基于调和稳态均值回复模型的 VIX 期权定价

尹亚华[1,2,4], 吴恒煜[3*], 朱福敏[4]

(1. 西南财经大学经济信息工程学院, 四川 成都 611130;
2. 西南财经大学金融智能与金融工程重点实验室, 四川 成都 611130;
3. 暨南大学管理学院, 广东 广州 510632; 4. 深圳大学经济学院, 广东 深圳 518060)

摘要: 为有效地刻画 VIX 的均值回复性与非高斯性, 在风险中性测度下, 以调和稳态过程替换简单跳过程, 构建带调和稳态的 OU 与 CIR 模型, 并应用 Doob 鞅的方法求解其仿射解结构的特征函数, 进而求出 VIX 期权公式用于定价实证. 实证表明: 带调和稳态的均值回复模型明显优于其他定价模型, 而带调和稳态的 CIR 模型为最优定价模型. 从而得出带调和稳态的均值回复模型不仅有较好的经济解释, 而且可抓住 VIX 均值回复与非对称跳的特征, 降低 VIX 期权定价的误差的结论.

关键词: 均值回复模型; 非对称跳; 调和稳态; VIX 期权定价
中图分类号: F830 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2021)05−0653−15
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2021.05.007

VIX option pricing based on mean reverting models with tempered stable processes

Yin Yahua[1,2,4], Wu Hengyu[3*], Zhu Fumin[4]

(1. School of Economic Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;
2. Sichuan Provincial Key Laboratory of Financial Intelligence and Financial Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;
3. School of Management, Jinan University, Guangzhou 510632, China;
4. College of Economics, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: In order to effectively characterize the mean reverting and non-Gaussianity of VIX, using the risk neutral measure, this paper replaces the simple jump process with the tempered stable processes, constructs the OU model and CIR model with the tempered stable processes, and applies the Doob martingale method to solve the characteristic function of its affine solution structure, and then the VIX option pricing formula is obtained for empirical pricing. The empirical results show that the mean reverting model with tempered stable processes is significantly better than other pricing models, and the CIR model with tempered stable process is the optimal pricing model in this paper. Therefore, it is concluded that the mean reverting model with tempered stable processes not only has a good economic explanation, but also can capture the characteristics of VIX mean reverting and asymmetric jump, thereby reducing the error of VIX option pricing.

Key words: mean reverting models; asymmetric jump; tempered stable processes; VIX option pricing

收稿日期: 2019−11−25; 修订日期: 2021−06−21.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(72071132; 71790615; 72173089); 中国博士后科学基金资助项目(2021M692168).
*通信作者.

1 引 言

随着国际经济与金融一体化的步伐不断加快, 各国金融市场出现了较大的联动性, 金融系统性风险日益加剧, 投资者对系统性风险规避的需求也随之增加. VIX 作为一种系统性风险指数, 其衍生品不仅可以作为金融产品进行投资, 也可以作为系统性风险的对冲工具, 因此广受投资者的追捧.

在金融研究领域, 对 VIX 的研究热情随着投资者追捧热度的上涨而上涨, 研究成果也颇为丰富. 目前有两种 VIX 建模的思路:一种是基于 VIX 直接建模, 另一种是基于风险中性测度下 S&P500 指数模型推导 VIX 模型. 两种方法都假定 VIX 模型在风险中性测度下是一个鞅过程. 然而, 大量研究为满足 VIX 模型在风险中性测度下的鞅性, 使用带简单跳的均值回复模型或者加入一些限定条件, 从而影响了模型的定价精准度. 本文基于 VIX 的基础资产是 S&P500 股票的前提, 即 VIX 不能用来交易, 其模型在风险中性测度下也不需要满足鞅性. 因此, 本文在风险中性测度下, 源于日历时间与内在时间视角以调和稳态过程代替简单跳过程, 构建带调和稳态的 OU 与 CIR 模型进行 VIX 期权定价实证. 在期权定价公式中, 本文采用经济学背景对期权积分上限进行截断, 使积分收敛, 同时将期权定价中的折现因子参数化, 应用实证数据对其进行校正. 实证结果表明: 带调和稳态的 OU 与 CIR 模型明显优于其它定价模型, 而带调和稳态的 CIR 模型为本文最优定价模型. 从而得出带调和稳态的均值回复模型不仅有较好的经济解释, 更能抓住一般跳刻画不理想的非对称跳, 降低模型定价误差的研究结论.

在风险中性测度下, 基于调和稳态均值回复模型对 VIX 期权进行定价, 因此文献综述也是围绕鞅性与风险中性测度、均值回复的 VIX 时序模型、内在时间与 Lévy 过程及国内关于 VIX 的研究四部分展开.

目前大部分研究都假定 VIX 在风险中性测度是一个鞅过程, 然而基于 VIX 基础资产 S&P500 股票在风险中性测度下是一个鞅过程很难证明 VIX 在风险中性测度下的鞅性. 为了构建风险中性测度下的鞅性, 其中一类研究思路是应用期货在风险中性测度下的鞅性, 如 Mencia 等[1]直接基于 VIX 期货构建期权定价模型, Park[2]直接假定 VIX 期货在风险中性测度下是一个 Doob 鞅. 另一种研究根据风险中性测度下 S&P500 指数推出 VIX 计算公式, 加入限定条件使其成为一个鞅, 如 Luo 等[3]的研究. 由于 VIX 是基于 S&P500 指数及其衍生品求出, 本文假定真实的 S&P500 衍生品价格与风险中性测度下的价格重合, 这样 S&P500 衍生品在风险中性测度下, 根据 S&P500 衍生品计算出的 VIX 也在风险中性测度下. 基于这个假定, 可以去掉鞅性约束条件, 直接在风险中性测度下, 根据 VIX 的特征构建模型.

Whaley[4]给波动率期货定价时, 提出观测到的波动率指数服从几何布朗运动, 由于几何布朗运动没有均值回复性, 因此他的模型忽略了波动率指数均值回复的特点. 与此相对, 另外两个比较著名的均值回复模型是平方根过程与对数乌伦贝尔过程. 平方根过程是由 Grunbichler 等[5]提出的, Zhang 等[6]应用 VIX 及其期权的历史数据对 VIX 服从平方根过程进行了实证分析, 并对其中的参数进行了估计, 得到了 VIX 期权的定价误差. Dotsis 等[7]运用 VIX 期货数据实证了带跳的平方根扩散过程的拟合效果, 因为时间跨度太短均值回复特征不能体现, 研究发现几何布朗运动得到的结果更为精准. Wang 等[8]通过实证比较了平方根过程与几何布朗运动在 VIX 期权的应用, 研究结果表明几何布朗运动构成的模型更适应 VIX 期权定价, 这种研究结果的一种解释是 VIX 期权更服从由 Detemple 等[9]提出的另一个均值回复模型(对数乌伦贝尔过程). 除了这些实证依据, 从长期的均值回复角度分析, 平方根过程与对数乌伦贝尔过程在 VIX 的持续性上表现出很大不同. 后期研究是基于对数乌伦贝尔过程进行了扩展, 引入了仿射跳模型. Barletta 等[1]通过核加权多项式正交展开的方法来近似密度函数, 并以此方法代替傅里叶变换, 应用于基于仿射跳模型 VIX 期权定价. Bardgett 等[11]使用了一个包含 S&P500 与 VIX 指数回报与期权价格的非平衡面板, 估计了一个灵活的仿射模型, 并分析 VIX 期权对模型进样与出样性能的贡献, 研究发现, 基于仿射模型包含了 S&P500 指数没有涵盖的信息.

Hurst 等[12]提出了内在时间的概念, 并基于内在时间建立定价模型, 假定影响股价的是信息与时间, 信息随着时间到达的过程是一个从属过程, 基于从属过程的布朗运动是一个稳态的 Lévy 过程. 在定价中, 稳态的 Lévy 过程测度趋于无穷, 因此其期权价值不满足平方可积性, Wu[13]应用阻尼幂概率抑制稳态的 Lévy 跳测度, 这样使得期权价格变得平方可积, 将阻尼幂概率与稳态过程两者结合起来, 就构成调和 α–稳态分布. Kim 等[14−16]研究发现, 金融资产收益率尾部分布常常介于正态分布与稳态分布之间, 这类稳态过程, 有效地刻画了厚尾特征. Kim 等[14]设立了相应的调和函数, 对稳态过程进行了一定修正. Carr 等[17]详尽地描述了基于时变 Lévy 过程的定价模型, 并采用了无穷小跳跃 Lévy 过程建立了无穷活动率模型, 研究结果表明, 无穷活动率模型不仅能够捕捉小跳跃, 甚至可以采用无穷小跳替代连续扩散过程, 进而取得更好的定价效果. Rosiński[18]、Bianchi 等[19]和 Kim 等[14] 建立了一类新的 Lévy 过程, 称为调和稳态 Lévy过程, 其跳跃测度是通过修正 Lévy 稳态的随机测度而来, 并且可以借助尾部参数来控制随机分布的厚尾程度. Madan[20]提出应用 CVG 过程与 VG 过程构建定价模型, 该模型较好地拟合了内在时间的概念. 刘志东等[21,22]采用特征函数的连续矩估计方法与贝叶斯推断的方法, 进行了经典调和稳态和修正调和稳态的参数估计与运动特征的分析. 朱福敏等[23]基于 VG 过程与贝叶斯参数学习进行 S&P500 衍生品定价. 宫晓莉等[24] 应用双指数跳分析上市公司违约风险. Yahua 等[25]应用基于调和稳态的 OU 模型对 SHIBOR 利率指数进行了分析. 刘志东等[26]构建带 Lévy 过程的非高斯 OU 随机波动率模型, 并基于此模型进行期权定价.

