

面向延时敏感投资者的KIA产品众筹周期与价格决策

王冬梅¹, 周文慧¹, 陈妍^{2*}

(1. 华南理工大学工商管理学院, 广东 广州 510641;

2. 湖南工商大学大数据与互联网创新研究院, 湖南 长沙 410205)

摘要: 以产品众筹为背景, 运用排队模型分析了keep-it-all (KIA)模式下延时敏感投资者的投资行为, 进而讨论了项目发起人实现单位时间利润最大化的最优项目周期和价格决策. 结果表明, 项目的单位时间利润随产品价格的增加和项目周期的延长呈单峰分布. 通过适当降低价格和延长周期或者提高价格和缩短周期能减小随机因素波动对项目单位时间利润的影响. 最后, 数值结果表明随机因素对利润的影响程度由高到低分别是项目履约率, 生产边际成本, 潜在投资者数量, 单位延时成本, 生产固定成本.

关键词: 众筹; 产品价格; 项目周期; 延时敏感; 排队经济学

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2022)01-0023-17

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2022.01.003

Reward-based crowdfunding project duration and product price decisions in KIA mechanism with delay-sensitive investors

Wang Dongmei¹, Zhou Wenhui¹, Chen Yan^{2*}

(1. School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;

2. Institute of Big Data and Internet Innovation, Hunan University of Technology and Business, Changsha 410205, China)

Abstract: This paper analyzes the investment behaviors of delay-sensitive investors in keep-it-all (KIA) mechanism for reward-based crowdfunding with a queueing model and examines the project sponsor's optimal decisions on project duration and product price to maximize the profit per unit time. The results show that the unit time profit is unimodal in the product price and project duration. Reducing price and extending cycle duration, or raising price and shortening cycle duration, can mitigate the impact of random factors on profit. Finally, numerical studies show that the key random factors in descending order in terms of the impact of project profitability are fulfillment rate of the project, marginal production cost, investor's potential arrival rate, unit delay cost and fixed production cost.

Key words: crowdfunding; product price; project duration; delay sensitive; queueing economics

1 引言

随着互联网技术和互联网金融的发展, 众筹平台为一些新公司或者新项目提供了一个全新的融资渠道, 能有效地解决当今时代资本过剩而有效投资不足的情况. 《国务院关于加快构建大众创业万众创新支撑平台的指导意见》国发〔2015〕53号文件明确定义众筹是通过互联网平台向社会募集资金, 满足产品开

收稿日期: 2019-08-27; 修订日期: 2021-01-18.

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(71925002); 国家自然科学基金资助项目(71731006; 71971080; 71601077).

发、企业成长和个人创业的融资需求的方式. 作为一种新兴的互联网金融模式, 众筹行业不断发展, 并涌现出多种新生众筹类型, 如产品众筹、物权众筹等, 本文的研究聚焦于目前实践中最为常见的众筹模式——产品众筹. 产品众筹是指投资人将资金投给筹款人用以开发某种产品(或服务), 待该产品(或服务)开始对外销售或已经具备对外销售的情况下, 筹款人按照约定将开发的产品(或服务)无偿或低于成本的方式提供给投资人的一种众筹模式. 根据众筹家旗下人创咨询所做的关于《中国众筹行业发展报告》显示, 从2016年至2018年上半年, 产品众筹平台数量占比一直较为稳定并处于领先水平, 在2017年数量高居首位. 另外, 就项目类型而言, 产品众筹项目的成功率一直保持在50%以上, 在所有项目类型中处于成功率较高水平. 虽然产品众筹项目融资额在所有项目类型中不占优势, 但其成功项目的超募率一直居于首位, 也就是说产品众筹项目的众筹结果往往超出预期, 投资者参与程度高.

现有的产品众筹筹资模式主要分为两类: AON (all-or-nothing) 模式和KIA (keep-it-all) 模式. AON 模式下项目发起方设置筹资目标金额, 除非最终达到预设目标, 否则已筹金额将全部返还给投资者; 而KIA模式的不同之处在于, 无论是否达到预设目标, 项目发起人都将获得已筹金额. 目前AON 模式和KIA模式分别为全球两大众筹平台Kickstarter和Indiegogo 所采用, 然而针对KIA 模式的研究较少. 对于规模较小且可调整的项目来说, KIA 模式更加灵活^[1]. 即使没有达到预期目标, 发起人也可以通过调整项目规模给予投资者回报, 可能更有利于实现中小企业的众筹目标.

以Indiegogo平台为例, KIA模式下的产品众筹流程如图1所示¹. 首先, 众筹项目主要有三个参与方: 发起人、支持者和平台. 发起人为有创新想法但缺乏资金的人, 支持者为对发起人项目感兴趣并有能力支持的人, 而平台则是连接发起人和支持者的网络终端. 发起人在平台上发布项目, 并为项目设置目标资金和筹款周期. 投资者在平台上查看项目情况以寻找感兴趣的投资项目, 若发现适合项目则对其进行投资. 平台作为一个信息交换和暂存资金的工作空间. 无论项目是否筹资成功, 发起人都将获得全部资金, 但必须按照约定在规定时间内为投资者提供相应的产品(或服务). 如不能履约, Indiegogo平台将禁止该众筹发起人再次使用Indiegogo平台.

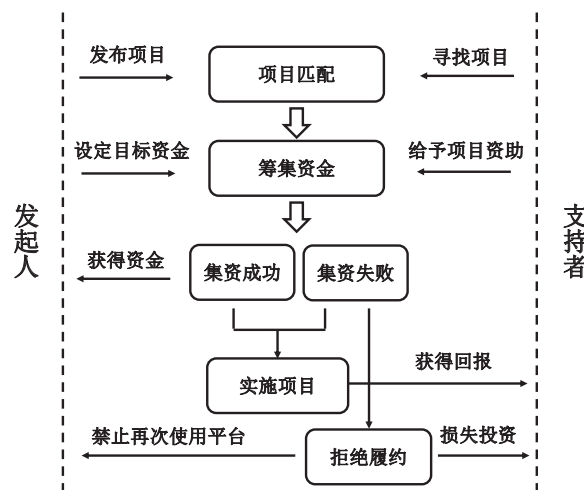


图1 KIA模式下产品众筹流程图

Fig. 1 Product crowdfunding flowchart under KIA mechanism

Indiegogo众筹平台成立于2008年, 截至2018年, Indiegogo已在全球覆盖超过220个国家和地区, 实现80万个项目成功上线发布, 筹集总金额达15亿美元². 实证数据显示, 2011年~2013年期间, 该平台上高达94.8%

¹<https://www.xinpianchang.com/e13499>

²<http://www.lysti.gov.cn/show.aspx?typeId=14id=19361>

的众筹项目采用KIA模式³。前文提到小规模项目更倾向于采用这种模式,对于这类项目的发起人来说,项目的利润是他们关注的焦点所在,而提高利润的关键在于提高投资者数量。影响投资者决策行为的因素很多,对于产品众筹来说首当其冲要考虑的因素是众筹产品的价格,价格是消费者衡量商品价值和品质的直接标准,一个合理但非最优定价可能使项目损失四分之一的流量⁴。其次,众筹项目的周期对于发起人和投资者来说也至关重要。一方面,对于小规模项目来说,众筹所得的金额可能是项目开展的唯一资金来源,因此若周期设置过短可能造成资金不足,过长又可能错过项目开展的最佳时机。另一方面,从投资者角度来看,周期越短越有利于保持投资者对项目的兴趣⁵,项目后期投资者参与的可能性更大⁶,周期越长投资者可能因为等待而对项目失去兴趣转而投资别的项目,这类投资者被称为延时敏感投资者。实证研究也发现众筹持续时间和项目成功率呈现一定的负相关关系^[2,3],即周期延长将负向影响投资者的参与意愿,因此在设置周期时考虑投资者的延时敏感这一特性是必要的。同时,较长融资期限也不利于产品众筹话题和关注度的保持,降低消费者对产品的期望效用^[2]。值得指出的是,本文提及的延时成本不同于其他模型里涉及的投资者时间成本。延时成本是一种传达时间对预期结果的影响的方式。用数学语言来说,它是总期望值对时间的偏导数。延时成本兼具紧急性和价值性⁷。而时间成本,特别是在关于众筹投资者时间成本的分析中,通常指投资特定项目带来的机会成本,包括金钱的时间价值、无法选择外部机会带来的负效用等^[4,5]。简单来说,时间成本只考虑了延时成本的价值性而忽略了紧急性。例如,当某一项目承诺花费1元即可获得一台电脑,但必须等待30天,而你只打算拥有一台电脑且在明天就要使用。若单纯考虑时间成本,1元的机会成本很低,你会选择投资该项目;但考虑到明天必须要用,延时成本的紧急性使得投资该项目成本极高,因而不会投资。投资者选择众筹产品时,对产品往往是有实际需求的,忽略需求的紧急性可能对投资者行为做出误判。因此考虑延时成本更合适。最后,不同于其他影响因素,产品价格和项目周期是在发布项目时便要决定的,是不可更改的。正是基于此,本文拟从项目发起人角度出发,利用排队经济学模型来分析投资者行为,并对产品众筹项目的周期与价格进行优化设计。

