 使模型更贴近实际的投资决策, 进一步提升策略的实用性.

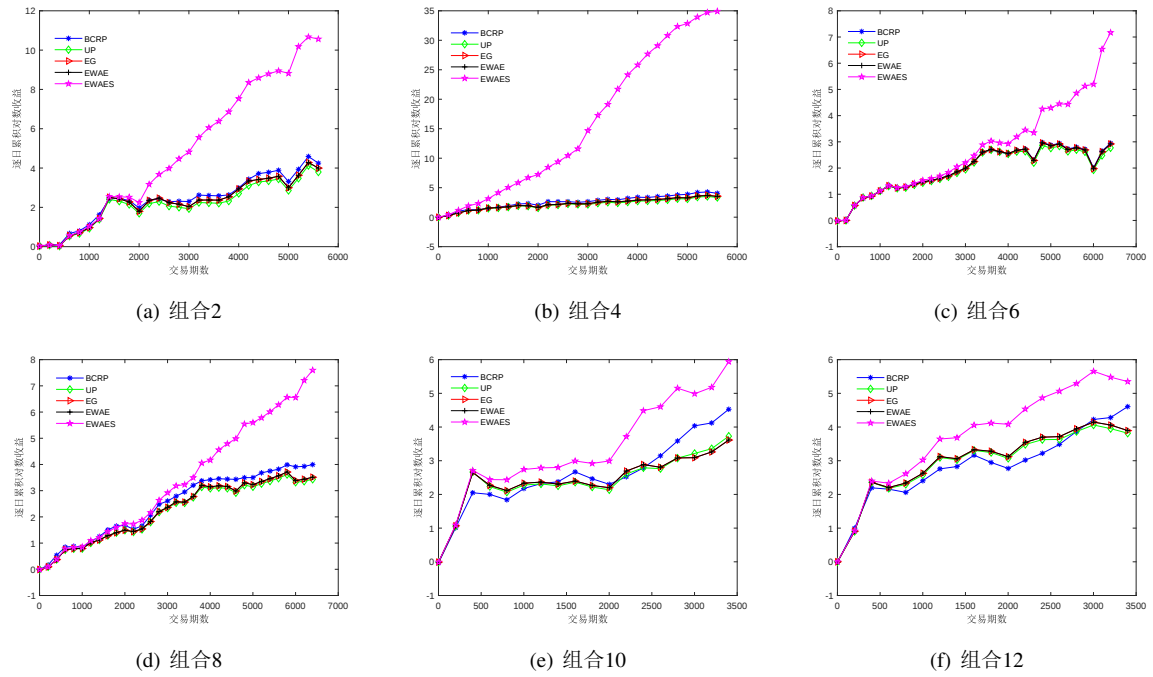


图1 各策略的逐日累积对数收益

Fig. 1 Daily cumulative logarithmic return of the strategies

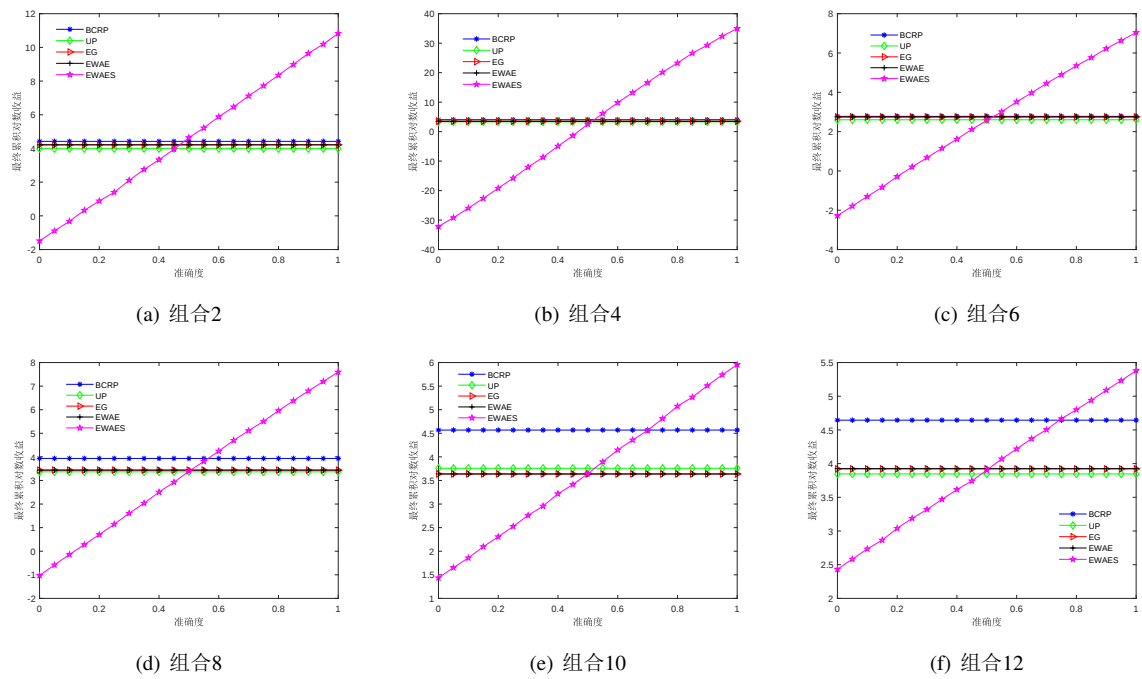


图2 准确度对策略EWAES的影响

Fig. 2 The impact of accuracy on the EWAES strategy

参考文献:

- [1] 康志林, 曾 燕. Minimax准则下带约束的最优投资组合策略. 系统工程学报, 2012, 27(5): 656–667.
Kang Z L, Zeng Y. Optimal portfolio strategy under minimax criterion with constraints. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(5): 657–667. (in Chinese)
- [2] 胡支军, 贺 阳. 考虑后悔厌恶的私募股权基金投资组合优化模型. 系统工程学报, 2018, 33(3): 365–377.
Hu Z J, He Y. Portfolio optimization with private equity funds considering regret aversion. Journal of Systems Engineering, 2018, 33(3): 365–377. (in Chinese)
- [3] 赵大萍, 房 勇. 基于VaR的风险平价投资策略及应用. 系统工程学报, 2020, 35(5): 623–631.
Zhao D P, Fang Y. VaR-based risk parity investment strategy and its application. Journal of Systems Engineering, 2020, 35(5): 623–631. (in Chinese)
- [4] Markowitz H. Portfolio selection. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77–91.
- [5] Cover T M. Universal portfolios. Mathematical Finance, 1991, 1(1): 1–29.
- [6] Helmbold D P, Schapire R E, Singer Y, et al. On-line portfolio selection using multiplicative updates. Mathematical Finance, 1998, 8(4): 325–347.
- [7] Gaivoronski A A, Stella F. Stochastic nonstationary optimization for finding universal portfolios. Annals of Operations Research, 2000, 100(1): 165–188.
- [8] Gaivoronski A A, Stella F. On-line portfolio selection using stochastic programming. Journal of Economic Dynamics Control, 2003, 27(6): 1013–1043.
- [9] Agarwal A, Hazan E, Kale S, et al. Algorithms for portfolio management based on the Newton method // Proceedings of the 23rd International Conference on Machine Learning. ACM, 2006: 9–16.
- [10] 张卫国, 张 永, 徐维军, 等. 基于线性学习函数的泛证券投资组合策略. 系统工程理论与实践, 2012, 32(8): 1647–1654.
Zhang W G, Zhang Y, Xu W J, et al. Universal portfolio based on on-line learning of linear function. Systems Engineering: Theory and Practice, 2012, 32(8): 1647–1654. (in Chinese)
