

任务优先满足和绩效奖励的重叠联盟效用分配

桂海霞¹, 赵邦磊¹, 张国富², 苏兆品², 蒋建国²

(1. 安徽理工大学经济与管理学院, 安徽 淮南 232001;

2. 合肥工业大学计算机与信息学院, 安徽 合肥 230009)

摘要: 效用分配是联盟形成中的一个难点问题, 合理的效用划分方式有利于联盟的形成与稳定. 针对重叠联盟中一个 Agent 可以参与多个任务的复杂情形, 提出了任务优先满足的任务分派方法. 当新的 Agent 成员加入到联盟中时, 任务分派时对原有联盟成员给予绩效奖励, 然后根据任务分派情况进行效用划分, 最后通过实例与已有的效用分配策略进行了对比分析. 结果表明, 本文所提策略能更好的满足效用非减, 充分体现各 Agent 对联盟贡献的差异性, 同时满足时效性、稳定性和动态性等特征.

关键词: 重叠联盟; 任务分派; 绩效奖励; 效用分配

中图分类号: TP181

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2021)03-0302-12

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2021.03.002

Payoff distribution of overlapping coalitions for task priority satisfaction and performance rewards

Gui Haixia¹, Zhao Banglei¹, Zhang Guofu², Su Zhaopin², Jiang Jianguo²

(1. School of Economics and Management, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China;

2. School of Computer and Information Science, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Payoff distribution is a difficult problem in coalition formation, and a reasonable payoff division is conducive to the formation and stability of coalition. Considering the complex situation that one agent can participate in multiple tasks in the overlapping coalition, this paper proposes a task assignment method for task priority satisfaction. when a new agent member joins the coalition, the original coalition members are given performance rewards during task assignments, and then the payoff is divided according to task assignment. Finally, a case study is carried out to compare with the existing payoff distribution strategies. The results show that the strategy proposed in this paper can better meet the non-diminishing condition of utility and fully reflect the differences of the contributions of each agent member of the coalition. At the same time, it can also satisfy the characteristics of timeliness, stability and dynamic.

Key words: overlapping coalition; task assignment; performance rewards; payoff distribution

1 引 言

在多 Agent 系统(multi-agent systems, MAS)^[1]中, 当单个 Agent 的资源有限无法独自完成某个任务时, 可以联合多个 Agent 组成团队共同完成任务, 这样的团队即为联盟^[2]. 作为 MAS 中一种主要的协作方式, 联

收稿日期: 2020-01-08; 修订日期: 2021-03-01.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61703005); 安徽省自然科学基金资助项目(1808085MG221); 安徽理工大学硕博基金资助项目(12059).

盟形成已广泛应用于电子商务^[3]、研发合作^[4]、多机器人协作^[5]、传感器网络^[6]、电力传输^[7]、虚拟企业^[8]和动态供应链^[9]等诸多领域。

联盟形成是联盟进行一切活动的基础, 主要包含三个方面的研究内容: 联盟值计算^[10,11]、联盟结构生成^[12,13]和效用分配^[14,15]。其中效用分配是联盟形成的关键, 直接影响了联盟的稳定性和 Agent 执行任务的积极性。效用分配的不合理会导致 Agent 提前退出联盟, 从而可能导致任务执行失败。因此, 在效用分配中, 一般要求, 每个 Agent 获得的效用应该和它自身的贡献相匹配。此外, 新 Agent 请求加入联盟时要保证不能损害已有 Agent 成员的原来的预期效用, 即满足效用非减。

虽然目前效用分配研究已经取得了一些研究成果, 但大都局限于非重叠联盟^[16], 即要求每个 Agent 在任意时刻只能参与一个任务, 造成 Agent 资源的极大浪费。在重叠联盟形成(overlapping coalition formation, OCF)^[17]中, 一个 Agent 可以同时参与多个联盟承担多个任务。这种重叠协作模式既提升了 MAS 的资源利用率, 又提升了任务的执行效率。然而, 如何在多个联盟之间分配效用, 尤其如何给参与多个任务的 Agent 成员划分效用是面临的一个难点问题。已有效用分配策略效率低下, 重叠联盟形成困难, 且新 Agent 加入联盟时往往难以满足效用非减。