众筹项目是近几年才在管理实践中出现的一种商业模式,相应的研究也还处于初期阶段。与本文相关的研究工作主要可以从众筹项目投资者行为、众筹项目优化与决策及排队经济学下的产品定价等三个方面进行文献回顾。首先,回顾众筹项目中影响投资者入筹行为的相关研究后发现,主要影响因素可分为外在驱动因素和内在驱动因素。首先,外在驱动因素主要包括项目信息、他人决策行为、平台特征等客观因素。项目信息主要有持续时间、目标资金、图片数量、项目类别、投资者/支持者人数、更新次数和对其表现的评价^[6]。例如Mollick^[7]对国外众筹平台Kickstarter上48 500个项目进行分析后,发现目标金额、项目质量、项目种类、发起人社交网络、出资者评价等具有显著影响。杜黎等^[8]对国内众筹平台“众筹网”的奖励式众筹项目数据进行实证研究,发现项目更新次数、用户分享数、评论数、价格阶梯、支持数等因素对于用户参与行为有显著影响。这是因为用户分享的信息可以带来经济价值^[9],同时平台披露的项目相关信息有利于投资者在决策前了解其他投资者对于项目的评价,从而极易受到他人决策的影响,这种影响会产生所谓的“羊群效应”。Kuppuswamy等^[10]发现支持者的数量随时间增长通常呈现两种模式:“L”与“U”型。“L”型是指支持者数目随着时间流逝将逐渐减少;而“U”型则是在项目周期内,项目开始和接近结束阶段时投资人数最多,De Witt^[11]、Steinberg^[12]指出早期阶段的支持者通常是家人和朋友,而后期主要为陌生人。为减少众筹不确定性带来的风险,陌生人通常在项目已经成功或者接近成功的时候选择加入。这种现象已经在许多众筹领域出现,包括小额贷款^[13]、音乐项目^[14]和股权融资^[15]等。众筹平台作为众筹过程的参与主体之一,其自身带有的属性也将显著影响投资者决策,例如平台综合声誉、平台运作管理方式、网页设计等^[16]。其次,回报是

³<http://leeds-faculty.colorado.edu/bhagat/CrowdfundingModels-KeppItAll-AllorNothing.pdf>

⁴<https://weibo.com/ttarticle/p/show?id=2309404383828159379824>

⁵<https://www.twine.fm/blog/long-crowdfunding-campaigns-take/>

⁶<https://www.startups.com/library/expert-advice/key-crowdfunding-statistics>

⁷<http://blackswanfarming.com/cost-of-delay/>

投资者进行投资的内在驱动力,包括物质与非物质方面的回报. Dai等^[17]指出当项目的性质倾向于唤起消费者的亲社会动机时,项目将在前期更快地收集资金,也就是消费者的亲社会动机可能超越“羊群效应”带来的影响. Harms^[18]研究发现财务价值、功能价值、社会价值、情感价值这四个维度显著影响投资者行为. Gerber等^[19]、De Witt^[11]、Steinberg^[12]等人的定性研究发现回报是投资者参与众筹项目的重要动机之一. 针对产品众筹两种不同的众筹模式,黄健青等^[3]结合国内追梦网(类似于Indiegogo)的平台数据,发现两种模式下项目相关信息均对投资者行为有不同程度的影响,刘晓峰^[20]则发现“羊群效应”对于KIA模式的众筹项目影响更加显著. 总体而言,目前少有文章在KIA众筹模式下从投资者延时敏感的视角研究其投资行为,本文首次从此角度展开研究.

在已有的研究中,众筹项目优化与决策主要围绕产品定价展开. Hu等^[21]将众筹过程刻画为两阶段模型,从产品质量差异角度分析了发起人在收益最大化时的最优产品定价. 在Hu的基础上,邓万江等^[22]运用数学建模的方法,考虑众筹过程和众筹结束后产品销售两个阶段,分析了异质化顾客的效用函数,从而决定发起者最优的产品定价策略. 薛巍立等^[23]研究了当众筹企业的产品因被其他企业模仿而导致了市场竞争时,众筹企业应该如何定价来增加企业利润. 吕秀梅等^[24]研究兼顾增加发起人收益与提高项目众筹成功率的发起人定价决策,并运用比较静态方法探讨了发起人给支持者提供的增值服务和投资者的消费耐心程度因素对发起人定价决策的影响. 但除产品定价会影响企业利润外,吴文清等^[25]通过实证研究发现实际筹资额与筹资周期呈倒U型关系. 这表明项目周期的长短将会极大影响投资者的入筹行为,筹资周期过长,支持者可能会因失去兴趣或找到替代品而放弃投资. 因此本文在考虑实现企业最大化利润时,从产品价格和项目周期决策两个方面进行决策.

研究如何设置项目周期和价格来吸引延时敏感投资者,正是排队经济学所关注的问题. Naor^[26]在1969年第一次运用排队模型研究延时敏感对定价决策的影响,假设在M/M/1系统中,顾客的延时敏感性为一固定正常数,其延时成本为这一正常数与等待时间的乘积. 这样的设置方法至今被众多学者沿用. 针对延时敏感顾客, Lederer等^[27]分析了不同企业在定价、生产、调度、配送策略等多方面的竞争. Yu等^[28]在研究公司关于产品价格、交货时间和生产设施的产能投资的联合决策时考虑顾客延时敏感且具有异质性. 陈剑等^[29]考虑了等待敏感型顾客的选择行为,针对生产与需求都存在随机性的企业提出差异定价策略. 许明辉等^[30]基于战略顾客的等待特性,研究了制造商的成本削减及定价策略. 罗兵等^[31]考虑顾客等待行为建立了一种全新的特价商品EOQ模型. 类似的,邱晗光等^[32]在建立可控提前期下复杂部分短缺量拖后的库存模型也将顾客等待考虑在内. 李海南等^[33]研究排队系统中的顾客无法准确估计逗留时间时企业最优的承诺交付时间. 综上所述,在众多关于企业策略的研究中,延时都被作为考虑因素之一. 本文利用排队经济学模型来刻画延时敏感投资者的入筹决策,并最终给出产品众筹项目周期与价格的优化设计.

2 KIA模式产品众筹项目周期及价格决策模型

考虑一个KIA模式下的产品众筹项目,由于该模式的特性,项目筹资成功与否发起人均可继续实施项目,且目标金额较低的项目适合KIA模式^[18]. 为简化模型,本文将目标金额设置为0,众筹周期为 T ,众筹价格为 p . 潜在投资者的到达服从参数为 Λ 的泊松过程. 记众筹项目的上市时刻为时刻0. 因此只需要考虑在 $[0, T]$ 时刻到达的投资者. 投资者选择入筹且按时收到相应产品(或服务)后获得固定回报 R . 由于物流迟缓原因或项目发起人带来的道德风险等原因,某些项目不能完成对投资者的承诺,定义 $\beta(0 < \beta < 1)$ 为项目的实际履约率. 鉴于影响履约率的因素较复杂,因此外生这一因素的值. 投资者具有延时敏感性,其单位延时成本为 θ ,服从 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ 上的均匀分布, $F(\cdot)$ 、 $f(\cdot)$ 分别是其概率分布函数和概率密度函数. 延时成本为 θ 的投资者在时刻 x 到达,如果选择入筹的效用记为 $u(\theta, x)$,则有

$$u(\theta, x) = \beta R - p - \theta(T - x). \quad (1)$$

投资者如果不入筹则其效用为0. 假设投资者是理性的, 以最大化效用为目的做出入筹或离开的决策. 因此, 只有当 $u(\theta, x) > 0$, 即 $\theta < \theta_0 = (\beta R - p)/(T - x)$ 时, 投资者才会选择投资.

项目发起人在项目入筹结束后, 根据确认的订单数来组织生产. 生产成本包括两部分: 一是固定成本, 记为 c_f , 二是边际成本, 记为 c_v . 生产总成本可表示为 $c_f + c_v q$, 其中 q 为总产量. 项目发起人通过设置众筹项目周期和价格以最大化项目收益目标, 本文将收益目标设置为项目单位时间收益. 这是因为对于项目发起人来说, 延长周期总是有利于更多的投资者加入, 从而增加总利润. 但是考虑到众筹项目新增投资者主要集中在项目前期和后期, 中期增加的投资者数量不多. 周期越长, 吸引力较差的中期时段持续就越长, 为发起人带来了更多的管理工作而收益较低. Indiegogo 平台对项目的最佳周期建议为30天~40天, 而非越长越好. 因此为了体现发起人对于时间的考量, 选择以单位时间利润最大化作为发起人目标.