- [11] O’Sullivan P, Edelman D. Adaptive universal portfolios. The European Journal of Finance, 2015, 21(4): 337–351.
- [12] 李 斌, 张 迪, 唐松慧. 基于次梯度投影的泛投资组合选择策略. 管理科学学报, 2018, 21(3): 94–104.
Li B, Zhang D, Tang S H. Universal portfolio selection strategy based on sub-gradient projection. Journal of Management Sciences in China, 2018, 21(3): 94–104. (in Chinese)
- [13] 吴婉婷, 朱 燕, 黄定江. 在线投资组合选择的半指数梯度策略及实证分析. 计算机应用, 2019, 39(8): 2462–2467.
Wu W T, Zhu Y, Huang D J. Semi-exponential gradient strategy and empirical analysis for online portfolio selection. Journal of Computer Applications, 2019, 39(8): 2462–2467. (in Chinese)
- [14] Guan H, An Z Y. A local adaptive learning system for online portfolio selection. Knowledge-Based Systems, 2019, 186: 1–10.
- [15] Borodin A, El-Yaniv R, Gogan V. Can we learn to beat the best stock. Journal of Artificial Intelligence Research, 2004, 21: 579–594.
- [16] Li B, Zhao P L, Hoi S C H, et al. PAMR: Passive aggressive mean reversion strategy for portfolio selection. Machine Learning, 2012, 87(2): 221–258.
- [17] Li B, Hoi S C H, Zhao P L, et al. Confidence weighted mean reversion strategy for on-line portfolio selection. ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data, 2013, 7(1): 1–38.
- [18] Li B, Hoi S C H, Sahoo D, et al. Moving average reversion strategy for on-line portfolio selection. Artificial Intelligence, 2015, 222: 104–123.
- [19] Huang D J, Yu S C, Li B, et al. Combination forecasting reversion strategy for online portfolio selection. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology, 2018, 9(5): 1–22.
- [20] Das P, Banerjee A. Meta optimization and its application to portfolio selection // Proceedings of International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. ACM, 2011: 1163–1171.
- [21] 张 永, 张卫国, 徐维军, 等. 集成有限个专家意见的在线投资组合策略. 系统工程理论与实践, 2015, 35(1): 57–66.
Zhang Y, Zhang W G, Xu W J, et al. Online portfolio selection strategy by aggregating finite expert advices. Systems Engineering: Theory and Practice, 2015, 35(1): 57–66. (in Chinese)
- [22] Cesa-Bianchi N, Lugosi G. Prediction, Learning, and Games. New York: Cambridge University Press, 2006.