鲍群芳等[27]将跳因素与均值回复因素引入了 VIX 模型, 使 VIX 模型更加合理. 周海林等[28]构建了 VIX 与 GARCH 扩散模型中波动率之间的关系模型, 并采用 S&P500 与 VIX 进行了实证. 柳向东[29]应用一个随机波动率模型拟合 VIX , 在该模型下讨论了 VIX 指数的期权定价问题. 王骋翔[30]提出一种应用于 VIX 期权定价的随机波动率模型, 并且该模型中某个参数与宏观经济状态有关.

综合现有研究, 本文将调和稳态过程引入带均值回复性的期权定价模型, 用布朗运动拟合日历时间带来的波动, 可视为随着时间的延展, 单位时间到达量比较稳定的信息带来的波动. 用调和稳态拟合内在时间带来的波动, 可视为单位时间内到达量不稳定的信息带来的波动. 日历时间用自然数数列进行刻画, 内在时间是以自然数列驱动的 Gamma 从属过程进行刻画, 两个时间带来的波动都同为布朗运动, 区别在于前者是自然数列直接驱动的布朗运动, 后者是 Gamma 从属过程驱动的布朗运动. Gamma 从属过程驱动的布朗运动是一个 VG 调和稳态过程中, 因此本文构建基于调和稳态过程的均值回复模型. 基于调和稳态过程的均值回复模型不仅能较好地刻画随机分布尖峰、厚尾、有偏与波动集聚的特征, 而且能较好地拟合非对称跳. 以带调和稳态的均值回复模型替代带简单跳的随机波动率模型, 并结合多类结构模型进行对比分析. 在理论层面, VIX 期权更多作为规避系统风险的工具, 具有保险产品的一些特征, 该研究不仅丰富了已有期权定价理论, 为投资者与风险管理者提供一种期权定价方法, 而且为系统性风险规避与相关期权定价做一些基础性的边际贡献. 在实证层面, 本文采用多种定价模型多指标对比分析的方法, 进一步详实模型的应用价值.

2　VIX 统计性质分析

研究 VIX 的统计性质, 采用 2012–10–19～2017–10–18 的历史数据, 分别对 VIX 与对数化后 VIX 统计性质进行分析, 其结果见表 1.

表 1　VIX 基本统计指标分析

Table 1　Analysis of basic statistical indicators of VIX

Index	Min	Max	Mean	Median	Std	Skew	Kurt
VIX	9.190 0	40.740 0	14.664 3	13.830 0	3.545 3	1.799 9	8.371 9
LnVIX	2.218 1	3.707 2	2.660 6	2.626 8	0.215 8	0.863 5	4.187 6

从统计性质不难得出, VIX 方差较大, 如果将其对数化后进行研究, 可以降低其拟合的难度. 峰度是描

述时间序列所有样本分布形态陡缓程度的统计量, 峰度统计量与正态分布相比较, 峰度为 3 表示该样本数据分布与正态分布的陡缓程度相同, 但从统计分析中得出, VIX 峰度为 8.371 9, 其取完对数后时间序列峰度为 4.187 6, 均大于 3, 表示该样本数据分布比正态分布更陡峭尖峰. 偏度与峰度统计性质类似, 它是描述样本数据分布形态的统计量, 从一定程度上反映时间序列分布的对称性, 从下表可以得出, VIX 的偏度为 1.799 9, 取完对数后的偏度为 0.863 5, 存在右偏或正偏现象, 即在密度函数的右侧有拖尾.

以上统计特征说明, 与大多数金融时间序列一样, VIX 不仅与时间有关, 还与单位时间内到达信息量的多少相关, 因此出现了尖峰、有偏与不对称拖尾的统计特征.

接着从 VIX 与取对数后 VIX 时间序列演变路径图(图 1 与图 2)观察其时间序列特征.

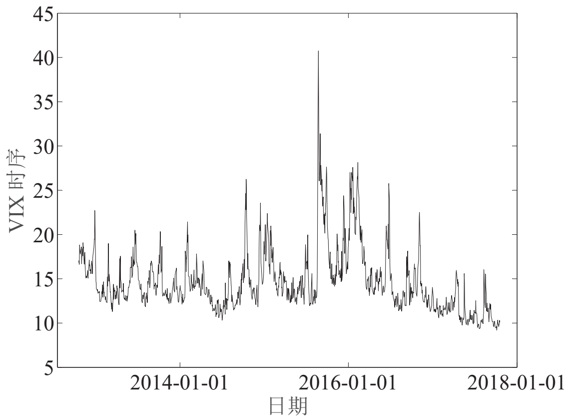

图 1 VIX 数据路径

Fig. 1 The data path of VIX

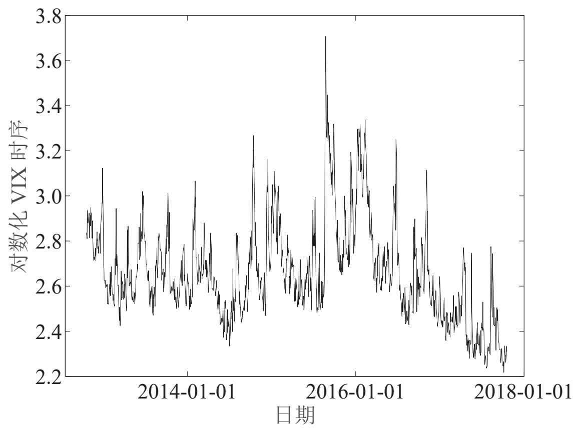

图 2 VIX 对数化后数据路径

Fig. 2 The logarithmic data path of VIX

从图 1 与图 2 分析, 不难得出以下结论: 1) VIX 在 2015 年 8 月达到了最大值, 然后又迅速向均值点回复. 2) VIX 存在波动集聚. 3) 向上的峰值特别尖锐, 而且相对较少, 而向下峰值却比较多, 而且相差不大, 从而验证了波动率跳跃的非对称性, 即上跳与下跳的幅度与频率各不相同. 4) VIX 的均值回复特征明显.

应用 5 年中的 VIX 数据, 从密度函数角度对其统计特征进行分析, VIX 密度函数如图 3 和图 4 所示.

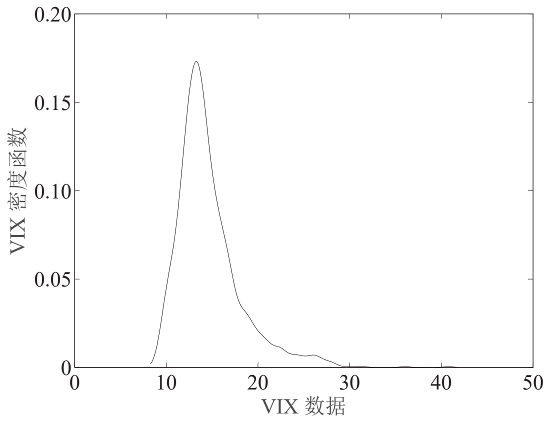

图 3 VIX 密度函数

Fig. 3 The density function of VIX

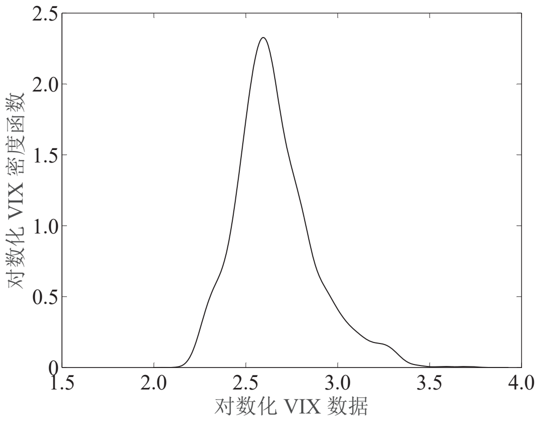

图 4 VIX 对数化后密度函数

Fig. 4 The logarithmic density function of VIX

从 VIX 密度函数(图 3)与 VIX 对数化后密度函数(图 4) 可以得出, 无论是 VIX 原始数据, 还是取其对数形式, 其整个密度函数的尖峰程度比较明显, 而且密度函数左边比较陡峭, 尾部几乎截断, 右边比较平滑, 有较长的拖尾.