本文考虑一个两阶段博弈模型: 第一阶段, 项目发起人设定众筹项目的周期和价格, 第二阶段, 投资者根据发起人设定的周期和价格作出入筹决策. 模型求解采用逆向推演法, 首先分析投资者的入筹决策.

3 投资者入筹决策

记 $\lambda(x)$ 为系统达到稳态时 x 时刻选择入筹的投资者到达率, 关于到达率有下列结论.

定理1 给定众筹周期 T 以及产品价格 $p(< R)$,

1) 当 $0 < \beta \leq p/R$ 时,

$$\lambda(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq T. \quad (2)$$

2) 当 $p/R < \beta < 1$ 时,

① 如果 $T > \frac{\beta R - p}{\theta}$,

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq T - \frac{\beta R - p}{\theta} \\ \Lambda F(\theta_0), & T - \frac{\beta R - p}{\theta} < x < T - \frac{\beta R - p}{\theta} \\ \Lambda, & T - \frac{\beta R - p}{\theta} \leq x \leq T. \end{cases} \quad (3)$$

② 如果 $\frac{\beta R - p}{\theta} \leq T \leq \frac{\beta R - p}{\theta}$,

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \Lambda F(\theta_0), & 0 < x < T - \frac{\beta R - p}{\theta} \\ \Lambda, & T - \frac{\beta R - p}{\theta} \leq x \leq T. \end{cases} \quad (4)$$

③ 如果 $T < \frac{\beta R - p}{\theta}$,

$$\Lambda(x) = \Lambda, \quad 0 \leq x \leq T. \quad (5)$$

定理1表明履约率达到一定值后根据 T 以及 x 的不同取值情况, 投资者投资均衡可以分为三种不同的均衡结构, 如图2所示. 在均衡一中, 众筹时间 T 较长, 投资者行为分为三段: 在项目众筹初期, 没有投资者愿意进行投; 众筹中期, 单位时间投资者数目随着时间的推进而增加; 众筹后期, 单位时间投资者数目达到最大值. 在均衡二中, 众筹时间 T 适中, 前期单位时间投资者数目随时间推进而增加, 到一定时间节点, 单位时间投资者数目达到最大值, 并维持此速率到众筹周期结束. 在均衡三中, 由于众筹时间较短, 投资者都愿意从项目一开始便进行投资, 在整个众筹周期内, 单位时间投资者数目一直维持在最大值. 分析可知, 给定众筹

周期, 投资者有效到达率随时间推进而不断增加; 给定投资时刻, 项目众筹时间越长, 该时刻投资者的有效到达率越小.

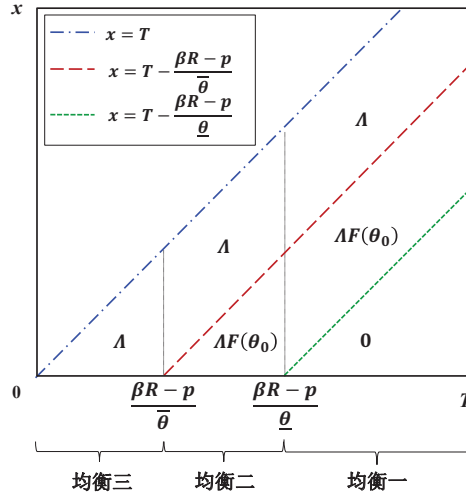


图2 $p/R < \beta < 1$ 情况下投资者投资均衡结构

Fig. 2 Investor investment equilibrium structure when $p/R < \beta < 1$

记 $Q(T, p)$ 为价格为 p 时, 众筹项目周期 T 内总入筹者数量的期望. 根据定理1有如下推论.

推论 1 给定众筹周期 T 以及产品价格 $p (< R)$,

1) 当 $0 < \beta \leq p/R$ 时,

$$Q(T, p) = 0. \quad (6)$$

2) 当 $p/R < \beta < 1$ 时,

$$Q(T, p) = \int_0^T \Lambda(x) dx = \begin{cases} \Lambda T, & T \leq \frac{\beta R - p}{\theta} \\ \frac{\Lambda}{\theta - \underline{\theta}} \left((\beta R - p) \ln \frac{\bar{\theta} T}{\beta R - p} - \underline{\theta} \left(T - \frac{\beta R - p}{\theta} \right) \right) + \Lambda \frac{\beta R - p}{\theta}, & \frac{\beta R - p}{\theta} \leq T \leq \frac{\beta R - p}{\underline{\theta}} \\ \frac{\Lambda(\beta R - p)}{\theta - \underline{\theta}} \ln \frac{\bar{\theta}}{\underline{\theta}}, & T > \frac{\beta R - p}{\underline{\theta}} \end{cases} \quad (7)$$

4 项目发起人决策

这一节将分析项目发起人的决策. 前文提到项目可能存在履约失败的情况, 原因主要有: 1) 发起人故意违约. 2) 由于物流迟缓等随机因素导致的无法按时履约, 在这种情况下发起人可以与投资者进行协商解决. 根据Ethan Mollick教授所做的一项独立研究⁸ 发现故意违约是造成履约失败的主要原因, 无法履约的项目中80% ~ 85%的项目未对投资者做出妥善处理. 本文中考虑众筹是中小企业获得融资的重要渠道, 发起人一旦故意违约将被禁止再次在Indiegogo平台发布项目. 因此假设发起人不会故意违约, 简化处理为不存在履约失败.

定义 $\pi(T, p)$ 为当周期为 T , 价格为 p 时众筹项目的单位时间利润, 则有

$$\pi(T, p) = \frac{(p - c_v)Q(T, p) - c_f}{T}. \quad (8)$$

⁸<https://www.kickstarter.com/fulfillment>

进一步地, 由于 $\beta \leq p/R$, 即当 $p \geq \beta R$ 时, 选择入筹的投资者人数始终为零, 发起人将不会有利润. 因此, 项目发起人会注意产品价格区间的设置, 决策问题可转化为如下优化模型

$$\begin{aligned} \text{Max}_{T,p} \pi &= \frac{(p - c_v)Q(T, p) - c_f}{T} \\ \text{s.t. } T &> 0, c_v < p < \beta R, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $Q(T, p)$ 由式(7)给出. 这个优化模型有两个决策变量, 采用序贯优化的方法, 先在给定价格 p 的情况下优化项目周期 T .

4.1 众筹项目周期决策

假定 p 已知, 记 $\tilde{\pi}(T) = \pi(T, p)$. 根据推论1, 则 $\tilde{\pi}(T)$ 变为如下分段函数

$$\tilde{\pi}(T) = \begin{cases} \tilde{\pi}_1(T) = (p - c_v)\Lambda - \frac{c_f}{T}, & T < \frac{\beta R - p}{\theta} \\ \tilde{\pi}_2(T) = \frac{p - c_v}{T} \left(\frac{\Lambda}{\theta - \underline{\theta}} \left((\beta R - p) \ln \frac{\bar{\theta} T}{\beta R - p} - \underline{\theta} (T - \frac{\beta R - p}{\theta}) \right) + \Lambda \frac{\beta R - p}{\theta} \right) - \frac{c_f}{T}, & \frac{\beta R - p}{\theta} \leq T \leq \frac{\beta R - p}{\underline{\theta}} \\ \tilde{\pi}_3(T) = \frac{1}{T} \left(\frac{(p - c_v)\Lambda(\beta R - p)}{\theta - \underline{\theta}} \ln \frac{\bar{\theta}}{\underline{\theta}} - c_f \right), & T > \frac{\beta R - p}{\underline{\theta}}. \end{cases} \quad (10)$$

为表述方便, 记 $a = c_f(\bar{\theta} - \underline{\theta})/(\Lambda(p - c_v)(\beta R - p))$. 关于 $\tilde{\pi}(T)$ 的性质有下列结论.

引理 1 1) $\tilde{\pi}_1(T)$ 是关于 T 的单调递增函数.

2) $\tilde{\pi}_2(T)$ 关于 T 的单调性分下面两种情况:

① 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} \leq e^a$ 时, $\tilde{\pi}_2(T)$ 是关于 T 的单调非减函数.

② 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 时, $\tilde{\pi}_2(T)$ 是关于 T 的先增后减函数, 在 $T_0 = (\beta R - p)e^a/\bar{\theta}$ 处取得极大值.

3) $\tilde{\pi}_3(T)$ 关于 T 的单调性分下面两种情况:

① 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} \leq e^a$ 时, $\tilde{\pi}_3(T)$ 是关于 T 的单调非减函数.

② 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 时, $\tilde{\pi}_3(T)$ 是关于 T 的单调递减函数.

引理 2 1) 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} \leq e^a$ 时, 项目的单位时间利润非正.

2) 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 时, 项目的单位时间利润随时间推进先增加后减小, 最大利润大于零.

值得注意的是, 引理2情况1)中尽管项目单位时间利润随周期延长而增大或保持不变, 但利润始终非正, 从项目发起人角度来看, 应该避免这种情况的出现. 观察到 a 中包含价格 p , 因此可通过产品价格的调节来实现这一目的. 关于设置项目的最优周期有下列结论.