Rosenschein^[18]最早将博弈论引入多 Agent 系统, 以效用函数最大化为目标进行了求解。在现实生活中动态复杂的环境下, 随机因素的增加使合作变得更复杂, 主题合作缺乏纳什均衡效率, 静态合作博弈就逐渐演变成动态合作博弈^[19-22]。在合作博弈的过程中, 大部分效用划分方案是根据夏普利(Shapley)值^[23]求解的, Shapley 值体现了各 Agent 对联盟总目标的贡献程度, 但是计算方法太过复杂, 求解难度与联盟形成的 Agent 个数成指数倍增长。虽然一些学者对 Shapley 值进行了改进^[24-26], 但是也难以跳脱阶乘方法的局限性。

为了顺应联盟灵活性的特点, 一些学者设计了简单有效的联盟效益分配方式, 罗翊等^[27]设计了效用非减性分配原则, 这种联盟形成策略优于 Shapley 值方法, 因为过分追求计算简单而忽视了 Agent 对联盟贡献的差异性, 并且打击了能给联盟带来额外效用的新 Agent 加入的积极性。为了体现联盟贡献的差异性, 夏娜等^[28]采用了一种利益均衡的联盟形成策略, 提高了对额外效用分配的合理性, 也在一定程度上维护了后加入联盟 Agent 的利益。蒋建国等^[29]提出了一种基于能力向量发挥率和拍卖的效用行为分配原则, 也体现出了联盟贡献差异, 但是以上两种效用分配策略都属于非重叠联盟机制的范畴。针对重叠联盟效用划分, 张国富等^[30]提出了讨价还价的效用分配策略, 但是该方法不能处理多任务并发的情况, 只能对多联盟的效用划分依次串行进行。桂海霞等^[31]基于能者多劳的思想对重叠联盟的效用实现了并行分派, 但是采取按比例分配效用方式缺乏灵活性, 不利于重叠联盟的形成。

通过以上研究发现联盟效用分配策略主要存在以下问题: 平均分配策略^[27,28]、基于能力大小分配策略^[29]等都没有反映出 Agent 之间对联盟贡献的差异性, 不利于联盟的稳定性; 串行的重叠联盟分配策略^[30]导致效用分配效率低下, 与高效快速的联盟理念相悖; 按比例分配效用分配策略^[31]则难以满足效用非减原则, 不利于联盟的形成等。为此, 本文在总结和分析前人工作的基础上, 根据每个 Agent 拥有的资源状况和任务的实际需求, 提出了一种面向任务优先满足和绩效奖励的重叠联盟效用分配策略, 并分别讨论了效用分配应用的两种情形: 1) 联盟形成初始; 2) 现有联盟完成任务新成员加入时。针对情形 1), 按照现有效用分配策略, 在联盟形成时, 各成员根据自身资源量去执行各个任务, 当任务需求量高于成员资源拥有量时则导致任务失败。因此首先提出一种优先满足任务需求的任务分派方法, 保证联盟任务的顺利完成, 同时提出一种动态调整策略, 当 Agent 成员之间资源出现冲突时进行利益均衡调整, 保证联盟平稳运行。情形 2), 在超加环境中^[32], 新 Agent 的加入会给联盟带来额外效用。为此, 提出一种绩效奖励的方法, 在面对原有重叠联盟完成一定任务新 Agent 请求加入的情形时, 设置绩效奖励系数, 使原有 Agent 可获得更高的效用分配, 满足效益非减原则, 新加入的 Agent 也有利可图, 更易于联盟的形成, 规避现有重叠联盟效用分配策略的缺陷。最后通过实例与现有效用分配策略进行了对比分析, 证明了此方法的有效性, 有效解决重叠联盟并发多任务的资源冲突问题, 提高求解效率, 并体现了联盟形成的稳定性、时效性和动态性等特征。

2 重叠联盟描述

假设重叠联盟由 m 个拥有一定资源量的 Agent 组成 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 成员共同协作完成 n 个任务 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, 其中 $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ 表示任务的重要程度.