3 调和稳态的均值回复模型

3.1 带跳的均值回复模型

从图 1 与图 2 分析不难得出, VIX 与对数化后的 VIX 路径具有均值回复的性质, 而经典的均值回复模型有 OU 过程与 CIR 过程. 经典的均值回复模型不带有跳跃项, 仅能反映日历时间带来的波动, 较难刻画内在时间带来的非对称跳跃. 本文使用带跳的 OU 与 CIR 过程对对数化后的 VIX 路径进行刻画, 借以反映日历时间与内在时间带来的波动. 带跳的 OU 模型[31] 给出了其特征函数解的一般形式, 但没有涉及到具体跳过程的类型, 其结构形式为 $\mathrm{d}X_t = a(\theta - X_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t + \mathrm{d}J_t$. 若令 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_T}|X_t]$是一个 Doob 鞅, 则可以根据 Doob 鞅的性质, 通过求解 Kolmogorov 向后方程可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_t}] = \phi(u) = \mathrm{e}^{[A(t;u)+x_0B(t;u)]},\\
&A(t;u) = \int_0^t \left\{ a\theta B(\tau;u) + \sigma^2 B^2(\tau;u)/2 + \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{JB(\tau;u)} - 1\right]\right\}\mathrm{d}\tau,\\
&B(t;u) = \mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at},
\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $A(t;u)$ 的详细计算如下, $\int_0^t a\theta B(\tau;u)\mathrm{d}\tau = \mathrm{i}\theta u(1-z)$, $\int_0^t \sigma^2 B^2(\tau;u)/2\mathrm{d}\tau = (-\sigma^2u^2(z^2-1))/(4k)$, $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{JB(t;u)}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uzJ}] = \varphi_J(uz)$. 其中$z = \mathrm{e}^{-kt}$, φ_J 是 J 的特征函数, 跳跃项只与 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{JB(t;u)} - 1]$ 有关, 以上推导的详细过程可以参考文献[32].

当 VIX 的波动大小与 VIX 自身大小相关时, 可应用 CIR 模型进行拟合. CIR 模型由 Cox 等[33]提出, 应用于描述利率的演变路径, 这种模型不仅描述真实的利率世界, 更能抓住金融数据的一个重要特性—均值回复性. 由于原始的CIR 模型是一个连续过程, 不能反映市场剧烈波动, Duffie 等[34]提出了 JCIR 模型, 用于刻画金融时间序列的跳跃现象. Jin 等[35]研究发现足够的条件保证 JCIR 的 Forster-Lyapunov 函数存在, 并证明了它的遍历性. JCIR 过程 $X := (X_t, t \geqslant 0)$ 是以下随机微分方程的唯一解, 即 $\mathrm{d}X_t^x = a(\theta - X_t^x)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}J_t$.

与带跳的 OU 过程一样, 若 $\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_T}|X_t\right]$是一个鞅, 其中 X_t 是 t 时刻的值, 则其表达式是如下的一种指数仿射形式

$$\mathrm{CF_{JCIR}} = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_t^x}\right] = \mathrm{e}^{[A(t,\mathrm{i}u)+xB(t,\mathrm{i}u)]},\ \mathrm{i}u \in U = \{\mathrm{i}u : \mathrm{Re}\,[\mathrm{i}u] \leqslant 0\}, \tag{2}$$

其中 $A(t,u)$和 $B(t,u)$是 Riccati 方程生成的解, 其方程表达式为

$$\begin{cases}
\partial_t A(t,\mathrm{i}u) = F(B(t,\mathrm{i}u)), & A(0,\mathrm{i}u) = 0\\
\partial_t B(t,\mathrm{i}u) = R(B(t,\mathrm{i}u)), & B(t,\mathrm{i}u) = \mathrm{i}u \in U,
\end{cases} \tag{3}$$

其中 $F(u) = \alpha\theta\mathrm{i}u + \int_0^\infty (\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\xi} - 1)v\mathrm{d}\xi$, $R(u) = -\sigma^2u^2/2 - au$.

方程组式(3)解的表达式为

$$B(t,\mathrm{i}u) = \mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}\left(1 - \sigma^2/(2a)\mathrm{i}u\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)\right)^{-1}, \tag{4}$$

并且

$$A(t,\mathrm{i}u) = -\frac{2a\theta}{\sigma^2}\ln\left(1 - \sigma^2/(2a)\mathrm{i}u\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)\right) + \int_0^t\int_0^\infty (\mathrm{e}^{\xi\psi(s,\mathrm{i}u)} - 1)v\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s. \tag{5}$$

综合式(4)、式(6)与式(7), 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_t^x}\right] = {}&\left(1 - \sigma^2/(2a)\mathrm{i}u\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)\right)^{-2a\theta/\sigma^2}\exp\left(x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}\left(1 - \sigma^2/(2a)\mathrm{i}u\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)\right)\right) \times\\
&\exp\left(\int_0^t\int_{-\infty}^\infty (\mathrm{e}^{\xi B(s,\mathrm{i}u)} - 1)v\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right),
\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $X_0^x = x$, 即 x 为初始值.

3.2 日历时间与内在时间

VIX 时间序列不仅受单位时间内到达量比较均匀平稳的信息影响, 而且还会受到单位时间内到达量不均匀平稳信息的冲击, 将前者视为日历时间, 后者视为内在时间. 日历时间用时间 t 表示, 而内在时间用一个基于日历时间 t 驱动的 Gamma 过程来表示, 这样便得到 VIX 时间序列变化的两个重要驱动. 基于这种思想, 构建两个布朗运动, 一个布朗运动基于日历时间 t 驱动, 另一个布朗运动基于 Gamma 过程驱动. 带简单跳的随机波动率模型是将布朗运动与另一个由布朗运动驱动的 CIR 模型相乘, 并在此基础上加入简单跳过程, 为了简化模型, 加强模型的实用性, 选择用 Gamma 过程驱动的布朗运动替代这一过程.

根据 Madan[36]的研究, 基于 Gamma 过程驱动的布朗运动是一个 VG 过程. VG 过程是期权定价中应用较多的 Lévy 过程, 因为它不仅能较好拟合非高斯性与波动集聚性, 而且有较好的经济解释.

3.3 α–稳态过程

一个随机变量 X 如果满足以下条件, 则称其服从一个 α–稳态分布: 如果有一组独立同分布的随机变量序列 $Y_1, Y_2, \ldots$ 并且存在正数 d_n 与实数 a_n, 使得$[(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)/d_n + a_n] \xrightarrow{d} X$ 成立, 其中 $\xrightarrow{d}$ 表示依分布收敛.

若 X 是 α–稳态分布, 在标准参数系下, 其特征函数形式为

$$\mathrm{E}[\mathrm{e}^{i\theta X}] = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - \mathrm{i}\beta(\mathrm{sign}(\theta)\tan(\pi\alpha/2))) + \mathrm{i}\mu\theta\right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-\sigma^\alpha |\theta| (1 + 2\mathrm{i}\beta(\mathrm{sign}(\theta)\ln|\theta|)/\pi) + \mathrm{i}\mu\theta\right\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

其中 sign 为符号函数, 参数 $0 < \alpha \leqslant 2, \sigma \leqslant 0, -1 \leqslant \beta \leqslant 1$.

一种应用较多的参数系是 S1 参数系, 在该参数系下, 一个随机变量 X 是稳态当且仅当它的特征函数为

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{i\theta X}\right] = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma_2^\alpha |\theta|^\alpha \exp\left\{-\mathrm{i}\beta_2\left(\mathrm{sign}(\theta)\dfrac{\pi}{2}K(\alpha)\right)\right\} + \mathrm{i}\mu\theta\right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-\sigma_2 |\theta| \left(\dfrac{\pi}{2} + \beta_2(\mathrm{sign}(\theta)\ln|\theta|)\right) + \mathrm{i}\mu\theta\right\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

其中 $K(\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1 + \mathrm{sign}(1-\alpha)\alpha, & \alpha < 1 \\ \alpha - 1 + \mathrm{sign}(1-\alpha)\alpha - 2, & \alpha > 1. \end{cases}$

α–稳态过程较之布朗运动, 可以通过参数调整, 较好地拟合金融时间序列数据的非对称, 尖峰厚尾, 有偏的统计特征. 由于 VIX 的演变路径不仅与日历时间有关, 而且与内在时间有关. 假定内在时间服从一个自然数数列驱动的 Gamma 从属过程, 以内在时间即 Gamma 从属过程驱动的布朗运动是一个 VG 过程, 而 VG 过程是稳态过程的一种.