定理 2 在 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 成立的情况下, 最佳的项目周期为 $T^* = (\beta R - p)e^a/\bar{\theta}$. 否则, 发起人将不会发起项目.

定理2表明为了达到单位时间利润非负且实现最大化, $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 是必要条件. 因为延时成本 θ 服从均匀分布, 该分布的方差能反映其值的波动程度. 方差的表达式为 $(\bar{\theta} - \underline{\theta})^2/12$, 即 $\underline{\theta}(\bar{\theta}/\underline{\theta} - 1)^2/12$, 因此 $\bar{\theta}/\underline{\theta}$ 在一定程度上反映了延时成本的波动程度. 当其比值越小, 整个投资者群体的延时敏感差异较小, 此时项目发起人偏向于设置更长的项目周期以达到利润最大化; 而当比值越大的时候, 投资者中部分群体延时敏感性较低, 而另一部分则敏感性偏高, 为了减少延时敏感性高支持者的流失, 项目发起人会缩短最佳众筹周期, 以减小这部分投资者的延时成本. 因此, 在这一必要条件约束下, 考虑到投资者的心理变化, 发起人要注意项目周期的设置适中.

另外, 假设模型外生参数分别为 $R = 12.5, \beta = 0.8, c_v = 1, c_f = 6, \Lambda = 6, \underline{\theta} = 2$, 图3展示了 $\bar{\theta} = 3, 4, 5$ 时项目周期与产品定价之间的关系, 随着产品定价增加, 项目周期不断缩短. 在一定程度上, 发起人会通过提高定价和缩短周期更加快速地筹得目标资金. 但很明显, 产品价格大幅增加会导致周期过短而不能保证足够的投资者数量. 因此, 产品价格也应该取一个适中值, 具体的验证将在下一节给出.

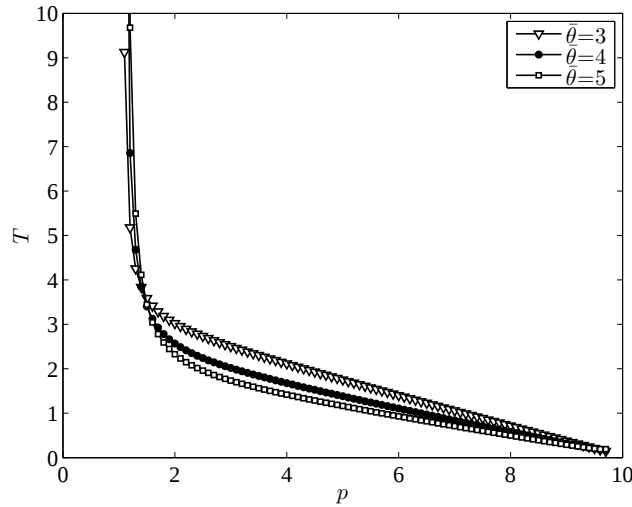


图3 最佳项目周期与产品价格的关系

Fig. 3 The relationship between the optimal project duration and the optimal product price

4.2 众筹项目价格决策

上一节的分析给出了在取得最大单位时间利润时项目的最佳周期. 需要注意的是, 不等式 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 是上述结论成立的必要条件, 决策模型转化为

$$\begin{aligned} \max_p \pi(T^*(p), p) &= \tilde{\pi}_2 \left(\frac{\beta R - p}{\bar{\theta}} e^a \right) \\ \text{s.t. } \bar{\theta}/\underline{\theta} &> e^a, c_v < p < \beta R. \end{aligned} \quad (11)$$

关于在周期最优情况下产品价格的最优解有下列结论.

定理3 当产品价格可行域非空时, 最优价格在 $((\beta R + c_v)/2, p_2)$ 内取得, 且

$$p^* = \arg \max_{p \in P} \pi(T^*(p), p), \quad (12)$$

其中 $p_2 = (R + c_v + \sqrt{(R + c_v)^2 - 4(Rc_v + b)})/2$, $b = c_f(\bar{\theta} - \underline{\theta})/(\Lambda \ln(\bar{\theta}/\underline{\theta}))$, P 为 $((R + c_v)/2, p_2)$ 内使得 $\frac{d\pi}{dp} = 0$ 的解的集合.

定理3指出最优价格存在于 p 的可行域内部, 这表明产品定价较低时, 边际利润较低, 难以达到发起人的目标; 而当定价较高时, 项目对投资者的吸引力降低, 无法保证足够的投资者数目, 从而加大实现单位时间利润最大化目标的难度.

因此, 综合定理2和定理3, 项目的单位时间利润随产品价格和项目周期增加都呈现出先上升后下降的趋势, 图4通过数值实验验证了这一趋势.

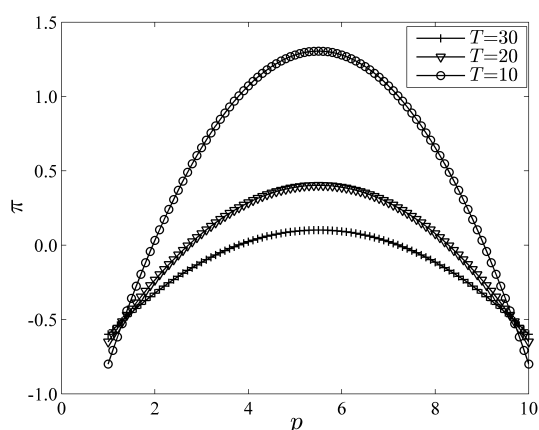
另外, 可以看出 $\bar{\theta}/\underline{\theta}$ 与 e^a 的大小关系与 p 的取值息息相关, 单位延时成本对于最优价格存在一定的影响. 不仅如此, 模型中其他的外生参数变量, 例如履约率、潜在投资者数量、生产边际成本、固定成本等都可能对项目发起人的决策产生影响. 因此, 下一节的研究将重点分析模型中的不确定因素将如何影响最优决策.

5 数值实验

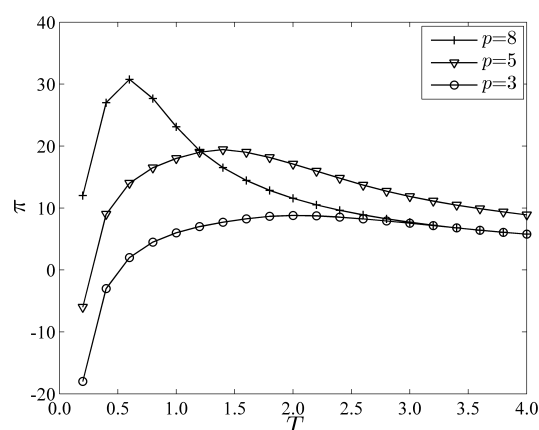
前面两节分析了顾客的投资决策以及相应的项目发起人的决策后, 本节的数值实验将探究履约率(β)、潜在投资者数量(Λ)、投资者的单位延时成本(θ) 及产品的生产成本(c_v, c_f)对最优决策的影响程度.

本节将以Indiegogo平台上KIA模式的众筹项目“Midea: The Window Air Conditioner, Reinvented”为例, 进

行数值分析. 该项目众筹时间为2020年2月17日至2020年3月18日, 共持续31天, 提供的产品为美的新出的一款U型窗式空调. 通过查找相关报告和文献, 模型中的参数进行了估计: 参考Zhou等^[34]的文章, 一台节能洗衣机为顾客带来的感知价值为2 300元人民币. 该文章分析的洗衣机与本案例中的窗式空调都是节能型家电, 因此其关于顾客感知价值的设置具有参考性. 关于单位延时成本的计算, Cost of Delay Divided by Duration(CD3)法中对于单位延时成本的计算为总延时成本/时间, 总延时成本的上限为感知价值 R 的取值, 应用CD3法计算出的单位延时成本作为其上限值, 参考文献[35]中采用的数据作为其下限值. 有报道指出, 美的小一匹空调的生产边际成本为1 700元人民币⁹, 一条生产线的建设需投资3 000万元人民币¹⁰, 分别对应本案例中的生产成本(c_v, c_f). 最后, Indiegogo网站的日均IP访问量达50万¹¹, 每位访客都可能成为网站项目的支持者, 即潜在投资者. 参考2015年度Kickstarter网站的履约率报告, 作为全球第二大众筹平台, Indiegogo网站的履约率被认为与之相近, 设为0.91¹². 将上述数据统一美元(USD)作为货币单位, 天作为时间单位, 得到本案例的数据模型中的参数设置如下: $R = 328\text{USD}$, $\beta = 0.91$, $c_v = 242\text{USD}$, $c_f = 4\,279\,600\text{USD}$, $\Lambda = 500\,000$ 人次/天, $\bar{\theta} = 10\text{USD/天}$, $\underline{\theta} = 2\text{USD/天}$. 按照单因素分析方法, 改变其中一个因素的变动范围, 其他因素保持不变, 以此探究该因素对最优决策的影响程度. 首先, 图5展示了外生参数在上述取值的[0.85,1.07]范围内变动时对发起人单位时间利润的影响.