$\forall a_i \in A$ 都有 r 种资源向量, 即 $B_i = [b_1^i, b_2^i, \dots, b_r^i]$, b_k^i 表示 a_i 第 k 种资源的数量, $0 \leq b_k^i < \infty, i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, r, r \in N$. Agent 资源可用 $m \times r$ 矩阵表示为

$$B_{m \times r} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_r^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & b_2^m & \dots & b_r^m \end{bmatrix}. \quad (1)$$

联盟完成的 $\forall t_j \in T$ 任务都有 r 种资源需求, $D_j = [d_1^j, d_2^j, \dots, d_r^j]$, $0 \leq d_k^j < \infty, j = 1, 2, \dots, n$. 任务 T 所需资源向量 $n \times r$ 矩阵可表示为

$$D_{n \times r} = \begin{bmatrix} d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_r^1 \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1^n & d_2^n & \dots & d_r^n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

C_j 为多个 Agent 构成的联盟, $C_j \subset A$ 且 $C_j \neq \emptyset$. 令 $b_k^{C_j}$ 表示 C_j 中所包含的各个 Agent 的第 k 种资源的数量之和, 当且仅当 $b_k^{C_j} \geq d_k^j$, 联盟 C_j 资源向量大于任务需求资源量, 任务 t_j 才能顺利完成. C_{j_1}, C_{j_2} 是两个不同的重叠联盟, $C_{j_1} \cap C_{j_2} \neq \emptyset$, 即有 j 个 Agent 同时参与了任务 $t_{j_1}, t_{j_2}, j \geq 1$.

与惯例一样^[30,31], 特征函数 $v(C_j)$ 表示联盟 C_j 的收益值

$$v(C_j) = \Omega(t_j) - \Theta(C_j) - P(C_j), \quad (3)$$

其中 $\Omega(t_j)$ 为联盟 C_j 完成任务 t_j 所应得的报酬, 一般为一个给定的常数; $\Theta(C_j)$ 指各 Agent 参与任务 t_j 所花费的资源成本, 通常为联盟中各成员贡献的资源

$$\Theta(C_j) = \sum_{k=1}^r d_k^j, \quad (4)$$

在重叠联盟中, a_i 可能同时参与了多个联盟任务, 不同联盟实际贡献的资源量是有所不同的; $P(C_j)$ 表示联盟完成任务 t_j 时各成员之间的通信成本之和, Agent 间的通信开销通常为一个定值, $p_{ij} = 0, p_{ij} = p_{ji}$. 若联盟 $C_j = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 则 $P(C_j) = (p_{12} + p_{13} + \dots + p_{1m}) + (p_{23} + p_{24} + \dots + p_{2m}) + \dots + (p_{m-1,m})$.

由 OCF 可知, 对于 m^* ($m^* < m$) 个 Agent 组成的联盟 C_j 中, $P(C_j)$ 由 $m^*(m^* - 1)/2$ 个 p_{ii^*} 组成, 每个 Agent 被用到 $m^* - 1$ 次. 为了更好地促进联盟的形成, 本文讨论在超加性环境中, 若满足对 $\forall C_1, C_2 \subset A$, 假如 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, 则 $v(C_1) + v(C_2) \leq v(C_1 \cup C_2)$, 即新成员的加入能给联盟带来额外效用.

对于合法联盟 C_j 中每个 $a_i \in A$ 完成任务 $t_j \in T$ 都应有一个实际资源贡献量, 可表示为 $W_{ij} = [w_1^{ij}, w_2^{ij}, \dots, w_r^{ij}]$, 若成员 a_i 参与了任务 t_j , 则 $w_k^{ij} > 0$, 否则 $w_k^{ij} = 0$.