3.4 调和稳态过程及其 Lévy 测度

根据调和稳态的定义与性质, 一个测度 $V = V(\mathrm{d}x)$的极坐标形式是 $V = V(\mathrm{d}r, \mathrm{d}u)$, 其中 r 与 u 是由 x 经过映射$(\|x\|, x/\|x\|) = (r, u)$得到在极坐标下, 一个 α–稳态分布 Lévy 测度极坐标形式为

$$V_0(\mathrm{d}r, \mathrm{d}u) = r^{-\alpha-1}\mathrm{d}r\sigma(\mathrm{d}u).$$

经过一个函数扭曲(亦称调和), 得到调和 α–稳态 Lévy 测度

$$V_0(r, \mathrm{d}u) = r^{-\alpha-1}q(r, u)\mathrm{d}r\sigma(\mathrm{d}u),$$

其中 $q(r, u)$是对 u 单调递增的调和函数. 调和稳态过程由 α–稳态过程的 Lévy 测度与调和函数相乘得到. 前面 $q(r, u)$给出了极坐标下的调和函数, 可以将其转化, 得到平面坐标下调和稳态 Lévy 测度为

$$V_{\mathrm{TS}}(\mathrm{d}x) = V_s(\mathrm{d}x)q(x). \tag{7}$$

根据式(7)中调和函数的不同, 可以得到不同的调和稳态. 其中主要的有经典调和稳态(CTS), 修正调和稳态(MTS), 正态调和稳态(NTS), 速降调和稳态(RDTS) 及 Kim-Rachev 调和稳态(KRTS). 由于 MTS 过程, NTS 过程, RDTS 过程, KRTS 过程与 CTS 过程主要不同在于调和函数 $q(x)$, 而且参数较多, 其处理与定价方法大同小异, 本文采用了 CTS 过程及其特殊形式 VG 过程与 CGMY 过程, 其中 CTS 过程的 Lévy 测度为

$$V_{\mathrm{CTS}}(\mathrm{d}x)=\left(C_{+}\mathrm{e}^{-\lambda_{+}x}\left(x^{1+\alpha}\right)^{-1}1_{\{x>0\}}+C_{-}\mathrm{e}^{\lambda_{-}x}\left(|x|^{1+\alpha}\right)^{-1}1_{\{x<0\}}\right)\mathrm{d}x,$$

其中 $\mathrm{d}x$ 表示跳跃幅度的大小, C_+ 与 C_- 分别表征了正跳与负跳的强度, 即上跳与下跳的速率, λ_+ 与 λ_- 是指数抑制因子, 控制着尾部概率, $1_{\{x<0\}}$ 为示性函数. 由 $\int_{\mathbb{R}}v(\mathrm{d}x)=\infty$ 可知, 经典调和稳态过程是一个无限跳跃过程.

本文采用的三个过程, 既有调和稳态过程的一般特性, 又极大地简化了模型的复杂度, 使其更好地适用于期权定价. 应用三种调和稳态过程之前, 先对这三种调和稳态过程的 Lévy 测度及其特征函数作一个简要介绍, 见表 2.

表 2　三种调和稳态过程的 Lévy 测度与特征函数

Table 2　Lévy measures and characteristic functions for three tempered stable processes

调和稳态过程	Lévy 测度	特征函数
VG	$\begin{cases}\frac{C\mathrm{e}^{Gx}}{\|x\|}, & x<0\\ \frac{C\mathrm{e}^{-Mx}}{x}, & x>0\end{cases}$	$\left(\frac{GM}{GM+(M-G)\mathrm{i}u+u^2}\right)^C$
CGMY	$\begin{cases}\frac{C\mathrm{e}^{Gx}}{\|x\|^{Y+1}}, & x<0\\ \frac{C\mathrm{e}^{-Mx}}{x^{Y+1}}, & x>0\end{cases}$	$\exp\{C\Gamma(-Y)[(M-\mathrm{i}u)^Y+(G+\mathrm{i}u)^Y-M^Y-G^Y]\}$
CTS	$\begin{cases}\frac{C_-\mathrm{e}^{-\lambda_-\|x\|}}{\|x\|^{\alpha+1}}, & x<0\\ \frac{C_+\mathrm{e}^{-\lambda_+x}}{x^{\alpha+1}}, & x>0\end{cases}$	$\exp\{\Gamma(-\alpha)C_-[(\lambda_-+\mathrm{i}u)^\alpha-\lambda_-^\alpha]-\Gamma(-\alpha)C_+[(\lambda_+-\mathrm{i}u)^\alpha-\lambda_+^\alpha]\}$

从表 2 中不难得出, 当 CTS 过程的 C_- 与 C_+ 相等时, CTS 变成了 CGMY 过程, 而当 CGMY 过程的 Y 等于 0, CGMY 过程退化为 VG 过程. VG 过程是金融工程中较为经典的 Lévy 过程, 其拟合分布中的尖峰厚尾效果极佳, 但在拟合不对称尾部与长长的拖尾方面却不太理想, 而 CGMY 过程在拟合不对称尾部方面作了较大改进, 但在厚部的厚度方面改进却不那么明显. 而 CTS 过程不仅考虑了不对称厚尾, 还考虑到了尾部的厚度.

3.5　基于调和稳态过程均值回复模型的特征函数

将表 2 中的特征函数代入到式(2), 即可得到基于调和稳态的 JOU 模型(TSOU)的特征函数. 其中带 VG 过程的 JOU 模型(VGOU)特征函数为

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{VGOU}}(u)=\exp\Big\{&-\mathrm{i}\theta u\mathrm{e}^{-aT}+\mathrm{i}\theta u+\sigma^2u^2\mathrm{e}^{-2aT}/(4a)-\sigma^2u^2/(4a)+x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-aT}-\\&\int_0^T\left[C\ln\left(1+\left(\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}\right)/G\right)+C\ln\left(1-\left(\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}\right)/M\right)\right]\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}$$

带 CGMY 过程的 JOU 模型(CGMYOU)特征函数为

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{CGMYOU}}=\exp\Big\{&-\mathrm{i}\theta u\mathrm{e}^{-aT}+\mathrm{i}\theta u+\sigma^2u^2\mathrm{e}^{-2aT}/(4a)-\sigma^2u^2/(4a)+x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-aT}+\\&\int_0^t CM^Y\Gamma(-Y)\left[\left(1-\left(\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}\right)/M\right)^Y-1\right]\mathrm{d}s+\\&\int_0^t CG^Y\Gamma(-Y)\left[\left(1+\left(\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}\right)/G\right)^Y-1\right]\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}$$

带 CTS 过程的 JOU 模型(CTSOU)特征函数为

$$\psi_{\mathrm{CTSOU}}=\exp\Big\{\mathrm{i}\theta u\mathrm{e}^{-aT}+\mathrm{i}\theta u+\sigma^2u^2\mathrm{e}^{-2aT}/(4a)-\sigma^2u^2/(4a)+x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-aT}+$$

$$\int_0^t C_+{\lambda_+}^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\left[\left(1-\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}/\lambda_+\right)^{\alpha}-1\right]\mathrm{d}s+$$
$$\int_0^t C_-{\lambda_-}^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\left[\left(1+\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}/\lambda_-\right)^{\alpha}-1\right]\mathrm{d}s\Big\}.$$

将表 2 中的 Lévy 测度代入到式(8), 即可得出带调和稳态过程的 JCIR 模型(TSCIR)特征函数. 其中带 VG 过程的 JCIR 模型(VGCIR)的特征函数为

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{VGCIR}}(u)=&\left[1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)/(2a)\right]^{-2a\theta/\sigma^2}\exp\left[x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}/\left(1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)/(2a)\right)\right]\times\\&\exp\left[\int_0^t\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\xi\psi(s,u)}-1)v\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right]\\=&\left[1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)/(2a)\right]^{-2a\theta/\sigma^2}\exp\left[x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}\left(1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)/(2a)\right)\right]\times\\&\exp\left\{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}C\left[\mathrm{e}^{\xi u\mathrm{e}^{-as}\left(1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)/(2a)\right)}-1\right]\left(\frac{\mathrm{e}^{Gx}}{|x|1_{\xi<0}}+\frac{\mathrm{e}^{-Mx}}{x1_{\xi>0}}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right\}.\end{aligned}$$

进一步推导可得

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{VGCIR}}(u)=&\left[1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)/(2a)\right]^{-2a\theta/\sigma^2}\exp\left[x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}/\left(1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)/(2a)\right)\right]\times\\&\exp\Big\{-\int_0^t\left[C\ln\left(1+\left(\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}/\left(1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)\right)/(2a)\right)G\right)+\right.\\&\left.C\ln\left(1-\left(\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}/\left(1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)\right)/(2a)\right)M\right)\right]\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}$$