(a) 项目单位时间利润随产品价格变化情况

(a) Unit time profit of the project varies with p 

(b) 项目单位时间利润随周期变化情况

(b) Unit time profit of the project varies with T

图4 项目的单位时间利润

Fig. 4 Unit time profit of the project

可以看出, 影响程度由高到低分别是履约率(β)、生产边际成本(c_v)、潜在投资者数量(Λ)、投资者的延时敏感性(θ)及固定成本(c_f). 下文将一一分析这些因素是如何影响最优决策的.

5.1 履约率的影响

履约率代表了投资者如期获得回报的概率, 对投资者的效用有直接影响, 从而影响其投资意愿. 图6展示了履约率在(0.8,1)范围内变动时对于项目最优决策的影响. 最优周期和产品价格的变化呈现单调性, 履约率越大, 最优周期缩短, 产品价格上升. 因为履约率越高给投资者传递更为积极的信号, 即便发起人提高价格和缩短周期, 投资者也愿意参与.

⁹<http://www.people.com.cn/BIG5/jinji/32/176/20020426/717913.html>

¹⁰http://www.sohu.com/a/127902306_177747

¹¹https://zhuanlan.zhihu.com/p/30360970?from_voters_page=true

¹²<http://tech.sina.com.cn/i/2015-12-08/doc-ifxmhqac0201635.shtml>

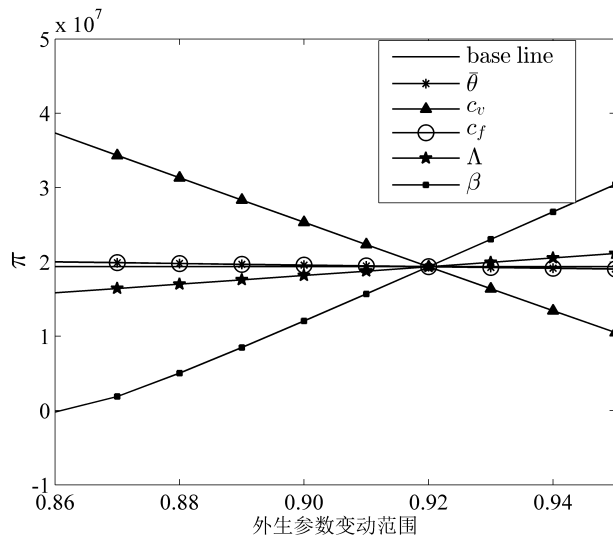


图 5 项目单位时间利润与外生参数的关系

Fig. 5 Relationship between the project unit time profit and the exogenous parameters

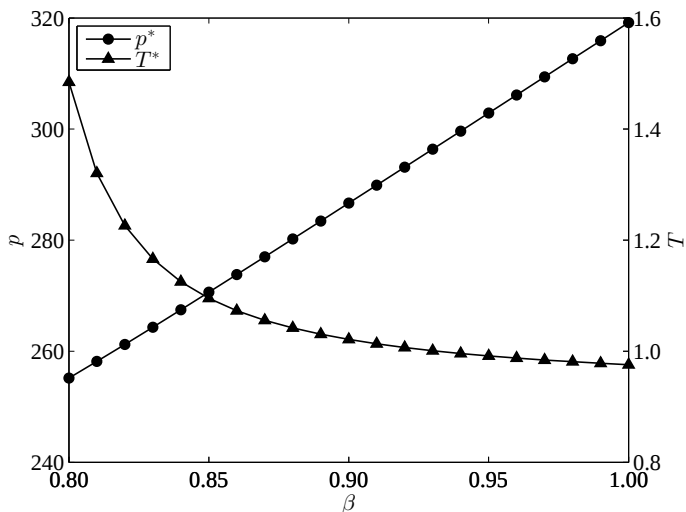


图 6 最优决策与履约率的关系

Fig. 6 The relationship between the optimal decision and the fulfillment rate

5.2 潜在投资者数量的影响

投资者的数量将直接影响众筹项目利润. 当项目发布在众筹平台上时, 浏览、关注到项目的人越多, 最终的支持者数量也就可能更多, 众筹成功的可能性越大. 如果投资者以一定的概率会支持某个项目, 当潜在投资者数量增加时, 则该项目有更大的可能获得更多的支持者. 这种情况下, 项目发起人会倾向于提高产品价格, 同时缩短项目周期, 期望以更快的时间筹得更多的资金. 图7展示的最优决策的变化情况验证了上述猜想.

5.3 单位延时成本的影响

在本文的研究中, 考虑了投资者的延时敏感性对其投资决策的影响, 这种敏感性因人而异, 因而具有很大的随机性与不确定性. 前面假设投资者的单位延时成本是服从一定范围内的均匀分布, 用均值代表投资者总体的延时成本, 方差代表投资者群体的异质程度. 已知均匀分布的均值为 $(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$, 方差为 $(\bar{\theta} - \underline{\theta})^2/12$. 下面将分别探究单位延时成本均值和方差对最优决策的影响, 揭示延时成本的大小和投资者异质程度对于

最优产品价格和项目周期的影响情况, 如图8所示.

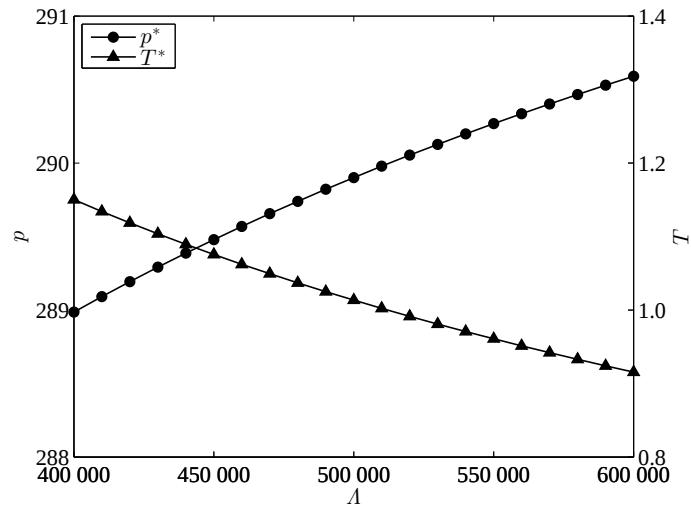
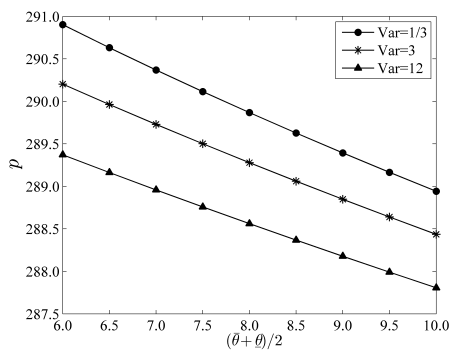


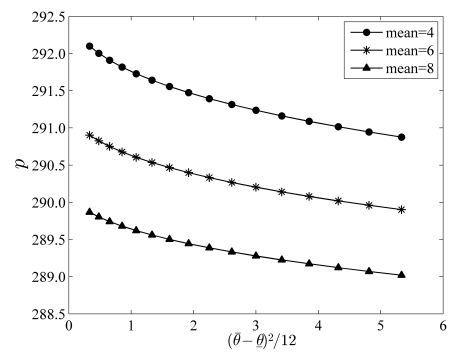
图 7 最优决策与潜在投资者数量的关系

Fig. 7 The relationship between the optimal decisions and the number of potential investors



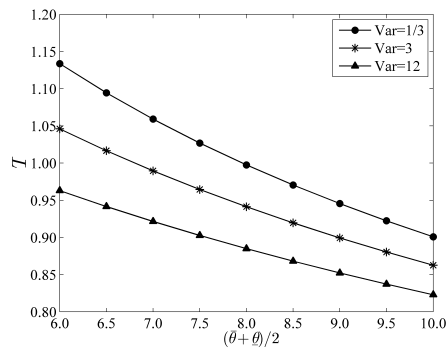
(a) 最优价格与单位延时成本均值的关系

(a) The relationship between the optimal price and the mean of unit delay cost



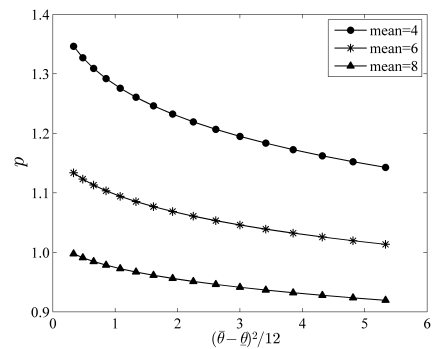
(b) 最优价格与单位延时成本方差的关系

(b) The relationship between the optimal price and the variance of unit delay cost



(c) 最佳周期与单位延时成本均值的关系

(c) The relationship between the optimal project duration and the mean of unit delay cost



(d) 最佳周期与单位延时成本方差的关系

(d) The relationship between the optimal project duration and the variance of unit delay cost

图 8 最优决策与单位延时成本的关系

Fig. 8 The relationship between the optimal decision and the unit delay cost

上图表明延时成本对于两个最优决策的影响是一致的, 最优价格(周期)随延时成本增大或者投资者群体延时异质性程度增大而降低(缩短). 其中, 当投资者群体延时异质性程度越大即方差越大时, 最优决策的

变化逐渐减缓. 出现这种趋势的原因是当方差较小时, 表明投资者异质程度不高, 发起人能够较为准确地进行决策调整; 而当方差越大时, 投资者异质性增强, 发起人决策受到多类投资者需求约束, 调整幅度减缓.