在某一时刻, a_i 参与所有任务的实际资源贡献量应小于其初始资源拥有量, 即 $0 \leq w_k^{ij} \leq b_k^i$, 否则会产生资源冲突. 另外, 重叠联盟 C_j 的资源向量 $B_{C_j} = [b_1^{C_j}, b_2^{C_j}, \dots, b_r^{C_j}]$, 应该是其每个 Agent 成员的实际贡献量之和, 有 $b_k^{C_j} = \sum_{a_i \in C_j} w_k^{ij}$, 也等于任务资源需求, 即 $B_{C_j} = \sum_{a_i \in C_j} W_{ij} = D_j$.

设定每个 $a_i \in A$ 参与联盟任务 $t_j \in T$ 会有一个临时承担的资源量, 表示 a_i 可能为 t_j 提供的资源

数量 $L_{ij} = [l_1^{ij}, l_2^{ij}, \dots, l_r^{ij}]$. 如果 a_i 参与了 t_j , 则 $l_k^{ij} > 0$, 否则 $l_k^{ij} = 0$. 一般而言, 有 $0 \leq l_k^{ij} \leq b_k^i$; 但是 $0 \leq l_k^{ij} \leq d_k^j$ 不一定成立, 有可能出现 $l_k^{ij} > d_k^j$ 的情况, 此时需要对 L_{ij} 进行动态的调整, 达到成员 a_i 实际贡献量等于实际任务需求量 $w_k^{ij} = d_k^j$.

$\forall a_i \in A$ 完成联盟任务 t_j 后可能会有剩余资源, 用 S_i 表示, 即 $S_i = [s_1^i, s_2^i, \dots, s_r^i]$, $0 \leq s_k^i \leq b_k^i$. 假如 a_i 没有进入任何联盟, 也就意味着没有贡献自己的资源量, 剩余资源量等于初始资源量 $S_i = B_i$, 否则 $s_k^i = b_k^i - \sum_{j=1}^n w_k^{ij}$. 这里, W_{ij} 表示 a_i 为任务 t_j 实际承担的资源量, S_{ij} 为完成任务后剩余的资源量, L_{ij} 描述了临时承担的资源量, 可根据任务需求动态调整.

根据以上描述, 重叠联盟形成就是要使系统总收益 v_{MAS} 达到最大, 即

$$\text{Max } v_{MAS} = \sum_{j=1}^n v(C_j), \quad (5)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m B_i \geq \sum_{j=1}^n D_j, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m w_k^{ij} = d_k^j, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n w_k^{ij} \leq b_k^i, \quad (8)$$

其中式(6)表示重叠联盟问题有可行解的条件, 即所有 Agent 能力之和不能低于所有任务需要的能力之和; 式(7)任务分派量等于联盟成员实际资源贡献量的条件, 即表示任务每种资源需求量等于联盟成员每种资源实际贡献量之和; 式(8)表示联盟成员避免资源冲突的条件, 即联盟中每个 Agent 每种资源实际贡献量不能超过自身拥有量.

3 重叠联盟效用分配策略

3.1 效用分配原则

合法的 MAS 中每个 Agent 成员有自己的任务, 完成相应任务获得一定的效用. Agent 之间相互协作可以减少自己的工作量, 以此获得额外效用. 单个 Agent 资源向量有限, 为获得更多的额外效用则会选择和其它 Agent 结成联盟. 联盟合作的基础是 Agent 自身拥有的资源总量, 而联盟稳定长久则需要制定合理的效用划分策略, 联盟形成具有一定的机制要求, 根据 Rosenschein^[18]提出的相关理论, 联盟效用分配应遵循以下原则:

1) 稳定性. 联盟形成后, 总效用确定, 不受成员退出影响. 当增加某些成员的效用时相应成员效用必会减少, 联盟内部部分成员重组也不会获得更大的收益.