- [23] Cover T M, Ordentlich E. Universal portfolios with side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1996, 42(2): 348–363.
- [24] Fagioli E, Stella F, Ventura A. Constant rebalanced portfolios and side-information. *Quantitative Finance*, 2007, 7(2): 161–173.
- [25] 杨兴雨, 何锦安, 张永, 等. 考虑边信息的在线投资组合指数梯度策略. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(1): 60–69.
Yang X Y, He J A, Zhang Y, et al. Exponential gradient strategy for online portfolio with side information. *Systems Engineering: Theory and Practice*, 2019, 39(1): 60–69. (in Chinese)

作者简介:

杨兴雨 (1981—), 男, 河南南阳人, 博士, 教授, 研究方向: 金融工程与在线金融决策, Email: yangxy@gdut.edu.cn;

郑丽娜 (1996—), 女, 广东汕尾人, 硕士生, 研究方向: 在线投资组合决策, Email: gdut_zln@163.com;

林虹 (1995—), 女, 广东梅州人, 博士生, 研究方向: 在线投资组合决策, Email: gdutlinhong@163.com;

黄帅 (1990—), 男, 江苏徐州人, 博士, 讲师, 研究方向: 金融决策, 数值优化, Email: huangsgdut@163.com.

附录

引理1的证明 令 $W_t = \sum_{\theta=1}^N \exp(\eta G_t^\theta)$, $t = 1, 2, \dots, n$, $W_0 = N$, 则有

$$\ln \frac{W_t}{W_{t-1}} = \ln \frac{\sum_{\theta=1}^N e^{\eta G_{t-1}^\theta} \cdot e^{\eta \pi(\gamma_t^\theta, \omega_t)}}{\sum_{\theta=1}^N e^{\eta G_{t-1}^\theta}} = \ln \sum_{\theta=1}^N w_t^\theta e^{\eta \pi(\gamma_t^\theta, \omega_t)}. \quad (24)$$

由Hoeffding引理知

$$\ln \sum_{\theta=1}^N w_t^\theta e^{\eta \pi(\gamma_t^\theta, \omega_t)} \leq \eta \sum_{\theta=1}^N w_t^\theta \pi(\gamma_t^\theta, \omega_t) + \frac{\eta^2 a^2}{8}. \quad (25)$$

由于 π 为凹函数, 有

$$\eta \sum_{\theta=1}^N w_t^\theta \pi(\gamma_t^\theta, \omega_t) + \frac{\eta^2 a^2}{8} \leq \eta \pi \left(\sum_{\theta=1}^N w_t^\theta \gamma_t^\theta, \omega_t \right) + \frac{\eta^2 a^2}{8} = \eta \pi(\gamma_t, \omega_t) + \frac{\eta^2 a^2}{8}. \quad (26)$$

由式(24)~式(26)得

$$\ln \frac{W_t}{W_{t-1}} \leq \eta \pi(\gamma_t, \omega_t) + \frac{\eta^2 a^2}{8}. \quad (27)$$

对式(27)关于 t 求和, 得

$$\ln \frac{W_n}{W_0} \leq \eta G_n + \frac{\eta^2 a^2 n}{8}. \quad (28)$$

另一方面,

$$\ln \frac{W_n}{W_0} = \ln \left(\sum_{\theta=1}^N e^{\eta G_n^\theta} \right) - \ln N \geq \ln \left(\max_{\theta \in \Theta} e^{\eta G_n^\theta} \right) - \ln N = \eta \max_{\theta \in \Theta} G_n^\theta - \ln N. \quad (29)$$

综合式(28)和式(29)可得式(9).

证毕.