5.4 生产成本的影响

5.4.1 边际成本的影响

边际成本通常是指在一个产量水平下, 每增加一个单位产量时总成本的增加. 一般来说, 随着总产量的增加, 边际成本会逐渐下降后趋于一个稳定值, 主要的表现为“规模经济”. 边际成本与边际收益关系着项目的总利润情况. 因为项目的边际收益即是顾客需要支付的产品价格, 边际成本上升时, 需要价格的提升保证利润. 支持者支付了更高的价格自然就期待能以更短的时间获得产品, 相应的就需要缩短周期以便满足顾客需求. 从图9看出, 边际成本的增加使得最优决策 p^* 和 T^* 都有所增加.

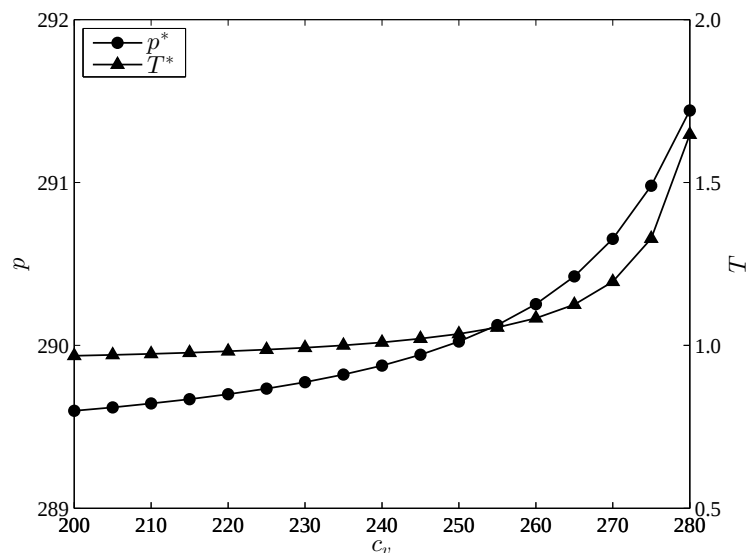


图9 最优决策与生产边际成本的关系

Fig. 9 The relationship between the optimal decision and the unit production cost

5.4.2 固定成本的影响

为保证项目众筹成功后能顺利开展, 有一部分成本是不可忽略的, 例如生产线的机器设备费用、人员管理费用等. 这一部分费用无关产量, 而是一个固定的费用支出. 一般来说, 固定成本占总成本的比重大于变动成本所占比重, 当固定成本在较大范围内波动时容易对总成本产生较大影响. 图10表明随固定成本增加, 最优价格下降, 项目周期延长, 发起人希望用更低的价格和更长的时间吸引更多投资者, 减少成本增加带来的不利影响.

通过上述分析可知, 履约率(β)、潜在投资者数量(Δ)、投资者的延时敏感性(θ)、产品边际成本(c_v)及固定成本(c_f)对于最优决策的影响规律可以总结如下:

1) 当不确定因素在一定范围内波动时, 项目发起人一般的做法是降低价格和延长周期或者提高价格和缩短周期来保证项目的单位时间利润受到的影响最小化. 两种做法的目的都是希望能吸引更多的投资者确保项目的顺利开展.

2) 上述因素对项目发起人的项目单位时间利润的影响程度由高到低分别是: 履约率(β)、生产边际成本(c_v)、潜在投资者数量(Δ)、投资者的延时敏感性(θ)及固定成本(c_f).

3) 因为数值实验是基于美的U型窗式空调的众筹项目进行分析, 家电类项目通常生产边际成本较高, 边际利润较低. 因此对于这类项目来说提高利润的关键因素在于控制成本, 其次选择合适的平台更有利于投资者参与.

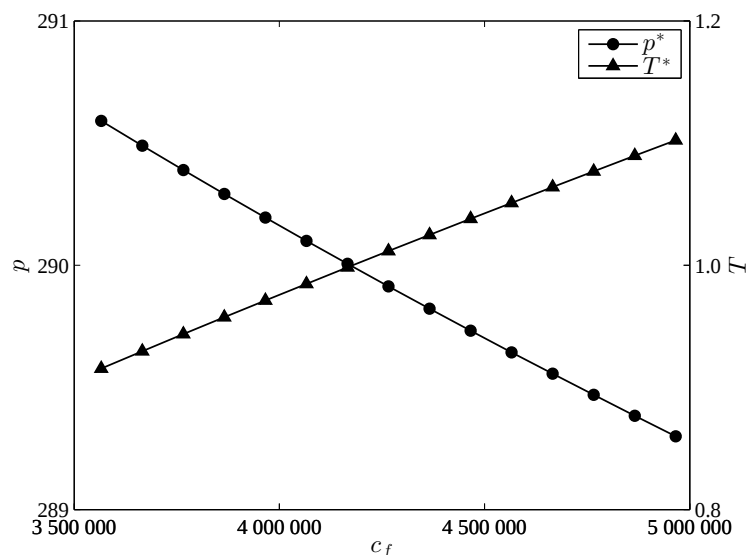


图10 最优决策与生产固定成本的关系

Fig. 10 Relationship between the optimal decision and the fixed production cost

6 结束语

作为一种新兴的互联网金融模式, 众筹为中小企业融资开辟了一条新的途径. 本文针对延时敏感投资者的行为特征, 通过建立排队模型研究KIA模式产品众筹项目周期和产品价格决策问题, 最后基于数值实验探讨了潜在随机因素对于投资者行为及项目决策的影响并给出建议. 在未来的研究中, 本文可从以下角度进行拓展. 在AON模式和KIA模式下考虑投资者延时敏感性, 并对两种模式下的决策进行对比.

参考文献:

- [1] 耿波涛. 产品众筹下AON机制与KIA机制研究. 合肥: 中国科学技术大学, 2019.
Geng B T. On the All-or-Nothing and Keep-it-All mechanisms in reward-based crowdfunding. Hefei: University of Science and Technology of China, 2019. (in Chinese)
- [2] 王林涛, 何叶婷. 产品众筹融资激励和效率影响因素的实证研究: 以京东众筹为例. 浙江金融, 2018(8): 9–15.
Wang L T, He Y T. An empirical research on factors affecting product crowdfunding financing incentive and efficiency: A case of Jingdong crowdfunding, Zhejiang Finance, 2018(8): 9–15. (in Chinese)
- [3] 黄健青, 刘雪霏, 郑建明. 众筹项目成功的关键因素: 基于KIA与AON融资模式的实证研究. 财贸经济, 2015(9): 74–84.
Huang J Q, Liu X F, Zheng J M. Key success factors of crowdfunding projects: Based on the empirical comparison of KIA and AON. Finance & Trade Economics, 2015(9): 74–84. (in Chinese)
- [4] Li Z, Duan J A, Ransbotham S. Coordination and dynamic promotion strategies in crowdfunding with network externalities. Production and Operations Management, 2020, 29(4): 1032–1049.
- [5] Hu M, Shi M, Wu J. Simultaneous vs. sequential group-buying mechanisms. Management Science, 2013, 59(12): 2805–2822.
- [6] 张凤娇. 产品众筹项目参与意愿的影响因素研究. 武汉: 武汉科技大学, 2019.
Zhang F J. The Research on the Influence Factors of the Reward-based Crowdfunding Participation Intention. Wuhan: Wuhan University of Science and Technology, 2019. (in Chinese)