在求还 CGMY 过程的 CIR 模型(CGMYCIR)之前, 先求带 CTS 过程的 CIR 模型(CTSCIR)的特征函数

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{CTSCIR}}(u)=&\left[1-\sigma^2/(2a)\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)\right]^{-2a\theta/\sigma^2}\exp\left(x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}/\left(1-\sigma^2/(2a)\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)\right)\right)\times\\&\exp\Big\{\int_0^t C_+\lambda_+^{\alpha}\Gamma\left(-\alpha\right)\left[\left(1-\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}\left(1-\sigma^2/(2a)\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)\right)/\lambda_+\right)^{\alpha}-1\right]\mathrm{d}s+\\&\int_0^t C_-\left(\lambda_-\right)^{\alpha}\Gamma\left(-\alpha\right)\left[\left(1+\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}/\left(1-\sigma^2/(2a)\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)\right)/\lambda_-\right)^{\alpha}-1\right]\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}$$

由于 CGMYCIR 模型是 CTSCIR 模型的特殊形式, 只需要将相应的参数进行改变, 因此先给出 CTSCIR 模型的特征函数求解方法. 虽然 VG 过程也是 CTSCIR 模型的一种特殊形式, 但其中一个参数 α 趋于 0 时, 若用相同的计算方法, 其积分趋于无穷, 因而需转变计算方法. CTSCIR 模型的特征函数为

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{CTSCIR}}(u)=&\left[1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}/(2a)\right)\right]^{-\frac{2a\theta}{\sigma^2}}\exp\left[\frac{x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}}{1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}/(2a)\right)}\right]\times\\&\exp\left\{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\xi\frac{\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}}{1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)/(2a)}}-1\right]\left(\frac{C_+\mathrm{e}^{-\lambda_+\xi}}{\xi^{1+\alpha}}1_{\{\xi>0\}}+\frac{C_-\mathrm{e}^{\lambda_-\xi}}{|\xi|^{1+\alpha}}1_{\{\xi<0\}}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right\}.\end{aligned}\quad(8)$$

将式(8)化简, 可得

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{CTSCIR}}(u)=&\left[1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}/(2a)\right)\right]^{-\frac{2a\theta}{\sigma^2}}\exp\left[\frac{x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}}{1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}/(2a)\right)}\right]\times\\&\exp\left\{\int_0^t C_+\lambda_+^{\alpha}\Gamma\left(-\alpha\right)\left[\left(1-\frac{1}{\lambda_+}\frac{\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}}{1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)/(2a)}\right)^{\alpha}-1\right]\mathrm{d}s+\right.\\&\left.\int_0^t C_-\lambda_-^{\alpha}\Gamma\left(-\alpha\right)\left[\left(1+\frac{1}{\lambda_-}\frac{\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}}{1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)/(2a)}\right)^{\alpha}-1\right]\mathrm{d}s\right\}.\end{aligned}$$

对 CTSCIR 模型的特征函数参数进行变换, 从而得到 CGMYCIR 模型的特征函数

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{CGMYCIR}}(u)=&\left[1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)/(2a)\right]^{-\frac{2a\theta}{\sigma^2}}\exp\left[\frac{x\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-at}}{1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)(2a)}\right]\times\\&\exp\left\{\int_0^t CM^Y\Gamma\left(-Y\right)\left[\left(1-\frac{\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}}{M\left(1-\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)/(2a)\right)}\right)^{Y}-1\right]\mathrm{d}s+\right.\end{aligned}$$

$$\int_0^t G^Y\Gamma\left(-Y\right)\left[G\left(1+\mathrm{i}u\mathrm{e}^{-as}(1-\left(\sigma^2\mathrm{i}u\left(1-\mathrm{e}^{-as}\right)\right)/(2a)\right)\right)^Y-1\Big]\,\mathrm{d}s\Big\}.$$

4　期权定价方法

4.1　风险中性测度下的均值回复模型

虽有研究通过拉东尼克迪姆导数对一个均值回复模型进行测度变换, 使其在不考虑均值回复项时满足无套利原理, 具体参考文献[1]. 然而, 在考虑均值回复趋势项时, 均值回复过程很难通过测度变换将其变成一个鞅过程. 因此, 假定 VIX 自身不是一种可用作交易的基础资产, 其基础资产为构成 S&P500 指数的股票.

基于上述理论, 假定在风险中性测度下, VIX 可由式(25)进行刻画, 即

$$V_{\mathrm{RN},t}=\mathrm{e}^{\omega X_t}, \tag{9}$$

其中 $V_{\mathrm{RN},t}$ 是基础资产在风险中性测度下 VIX 在 t 时刻的值.

由于随机过程 X_t 具有均值回复性, 故 $\mathrm{e}^{\omega X_t}$ 也具有均值回复性, 在这模型下, VIX 时间序列的均值回复性可以得到较好体现. 从而将风险中性测度下的 VIX 取对数再缩小 ω 倍的过程 X, 不仅具有均值回复性, 也满足日历时间与内在时间驱动.

4.2　期权定价

选用概率论的方法对 VIX 看涨期权进行了实证分析. 将风险中性测度下 VIX 模型 $V_{\mathrm{RN},t}$ 代入看涨期权公式, 可得看涨期权公式

$$C_t=\mathrm{e}^{-rt}\int_{(\ln K)/\omega}^{\infty}(\mathrm{e}^{\omega X_t}-K)f(X_t)\mathrm{d}X_t. \tag{10}$$

由于 X 过程只有特征函数, 因此需要应用傅里叶逆变换

$$f(X_t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uX_t}\psi(u)\mathrm{d}u, \tag{11}$$

其中 $f(X_t)$ 为 X_t 的密度函数, 而 $\psi(u)$为特征函数.

将式(11)代入式(10), 交换积分次序可得

$$\begin{aligned}C_t&=\mathrm{e}^{-rt}\int_{(\ln K)/\omega}^{\infty}(\mathrm{e}^{\omega v_t}-K)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uX_t}\psi(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}X_t\\&=\frac{\mathrm{e}^{-rt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi(u)\left(\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}u+\omega)X_t}}{(-\mathrm{i}u+\omega)}-\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}u)X_t}K}{(-\mathrm{i}u)}\right)\Bigg|_{(\ln K)/\omega}^{\infty}\right]\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{12}$$

在上式中, 若要满足 $\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}u+\omega)X_t}$ 收敛, 则需 $\omega<0$, 但 $\omega<0$ 不一定成立, 这时从经济学的角度继续下面的计算. 设定一个足够大的值, VIX 在一个固定时间长度内, 价格超过这个足够大值概率非常小, 这样就可以用这个足够大值取代 ∞, 取一个上限 e^5, 因为从 VIX 历史观测, 其值最高不超过 100, 而且 VIX 具有较强的均值回复性, 这样可将式(12)进一步化简为

$$\begin{aligned}C_t&=\frac{\mathrm{e}^{-rt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\left[\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}u+\omega)X_t}}{(-\mathrm{i}u+\omega)}-\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}u)X_t}K}{(-\mathrm{i}u)}\right]\Bigg|_{(\ln K)/w}^{5/w}\mathrm{d}u\\&=\frac{\mathrm{e}^{-rt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\left[\frac{\mathrm{e}^{5(-\mathrm{i}u+\omega)/w}-\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}u+\omega)(\ln K)/w}}{(-\mathrm{i}u+\omega)}-\frac{\left(\mathrm{e}^{5(-\mathrm{i}u)/w}-\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}u)(\ln K)/w}\right)K}{(-\mathrm{i}u)}\right]\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{13}$$

本文没有使用固定无风险收益, 而是将其作为一个参数进行校正. VIX 期权不仅是一种投资产品, 同时也作为一种规避系统风险的工具, 可以对冲系统风险. 因此, 将定价模型中的 r 定义如下

$$r=r_n-r_p, \tag{14}$$

其中 r_n 表示风险中性测度下的固定收益率, 即无风险收益率, 而 r_p 表示为了对冲系统风险保障收益, 投资者付出的代价. 这一信息对投资者在没有得到 VIX 市场任何信息时, 考虑是否进入提供一定参考.

5 实证与检验分析

为了验证源于日历时间与内在时间视角构建的均值回复模型在 VIX 期权定价中的准确性, 本文不仅将此类均值回复模型与经典的非均值回复模型进行了比较, 而且还与经典的均值回复模型进行了比较. 在比较方法上, 采用整体均方误差、平均绝对误差与平均误差相对百分比. 同时, 对期权定价效果也进行了横向与纵向的比较, 并对实证结果进行综合分析.

5.1 实证模型的选择

验证基于调和稳态均值回复模型对 VIX 期权定价效果, 不仅要从其模型自身展开相关证明, 还要将其与经典随机模型和前沿随机模型进行对比, 证明其在 VIX 期权定价中更为精准. 由于本文主要创新是拟合内在时间带来的非对称跳, 将调和稳态过程引入到均值回复过程, 而调和稳态过程是 Lévy 过程中的一类, 因此在比较模型方面, 本文选择了经典的 Merton-Jump(MJ)跳过程, OU 过程与 CIR 过程.