- [7] Mollick E. The dynamics of crowdfunding: An exploratory study. *Journal of Business Venturing*, 2014, 29(1): 1–16.
- [8] 杜黎, 苏海莉, 钱丽新. 众筹环境下用户参与行为影响因素研究. *中国管理科学*, 2016, 24(S1): 360–366.
Du L, Su H L, Qian L X. Factors of users' participation behavior on crowdfunding. *Chinese Journal of Management Science*, 2016, 24(S1): 360–366. (in Chinese)
- [9] 魏尉, 梅姝娥, 仲伟俊. 用户分享行为对社交媒体平台收益的影响. *系统工程学报*, 2019, 34(5): 621–631.
Wei W, Mei S E, Zhong W J. Effects of users' sharing information on the profits of social network platforms. *Journal of Systems Engineering*, 2019, 34(5): 621–631. (in Chinese)
- [10] Kuppuswamy V, Bayus B L. Crowdfunding creative ideas: The dynamics of project backers in Kickstarter. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2234765>.
- [11] De Witt N. A Kickstarter's Guide to Kickstarter: How to Successfully Fund Your Creative Project. <https://kickstarterguide.com/files/2012/07/A-Kickstarters-Guide.pdf>
- [12] Steinberg D. *The Kickstarter Handbook*. Philadelphia: Quirk Books, 2012.
- [13] Zhang J, Liu P. Rational herding in microloan markets. *Management Science*, 2012, 58(5): 892–912.
- [14] Agrawal A K, Catalini C, Goldfarb A. The geography of crowdfunding. <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1692661>.
- [15] Vismara S. Information cascades among investors in equity crowdfunding. *Entrepreneurship Theory and Practice*, 2018, 42(3): 467–497.
- [16] 陈肖华. 探讨众筹平台对众筹项目融资结果的影响. *时代金融*, 2018(8): 36–37.
Chen X H. Explore the impact of crowdfunding platforms on crowdfunding project financing results. *Times Finance*, 2018(8): 36–37. (in Chinese)
- [17] Dai H, Zhang D J. Vicarious goal pursuit outweighs herding in crowdfunding: Evidence from Kickstarter.com. <http://pdfs.semanticscholar.org/c6f6/5df0572b977490d407682fb91a2bc4f68136.pdf>
- [18] Harms M. What drives motivation to participate financially in a crowdfunding community. <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2269242>.
- [19] Gerber E M, Hui J S, Kuo P Y. Crowdfunding: Why people are motivated to post and fund projects on crowdfunding platforms//*Proceedings of the international Workshop on Design, Influence, and Social Technologies: Techniques, Impacts and Ethics*. Northwestern University Evanston, IL, 2012, 2(11): 10.
- [20] 刘晓峰. 产品回报型众筹的投资者行为研究: 基于AON和KIA的对比分析. *中南财经政法大学学报*, 2019(6): 31–41.
Liu X F. A study of investor behavior in the product reward crowdfunding: A comparative analysis based on AON and KIA model. *Journal of Zhongnan University of Economics and Law*, 2019(6): 31–41. (in Chinese)
- [21] Hu M, Li X, Shi M. Product and pricing decisions in crowdfunding. *Marketing Science*, 2015, 34(3): 331–345.
- [22] 邓万江, 李习栋, 马士华. 预付款众筹模式下新产品定价与质量设计. *系统工程理论与实践*, 2018, 38(7): 1768–1777.
Deng W J, Li X D, Ma S H. Pricing and quality design of new products under pre-sales crowdfunding. *System Engineering: Theory and Practice*, 2018, 38(7): 1768–1777. (in Chinese)
- [23] 薛巍立, 王杰, 申飞阳. 竞争环境下众筹产品的定价策略研究. *管理工程学报*, 2017, 31(4): 209–219.
Xue W L, Wang J, Shen F Y. Pricing strategy of crowdfunding products in competitive environment. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2017, 31(4): 209–219. (in Chinese)
- [24] 吕秀梅, 邵腾伟. 回报型众筹定价模型. *运筹与管理*, 2018, 27(7): 144–151.
Lü X M, Shao T W. Pricing the reward model of crowdfunding. *Operations Research and Management Science*, 2018, 27(7): 144–151. (in Chinese)
- [25] 吴文清, 付明霞, 赵黎明. 我国众筹成功影响因素及羊群现象研究. *软科学*, 2016, 30(2): 5–8.
Wu W Q, Fu M X, Zhao L M. Successful factors and herding phenomenon of crowdfunding. *Soft Science*, 2016, 30(2): 5–8. (in Chinese)
- [26] Naor P. The regulation of queue size by levying tolls. *Econometrica*, 1969, 37(1): 15–24.
- [27] Lederer P J, Li L. Pricing, production, scheduling, and delivery-time competition. *Operations Research*, 1997, 45(3): 407–420.
- [28] Dennis Z Y, Zhao X, Sun D. Optimal pricing and capacity investment for delay-sensitive demand. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 2012, 60(1): 124–136.

- [29] 陈 剑, 张 楠. 针对等待敏感顾客的缺货补偿与库存策略研究. 管理科学学报, 2008, 11(3): 53–62.
Chen J, Zhang N. Study on backorder incentives and inventory control policies with time-based customer-choice behavior. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(3): 53–62. (in Chinese)
- [30] 许明辉, 孙康泰. 考虑战略顾客行为的制造商成本削减及定价策略. 系统工程学报, 2019, 34(2): 238–251.
Xu M H, Sun K T. Optimal cost reduction and pricing strategy for a manufacturer with strategic customers behavior. Journal of Systems Engineering, 2019, 34(2): 238–251. (in Chinese)
- [31] 罗 兵, 王晶晶, 常旭华. 存货影响销售和顾客等待的特价商品EOQ模型. 系统工程学报, 2013, 28(3): 362–369.
Luo B, Wang J J, Chang X H. EOQ model for off-price merchandise with stock-dependent selling rate and waiting behavior customers. Journal of Systems Engineering, 2013, 28(3): 362–369. (in Chinese)
- [32] 邱晗光, 张旭梅, 但 斌, 等. 可控提前期下复杂部分短缺量拖后的库存模型. 系统工程学报, 2010, 25(5): 689–695.
Qiu H G, Zhang X M, Dan B, et al. Inventory model under controllable lead time and considering time-varying partial backlogging rate. Journal of Systems Engineering, 2010, 25(5): 689–695. (in Chinese)
- [33] 李海南, 邱晗光. 基于有限理性的需求模型与承诺交付时间研究. 系统工程学报, 2018, 33(4): 453–460.
Li H N, Qiu H G. Bounded-rationality-based demand and promised delivery time. Journal of Systems Engineering, 2018, 33(4): 453–460. (in Chinese)
- [34] Zhou W, Huang W. Contract designs for energy-saving product development in a monopoly. European Journal of Operational Research, 2016, 250(3): 902–913.
- [35] Afèche P. Incentive-compatible revenue management in queueing systems: Optimal strategic delay. Manufacturing & Service Operations Management, 2013, 15(3): 423–443.

作者简介:

王冬梅 (1995—), 女, 四川德阳人, 博士生, 研究方向: 服务运营管理, Email: 201910106448@mail.scut.edu.cn;
周文慧 (1976—), 男, 湖南郴州人, 博士, 教授, 研究方向: 服务运营管理, Email: whzhou@scut.edu.cn;
陈 妍 (1981—), 女, 湖南岳阳人, 博士, 副教授, 研究方向: 服务运营管理, Email: yanchen@hnu.edu.cn.

附 录

定理1的证明

当投资者选择入筹时, 其预期收益大于0. 当 $0 < \beta \leq p/R$ 时, 投资者效用函数始终非正, 因此不会有投资者选择入筹. 当 $p/R < \beta < 1$ 时, 因为 $u(\theta, x)$ 是关于 θ 的单调递减函数, 则当 $u(\theta, x) > 0$ 时, $\theta < \theta_0$. 那么在 x 时刻选择入筹的投资者到达率为 $\Lambda(x) = \Lambda \Pr(\theta < \theta_0) = \Lambda F(\theta_0)$. 已知 θ 服从 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ 上的均匀分布, 则

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \leq \underline{\theta} \\ \frac{\theta - \underline{\theta}}{\bar{\theta} - \underline{\theta}}, & \underline{\theta} < \theta < \bar{\theta} \\ 1, & \theta \geq \bar{\theta}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$F(\theta_0)$ 的取值取决于 θ_0 与 $\underline{\theta}, \bar{\theta}$ 的大小关系:

- 1) 当 $\theta_0 \leq \underline{\theta}$, 即 $x \leq T - (\beta R - p)/\underline{\theta}$ 时, $F(\theta_0) = 0$ 恒成立, $\Lambda(x) = 0$.
- 2) 当 $\underline{\theta} < \theta_0 < \bar{\theta}$, 即 $T - (\beta R - p)/\underline{\theta} < x < T - (\beta R - p)/\bar{\theta}$ 时, $\Lambda(x) = \Lambda F(\theta_0)$.
- 3) 当 $\theta_0 \geq \bar{\theta}$, 即 $x \geq T - (\beta R - p)/\bar{\theta}$ 时, $F(\theta_0) = 1$ 恒成立, $\Lambda(x) = \Lambda$.

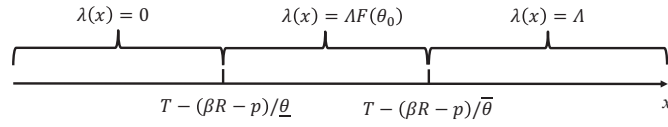
图11 $p/R < \beta < 1$ 情况下投资者有效到达率分布情况Fig. 11 Distribution of investor's effective arrival rate when $p/R < \beta < 1$

图11直观地展示了不同时刻的投资者的有效到达率分布. 因为投资时刻 $x \in [0, T]$, 接下来比较 $T - (\beta R - p)/\underline{\theta}$ 、 $T - (\beta R - p)/\bar{\theta}$ 与0的关系以确定不同周期下投资者有效到达率随时间的变化情况.

1) 当 $T - (\beta R - p)/\bar{\theta} < 0$, 即 $T < (\beta R - p)/\bar{\theta}$ 时, $x > 0 > T - (\beta R - p)/\bar{\theta}$ 成立, 即在任意 x 时刻顾客的有效到达率均为 Λ .

2) 当 $T - (\beta R - p)/\underline{\theta} \leq 0 \leq T - (\beta R - p)/\bar{\theta} < T$, 即 $(\beta R - p)/\bar{\theta} \leq T \leq (\beta R - p)/\underline{\theta}$ 时, 若 $0 \leq x \leq T - (\beta R - p)/\bar{\theta}$, $\Lambda(x) = \Lambda F(\theta_0)$; 若 $T - (\beta R - p)/\bar{\theta} < x \leq T$, $\Lambda(x) = \Lambda$.

3) 当 $T - (\beta R - p)/\underline{\theta} > 0$, 即 $T > (\beta R - p)/\underline{\theta}$ 时, 若 $0 \leq x \leq T - (\beta R - p)/\underline{\theta}$, $\Lambda(x) = 0$; 若 $T - (\beta R - p)/\underline{\theta} < x < T - (\beta R - p)/\bar{\theta}$, $\Lambda(x) = \Lambda F(\theta_0)$; 若 $T - (\beta R - p)/\bar{\theta} < x \leq T$, $\Lambda(x) = \Lambda$. 证毕.

推论1的证明

推论1可由定理1直接推出.

证毕.

引理1的证明

1) 首先, 对 $\tilde{\pi}_1(T)$ 求导可知 $\frac{d\tilde{\pi}_1(T)}{dT} = c_f/T^2 > 0$, 也即 $\tilde{\pi}_1(T)$ 是关于 T 的单调递增函数.

2) 接下来关注 $\tilde{\pi}_2(T)$ 的表达式, 对其求导可知

$$\frac{d\tilde{\pi}_2(T)}{dT} = \frac{c_f(\bar{\theta} - \underline{\theta}) + (p - c_v)\Lambda(\beta R - p) \ln \frac{\beta R - p}{T\bar{\theta}}}{T^2(\bar{\theta} - \underline{\theta})}, \quad (\text{A.2})$$

观察表达式发现其分母恒大于0, 导函数的正负性取决于分子的正负性. 记分子表达式为关于 T 的函数 $G(T)$, 因为

$$\frac{dG(T)}{dT} = -\frac{(p - c_v)\Lambda(\beta R - p)}{T} < 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d^2G(T)}{dT^2} = \frac{(p - c_v)\Lambda(\beta R - p)}{T^2} > 0, \quad (\text{A.4})$$

所以 $G(T)$ 是关于 T 的单调递减凸函数. 令 $G(T) = 0$ 有 $T_0 = (\beta R - p)e^a/\bar{\theta}$. 因为 $a > 0$, 则 $e^a > 1$, 所以 T_0 大于周期下限 $(\beta R - p)/\bar{\theta}$. 比较 T_0 与周期上限的大小:

1) 若 $T_0 \geq (\beta R - p)/\underline{\theta}$, 即 $\bar{\theta}/\underline{\theta} \leq e^a$ 时, $G(T) \geq 0$ 恒成立, 在指定区间内导函数非负, $\tilde{\pi}_2(T)$ 是关于 T 的单调非减函数.

2) 反之, $T_0 < (\beta R - p)/\underline{\theta}$, 即 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 时, $e(\beta R - p)/\bar{\theta} \leq T \leq T_0$, $G(T) \geq 0$; 若 $T_0 < T \leq (\beta R - p)/\underline{\theta}$, $G(T) < 0$. 在指定区间内 $\tilde{\pi}_2(T)$ 关于 T 先增加后减小, 并在 T_0 处取得最大值.

3) 最后对 $\tilde{\pi}_3(T)$ 求导得到

$$\frac{d\tilde{\pi}_3(T)}{dT} = -\frac{(p - c_v)\Lambda(\beta R - p) \ln(\bar{\theta}/\underline{\theta})/(\bar{\theta} - \underline{\theta}) - c_f}{T^2}. \quad (\text{A.5})$$

同样, 分两种情况进行讨论:

1) 当 $0 < \bar{\theta}/\underline{\theta} \leq e^a$ 时, $\ln(\bar{\theta}/\underline{\theta}) \leq a$, 则 $(p - c_v)\Lambda(\beta R - p) \ln(\bar{\theta}/\underline{\theta})/(\bar{\theta} - \underline{\theta}) - c_f \leq (p - c_v)\Lambda(\beta R - p)a/(\bar{\theta} - \underline{\theta}) - c_f = 0$, 即 $\frac{d\tilde{\pi}_3(T)}{dT} \geq 0$.

2) 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 时, $\ln(\bar{\theta}/\underline{\theta}) > a$, 则 $(p - c_v)\Lambda(\beta R - p) \ln(\bar{\theta}/\underline{\theta})/(\bar{\theta} - \underline{\theta}) - c_f > (p - c_v)\Lambda(\beta R - p)a/(\bar{\theta} - \underline{\theta}) - c_f = 0$, 即 $\frac{d\tilde{\pi}_3(T)}{dT} < 0$. 证毕.

引理2的证明

由引理1可知, 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} \leq e^a$ 时, $\tilde{\pi}(T)$ 在整个区间内为关于 T 的连续单调非减函数. 因此, $\tilde{\pi}(T) \leq \tilde{\pi}_3(T) = ((p - c_v)\Lambda(\beta R - p)/(\bar{\theta} - \underline{\theta}) \ln(\bar{\theta}/\underline{\theta}) - c_f)/T \leq ((p - c_v)\Lambda(\beta R - p)a/(\bar{\theta} - \underline{\theta}) - c_f)/T = 0$. 当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$ 时, $\tilde{\pi}(T)$ 在整个区间内为关于 T 的连续先增后减函数且 $\tilde{\pi}(T)_{\max} > \tilde{\pi}_3(T) > ((p - c_v)\Lambda(\beta R - p)a/(\bar{\theta} - \underline{\theta}) - c_f)/T = 0$. 证毕.

定理2的证明

该定理可由引理2直接推出.

证毕.

定理3的证明

当 $\bar{\theta}/\underline{\theta} > e^a$, 即 $(p - c_v)(\beta R - p) > c_f(\bar{\theta} - \underline{\theta})/(\Lambda \ln(\bar{\theta}/\underline{\theta}))$ 时, 可行域非空时解得 $p_1 < p < p_2$, 其中 $p_1 = (\beta R + c_v - \sqrt{(\beta R + c_v)^2 - 4(\beta R c_v + b)})/2$, $p_2 = (\beta R + c_v + \sqrt{(\beta R + c_v)^2 - 4(\beta R c_v + b)})/2$. 易知 $c_v < p_1 < p_2 < R$, 且 p_1, p_2 关于 $(\beta R + c_v)/2$ 对称. 因为 $\pi = \tilde{\pi}_2((\beta R - p)e^a/\bar{\theta}) = \Lambda(p - c_v)(\bar{\theta} - e^a \underline{\theta})/(e^a(\bar{\theta} - \underline{\theta}))$, 将 π 对 p 求导后, 有

$$\frac{d\pi}{dp} = \frac{(\bar{\theta} - e^a \underline{\theta})\Lambda(p - c_v)(\beta R - p)^2 - \bar{\theta}(\bar{\theta} - \underline{\theta})c_f(2p - \beta R - c_v)}{e^a(p - c_v)(\beta R - p)^2(\bar{\theta} - \underline{\theta})}. \quad (\text{A.6})$$

观察可知, 一阶导数分母恒大于零, 因此对分子的正负进行讨论. 当 $p_1 < p < (\beta R + c_v)/2$ 时, $2p - \beta R - c_v < 0$, 因此分子为正, 在此区域内, π 关于 p 单调递增. 当 $(\beta R + c_v)/2 < p < p_2$ 时, 分子正负性未知, 但注意到 $\frac{d\pi}{dp}|_{p=(\beta R + c_v)/2} > 0$, $\frac{d\pi}{dp}|_{p=p_2} < 0$, 因为 π 是关于 p 的连续函数, 所以在区域 $((\beta R + c_v)/2, p_2)$ 内至少存在一个解使得 $\frac{d\pi}{dp} = 0$. 记上述解的集合为 P , 那么有 $p^* = \arg \max_{p \in P} \pi(p)$. 证毕.