MJ 过程是一个有限跳过程, 带 MJ 过程 BS 模型为 $X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum\limits_{k=1}^{N_t} Y_i$, 其中 W_t 是布朗运动, $Y_i \sim N\left(\alpha, \delta^2\right)$. 它的特征函数为

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_t}\right] = \exp\left\{t\left[\mathrm{i}\mu u - \sigma^2 u^2/2 + \lambda\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha u - \frac{1}{2}\delta^2 u^2} - 1\right)\right]\right\}. \tag{15}$$

在风险中性测度下, VIX 路径为

$$\mathrm{VIX}_t^{\mathrm{RN}} = \mathrm{VIX}_0^{\mathrm{RN}} \mathrm{e}^{X_t}. \tag{16}$$

对于 MJ 模型, 本文采用 FFT 求出其期权价格

$$C_T(k) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}vk} \frac{\mathrm{e}^{-rT} \varPhi_{\mathrm{RN}}^T\left(v - (\alpha+1)\,\mathrm{i}\right)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + \mathrm{i}\,(2\alpha+1)\,v} \mathrm{d}v. \tag{17}$$

OU 模型与 CIR 模型是经典的均值回复模型, 其模型详细介绍可以参考 Vasicek 等[37]和 Cox 等[33]. OU 模型为 $\mathrm{d}X_t = k(a - X_t)\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t$, 其中 a 为均值, k 为均值回复速度, σ 为波动率, B_t 为布朗运动, OU 过程的特征函数为

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_t}\right] = \exp\left(\mathrm{i}au - \mathrm{i}au\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kT} + \sigma^2 u^2/(4k) + x_0 \mathrm{i}u\mathrm{e}^{-kT}\right). \tag{18}$$

CIR 模型为 $\mathrm{d}X_t = a(\theta - X_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t$, 其中 a 是均值回复速度, θ 为均值, σ 为波动率, W_t 为波动布朗运动. 其过程的特征函数为

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_t}\right] = \left[1 - \frac{\sigma^2}{2a}\mathrm{i}u\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)\right]^{-\frac{2a\theta}{\sigma^2}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}xu\mathrm{e}^{-at}}{1 - \frac{\sigma^2}{2a}\mathrm{i}u\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)}\right]. \tag{19}$$

5.2 实证模型参数估计

采用发行日为 2017–10–19, 到期日为 2018–04–20 的 VIX 看涨期权进行了实证. 同时为了更全面地比较 VIX 期权模型的定价精准度, 在 VIX 期权合约执行价格方面, 选取从 10 到 24, 扣除最后到期的 3 个异常日, 整个期权合约数量为 1 845. 在参数估计方面, 采用以最小化期权的均方误差为目标函数进行优化. 应用计算机智能优化算法, 即可得到其模型参数, 见表 3.

由于 VIX 是一个均值回复过程, 其市场收益率一般在 0 的左右波动. 在本文中, 将风险中性测度下 VIX 市场利率作为一个待估参数. 从参数估计结果来看, 基于调和稳态的均值回复模型的利率在 $-0.003\,1$ 到 $-0.003\,5$ 之间波动, 是一个负值, 主要由于风险升水, 因为 VIX 期权同时作为一种对冲系统性风险的保险. MJ 模型中 VIX 市场收益率在 $-0.133\,5$, 这种异常是由于模型不能较好拟合 VIX 期权造成的.

表 3 VIX 期权定价模型估计值

Table 3 Estimation parameters of VIX option pricing models

Models	α	σ	r	ω	C	G	M	Y	
Pares of OU	10.610 73	19.576 05	2.180 42	−0.005 27					
Paras of CIR	14.502 75	9.879 60	−0.005 33	2.209 79					
Paras of VGOU	0.016 94	0.022 09	−0.000 31	4.015 41	0.003 618	3.265 82	4.015 41		
Paras of CGMYOU	0.017 17	0.105 59	0.000 00	0.840 08	1.9×10^{-10}	119.966 20	15.747 23	1.4×10^{-9}	
Paras of VGCIR	0.018 02	0.019 24	−0.002 22	7.407 73	0.000 47	0.000 48	12.799 38	—	
Paras of CGMYCIR	0.014 61	0.012 22	−0.000 70	9.701 65	3.027 61	7.739 66	0.090 95	7.8×10^{-10}	
Models	σ	λ	μ	δ	r				
Paras of MJ	0.060 90	0.468 40	−0.999 90	0.286 40	−0.133 50				
Models	a	σ	r	ω	α	C_+	C_-	λ_+	λ_-
Paras of CTSOU	0.016 88	0.112 91	0.000 00	0.850 81	1.7×10^{-9}	1.3×10^{-10}	0.211 43	18.875 29	158.43
Paras of CTSCIR	0.012 66	0.011 50	−0.014 15	9.712 301	1.3×10^{-8}	0.002 84	0.038 68	9.806 65	9.712 38

5.3 模型检验

参数估计本文应用 MMSE(最小均方误差)的方法, 其估计方法也是一种检验方法. 为了多角度进行比较, 在应用 MMSE 的同时应用了 AE(平均绝对误差)与 RPAE(平均误差相对百分比), 其中 MMSE, AE 和 RPAE 具体表达式为

$$\mathrm{MMSE}=\sum_{i=10}^{24}\sum_{t=1}^{123}(M_{i,t}^{\mathrm{MODEL1}}-C_{i,t})^2, \tag{20}$$

$$\mathrm{AE}_{\mathrm{MJ}}^{\mathrm{MODEL1}}=\frac{1}{\mathrm{NT}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left|M_{i,t}^{\mathrm{MODEL1}}-C_{i,t}\right|, \tag{21}$$

$$\mathrm{RPAE}_{\mathrm{MJ}}^{\mathrm{MODEL1}}=\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left|M_{i,t}^{\mathrm{MODEL1}}-C_{i,t}\right|\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left|M_{i,t}^{\mathrm{MJ}}-C_{i,t}\right|\right)^{-1}, \tag{22}$$

其中 $M_{i,t}^{\mathrm{MODEL1}}$ 表示成交价为 i, 交易日为 t 时 MODEL1 模型得到的期权价格, C 表示真实的期权价格, $\mathrm{RPAE}_{\mathrm{MJ}}^{\mathrm{MODEL1}}$ 是以 MJ 模型定价误差绝对值为参考基准, MODEL 1 得到的百分比.

根据 MMSE, AE, RPAE 公式, 即可得出估计结果, 见表 4.

表 4 期权模型的 MMSE 与 RPAE 值

Table 4 MMSE and RPAE values of option models

Models	MSE	AE	RPAE
OU	6 374.221	1.370 3	92.53%
CIR	6 114.602	1.347 0	90.96%
MJ	8 482.00 1	1.480 9	100.00%
VGOU	779.100 3	0.425 4	28.73%
CGMYOU	789.898 3	0.429	28.97%
CTSOU	766.629 6	0.4245	28.67%
VGCIR	718.797 5	0.3903	26.36%
CGMYCIR	557.707	0.293 1	19.79%
CTSCIR	490.238 9	0.277 2	18.72%

由于本文采用的数据是一个面板数据, 不仅包括了整个期权发行期, 也包含了各个成交价格的数据, 因此, MMSE 的值较大. 对比结果显示, 定价欠佳的 MJ 模型的 MMSE 值是 CTSCIR 模型值的 17.30 倍, 同时

其AE值也是 CTSCIR 的 5.34 倍, 充分说明了本文构建的模型在定价精准度方面有显著优势. 同时, 参数较少的 OU 模型与 CIR 模型定价比 MJ 模型定价更为精准, 说明 VIX 具有均值回复趋势. 源于日历时间与内在时间的视角构建的带调和稳态的均值回复模型相较一般的均值回复模型 OU 模型与 CIR 模型, 其 MSE 值与 AE 值都明显变小, 论证了源于日历时间与内在时间视角的必要性.

值得注意的是, 参数比 VGOU 模型多的 CGMYOU 模型精准度反而不高, 说明选择适合模型的重要性. 在本文中, CTSOU 模型的定价要比 CTSCIR 模型精准, 说明在源于日历时间与内在时间视角构建的带调和稳态的均值回复模型中, 日历时间带来波动的大小与 VIX 有较大相关性.

为进一步论证源于日历时间与内在时间视角构建的带调和稳态的均值回复模型定价的有效性, 本文对模型定价效果进行了纵向与横向的比较. 纵向比较的方法是选取 4 个成交价格的期权时间序列, 然后比较每一种模型在 4 个成交价格中不同的定价. 4 个成交价格分别为 10, 15, 19 与 24, 选择成交价为 10 与 24 期权的原因是成交价为 10 的几乎为价内期权, 而 24 几乎为价外期权；选择成交价为 15 与 19 的原因是 VIX 基本在这区域内波动. 鉴于本文构建了多个带调和稳态的均值回复模型, 而且带调和稳态的均值回复模型大同小异. 在图形实证上, 为了避免线条太多无法分辨, 这里主要应用了 MJ, OU, CIR 与 CTSCIR. 4 个成交价格对应的期权价值与构建模型的定价效果见图 5～图 8, 4 个交易日对应的真实价格与模型价格见图 9～图 12.

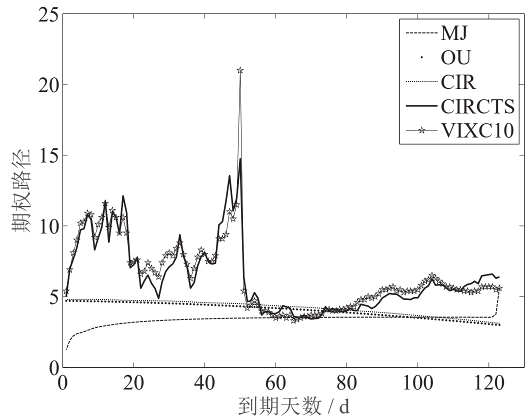

图 5　定价效果(成交价=10)

Fig. 5　Pricing effect (Strike=10)

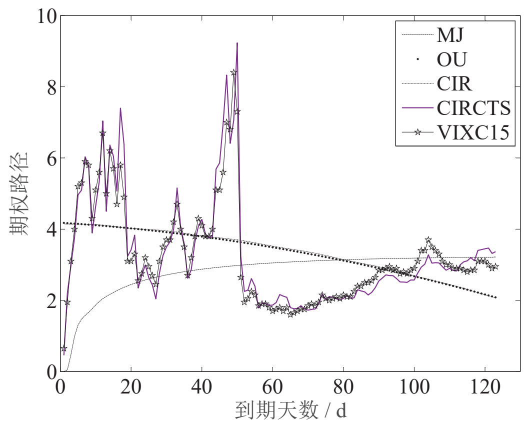

图 6　定价效果(成交价=15)

Fig. 6　Pricing effect (Strike=15)

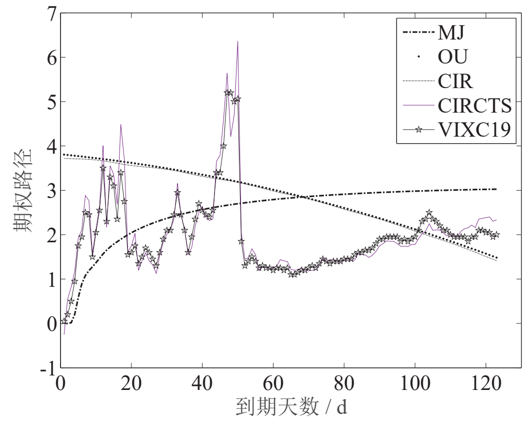

图 7　定价效果(成交价=19)

Fig. 7　Pricing effect (Strike=19)

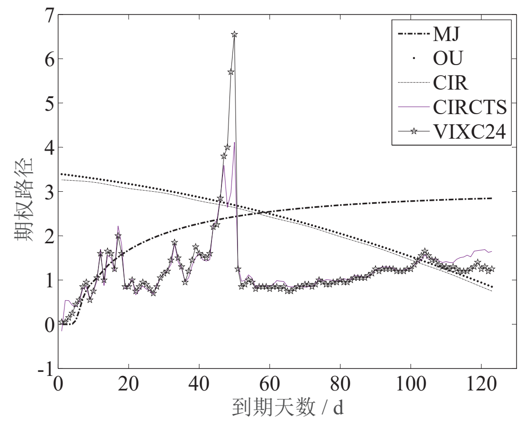

图 8　定价效果(成交价=24)

Fig. 8　Pricing effect(Strike=24)

图 5～图 8 中, 横轴是期权日期, 纵轴是指定的成交价格下各模型的定价与真实期权价格的路径. 从上

图分析不难得出, 无论哪只期权, CTSCIR 的定价精准度都要明显优于其他模型. 但由于实证的参数是基于 15 条不同成交价格期权求得, 在拟合期权的波动性方面存在一些不足. 如果只针对某支指定成交价格的期权, 其定价效果要更为理想.

横向比较是指定一个时点, 不同成交价格的期权模型之间的比较. 与前面的比较一样, 横向比较采用的 4 个模型不变. 在时点的选择上, 选择第 1 个交易日、第 30 个交易日、第 90 个交易日与第 120 个交易日 4 个指定时点. 这 4 个交易时点比较具有代表性, 选择第 1个交易日是因为它是期权时间的起点, 第 30 个交易日与第 90 个交易日分别为期权时间中间部分的抽样, 选择第 120 个交易日是因为它是期权时间临界终点.

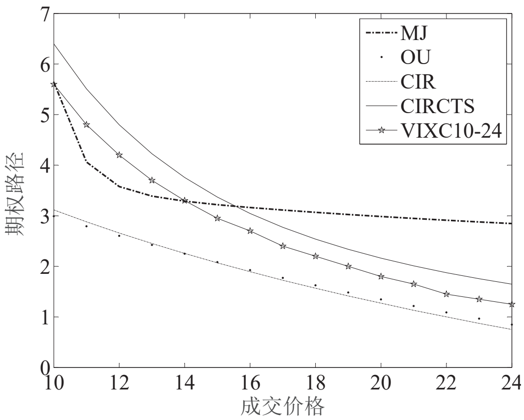

图 9　定价效果(交易日=1)

Fig. 9　Pricing effect (Trading day=1)

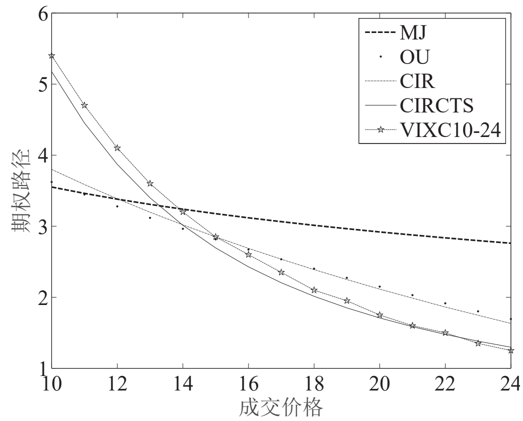

图 10　定价效果(交易日=30)

Fig. 12　Pricing effect (Trading day=30)

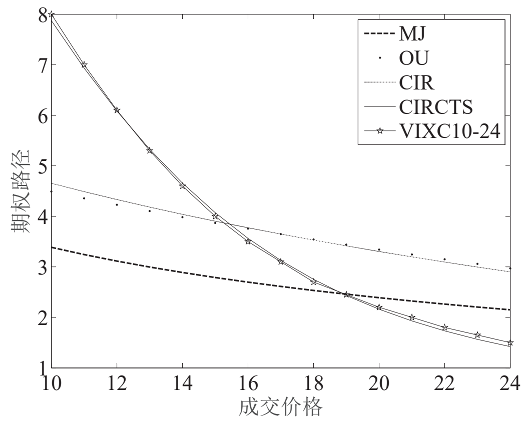

图 11　定价效果(交易日=90)

Fig. 11　Pricing effect (Trading day=90)

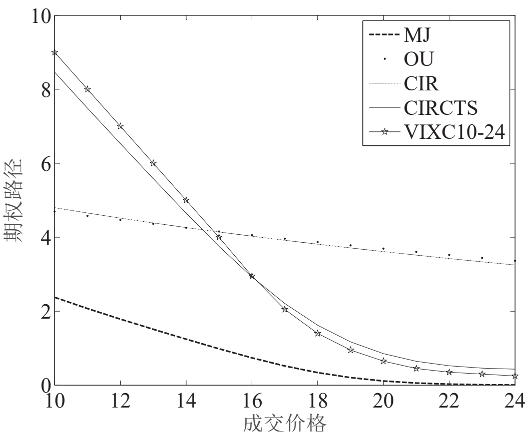

图 12　定价效果(交易日=120)

Fig. 12　Pricing effect (Trading day=120)

图 9 至图 12 中, 横轴表示不同的成交价格, 纵轴表示在指定时点各模型的定价与真实期权价格的路径. 在 4 个不同的交易日, 定价效果最为理想的是 CTSCIR, MJ 模型效果最差, OU 与CIR 居中, 特别是在第 90 个交易日时, CTSCIR 模型价格与真实 VIX 期权价格几近重合. CTSCIR 在第 1 个交易日与第 120 个交易日拟合效果欠佳, 造成效果欠佳的原因是第 1 个交易日与最后一个交易日的特殊性, 即大多数投资者在第 1 个交易日与临近到期日的几个交易日情绪波动与认知有较大的差异.

通过实证分析, 源于日历时间与内在时间视角构建带调和稳态的均值回复模型明显优于经典的 MJ 模型与一般均值回复模型. 本文构建的模型, 不仅能较好的拟合金融时间序列数据非高斯性与波动集聚性, 同时具备较好的经济解释.

6 结束语

应用一类经济模型解释一种经济现象, 同时从经济理论方面给出解释, 主要考虑如下因素: 一是这个模型能否较好地刻画经济特征, 二是这个经济模型与真实经济数据的拟合程度. 随着许多学者不断提出内在时间与时变观念, 引入内在时间与自然时间结合已成构建模型的必要, 而调和稳态过程是基于内在时间概念而建立的. 当然, 源于内在时间与时变观念, 如何运用复杂的随机过程去拟合时间序列路径, 也是数量经济常提常新的课题. 任何一个市场都不是完美的, 投资者也不是完全理性的, 由此造成数理模型无法解释的误差. 因此, 在构建数理模型时, 需进一步考虑 VIX 的异常给投资者行为带来的冲击. 如何将行为金融相关理论纳入到数理定价模型, 有待进一步研究.

参考文献:

[1] Mencía J, Sentana E. Valuation of VIX options. Journal of Financial Economics, 2012, 108(2): 367–391.

[2] Park Y H. The effects of asymmetric volatility and jumps on the pricing of VIX options. Journal of Econometrics, 2016, 192(1): 313–328.

[3] Luo X, Zhang J, Zhang W. Instantaneous squared VIX and VIX derivatives. Journal of Futures Markets, 2019, 39(10): 1–21.

[4] Whaley, Robert E. Derivatives on market volatility. The Journal of Derivatives, 1993, 1(1): 71–84.

[5] Grünbichler A, Longstaff F A. Valuing futures and options on volatility. Social Science Electronic Publishing, 1996, 20(6): 985–1001.

[6] Zhang J E, Zhu Y. VIX futures. Journal of Futures Markets, 2006, 26(6): 521–531.

[7] Dotsis G, Psychoyios D, Skiadopoulos G. An empirical comparison of continuous-time models of implied volatility indices. Journal of Banking & Finance, 2007, 31(12): 3584–3603.

[8] Wang Z, Daigler R T. The performance of VIX option pricing models: Empirical evidence beyond simulation. Journal of Futures Markets, 2011, 31(3): 251–281.

[9] Detemple J, Osakwe C. The valuation of volatility options. Review of Finance, 2000, 4(1): 21–50.

[10] Barletta A, Nicolato E. Orthogonal expansions for VIX options under affine jump diffusions. Quantitative Finance, 2018, 18(6): 1–17.

[11] Bardgett C, Gourier E, Leippold M. Inferring volatility dynamics and risk premia from the S&P500 and VIX markets. Journal of Financial Economics, 2019, 131(3): 593–618,.

[12] Hurst S R, Platen E, Rachev S T. Option pricing for a logstable asset price model. Mathematical & Computer Modelling, 1999, 29(4): 105–119.

[13] Wu L. Dampened power law: Reconciling the tail behavior of financial security returns. Journal of Business, 2006, 79(3): 1445–1473.

[14] Kim Y S, Rachev S T, Bianchi M L, et al. A New Tempered Stable Distribution and Its Application to Finance. Heidelberg: Physica-Verlag, 2009: 77–109.

[15] Kim Y S, Rachev S T, Bianchi M L, et al. Tempered stable and tempered infinitely divisible GARCH models. Journal of Banking & Finance, 2010, 34(9): 2096–2109.

[16] Kim Y S, Rachev S T, Bianchi M L, et al. Time series analysis for financial market meltdowns. Journal of Banking & Finance, 2011, 35(8): 1879–1891.

[17] Carr P, Wu L. Time-changed Lévy process and option pricing. Finance, 2002, 71(1): 113–141.

[18] Rosiński J. Tempering stable processes. Stochastic Processes & Their Applications, 2007, 117(6): 677–707.

[19] Bianchi M L, Rachev S T, Fabozzi F J. Tempered stable Ornsteina Uhlenbeck processes: A practical view. Communications in Statistics: Simulation and Computation, 2013, 46(1): 423–445.

[20] Madan D B. Pricing options on mean reverting underliers. Quantitative Finance, 2016, 17: 1–17.

[21] 刘志东, 陈晓静. 无限活动纯跳跃 Lévy 金融资产价格模型及其 CF-CGMM 参数估计与应用. 系统管理学报, 2010, 19(4): 71–81.
Liu Z D, Chen X J. Infinite activity pure jump Lévy rrocess for financial assets price and its estimation by characteristic function based on GMM with a continuum of moment conditions. Journal of Systems & Management, 2010, 19(4): 71–81. (in Chinese)

[22] 刘志东, 刘雯宇. Lévy 过程驱动的非高斯 OU 随机波动模型及其贝叶斯参数统计推断方法研究. 中国管理科学, 2015, 23(8): 1–9.
Liu Z D, Liu W Y. The non Ornstein-Uhlenbeck models driven by the general Lévy process and its Bayesian inference. Chinese Journal of Management Science, 2015, 23(8): 1–9. (in Chinese)

[23] 朱福敏, 郑尊信, 吴恒煜. 基于无穷跳–扩散双因子交叉回馈模型的期权定价. 系统工程学报, 2017, 37(5): 64–73.
Zhu F M, Zheng Z X, Wu H Y. Option valuation for the double-factor-cross-feedback infinite activity jump-diffusion model. Journal of Systems Engineering, 2017, 37(5): 64–73. (in Chinese)

[24] 宫晓莉, 庄新田. 双指数跳跃扩散条件下上市公司违约风险分析. 系统工程学报, 2018, 33(2): 44–54.
Gong X L, Zhuang X T. Default risk for listed companies in double exponential jump diffusion process. Journal of Systems Engineering, 2018, 33(1): 44–54. (in Chinese)

[25] Yin Y, Li S, Yu T, et al. OU models based on positive and negative subordinate processes applying in SHIBOR time series analysis and derivative pricing: Through discrete differential method. Journal of Difference Equations and Applications, 2019, 25(9): 1302–1320.

[26] 刘志东, 刘雯宇, 阮禹铭. Lévy 过程驱动非高斯 OU 随机波动率下的期权定价. 管理科学学报, 2019, 22(1): 17–43.
Liu Z D, Liu W Y, Ruan Y M. Option pricing in non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes driven by the Lévy process. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(1): 17–43. (in Chinese)

[27] 鲍群芳, 陈　思, 李胜宏. VIX 期权定价与校正. 金融理论与实践, 2012(4): 67–70.
Bao Q F, Chen S, Li S H. VIX option pricing and correction. Financial Theory & Practice, 2012(4): 67–70. (in Chinese)

[28] 周海林, 吴鑫育. 基于 VIX 的波动率风险溢价估计. 中国管理科学, 2013, 21(S1): 365–374.
Zhou H L, Wu X Y. Estimation of the volatility risk premium based on VIX. Chinese Journal of Management Science, 2013, 21(S1): 365–374. (in Chinese)

[29] 柳向东, 杨　飞, 彭　智. 随机波动率模型下的 VIX 期权定价. 应用数学学报, 2015, 38(2): 285–292.
Liu X D, Yang F, Peng Z. The VIX option pricing based on stochastic volatility models. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2015, 38(2): 285–292. (in Chinese)

[30] 王骋翔, 李胜宏, 胡文彬, 等. VIX 期权的状态转换随机波动率定价模型. 高校应用数学学报, 2015, 30(3): 347–354.
Wang C X, Li S H, Hu W B, et al. Pricing VIX option under Heston stochastic volatility model with regime switching. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2015, 30(3): 347–354. (in Chinese)

[31] Das S R. The surprise element: Jumps in interest rates. Journal of Econometrics, 2002, 106(1): 27–65.

[32] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. Econometrica, 2000, 68(6): 1343–1376.

[33] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 1985, 53(2): 385–407.

[34] Duffie D, Garleanu N. Risk and valuation of collateralized debt obligations. Financial Analysts Journal, 2001, 57(1): 41–59.

[35] Jin P, Kremer J, Barbara R. Moments and ergodicity of the jump-diffusion CIR process. Stochastics, 2017, 89(3): 1–24.

[36] Madan D B, Seneta E. The variance gamma model for share market returns. Journal of Business, 1990, 63(4): 511–524.

[37] Oldrich V. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial & Quantitatve Analysis, 1977, 5(4): 627–627.

作者简介:

尹亚华(1985—), 男, 湖北荆州人, 博士, 研究方向:金融工程与数理金融; Email: ziqingyin@163.com;

吴恒煜(1970—), 男, 广东雷州人, 教授, 博士生导师, 研究方向:金融工程与金融经济学, Email: wuhengyu@163.com;

朱福敏(1985—), 男, 江西赣州人, 博士, 副教授, 研究方向:风险管理与衍生品定价; Email: zhufumin520@163.com.