2) 有效性. Agent 成员共享联盟完成任务所获总效用 $v(C_j)$ 代表任务总效用, $v_c(a_i)$ 代表成员 a_i 从联盟中所应分配的效用, 所有成员的效用相加等于联盟总效用 $\sum_{i=1}^m v_c(a_i) = v(C_j)$.

3) 简单性. 联盟交互通信, 开销 $P(C_j)$ 应较小.

4) 时效性. 效用分配与加入联盟的时间有关, 加入联盟越早, 在联盟待的时间越久, 分配效用越高.

5) 动态性. 联盟形成是根据 Agent 本身资源和任务需求动态博弈构建的, 而任务的分派量就决定了每个 Agent 获得的效用.

3.2 任务分派

重叠联盟中每个 Agent 获得的效用取决于其任务工作量分派情况, 某个 Agent 分派的任务越多则其获得的效用也越多. 因此, 所谓的绩效奖励是给予完成任务的原有成员, 在完成任务过程中会给它们分配额外

的工作量. 这样越早加入联盟的成员就越有利, 这种分配策略更能体现效用分配的时效性和动态性特征.

已有的任务分派策略以联盟成员 Agent 资源量为基础进行划分, 这样容易出现联盟成员资源贡献量大于或者小于任务所需资源量的情况, 因此本文提出一种优先满足任务需求的任务分派方法, 即联盟所有成员贡献出与任务需求相等的资源量, 这样各 Agent 成员贡献的资源量可能大于自身拥有的资源量, 就会出现资源冲突, 就需要根据相应的调整策略进行调整确定实际资源贡献量. 联盟形成中应避免单个 Agent 独揽任务, 也应避免在一次任务中用完某个 Agent 全部资源, 使它有机会参与其余联盟任务. 当形成的联盟完成任务 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ 时, 按照任务优先级实现 Agent 成员的资源分配, 具体过程如下:

步骤 1 如果 $T = \emptyset$, 结束; 否则按照优先级选取 t_j .

步骤 2 根据任务 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ 对联盟 C_j 中成员 a_i 进行任务分派.

$$B_{m \times r} D_{n \times r}^T = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_r^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & b_2^m & \dots & b_r^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \dots & d_1^n \\ d_2^1 & d_2^2 & \dots & d_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_r^1 & d_r^2 & \dots & d_r^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1^1 d_1^1 + b_2^1 d_2^1 + \dots + b_r^1 d_r^1, b_1^1 d_1^2 + b_2^1 d_2^2 + \dots + b_r^1 d_r^2, \dots, b_1^1 d_1^n + b_2^1 d_2^n + \dots + b_r^1 d_r^n \\ b_2^2 d_1^1 + b_2^2 d_2^1 + \dots + b_r^2 d_r^1, b_2^2 d_1^2 + b_2^2 d_2^2 + \dots + b_r^2 d_r^2, \dots, b_2^2 d_1^n + b_2^2 d_2^n + \dots + b_r^2 d_r^n \\ \vdots \\ b_1^m d_1^1 + b_2^m d_2^1 + \dots + b_r^m d_r^1, b_1^m d_1^2 + b_2^m d_2^2 + \dots + b_r^m d_r^2, \dots, b_1^m d_1^n + b_2^m d_2^n + \dots + b_r^m d_r^n \end{bmatrix},$$

将 $B_{m \times r} D_{n \times r}^T$ 的列向量表示为 $Q = [q_k^1, q_k^2, \dots, q_k^m]^T$, 则 a_i 获得临时任务量为

$$l_k^{ij} = d_k^j q_k^i \left(\sum_{i=1}^m q_k^i \right)^{-1}. \quad (9)$$

步骤 3 按照上述分派方式任务不会出现资源冗余的情况, 即满足式(7), 但需要验证该分派方式是否满足式(8). 假若 $\sum_{a_i \in C_j} l_k^{ij} \leq b_k^i$, 此任务分派方式行之有效, 如若 $\sum_{a_i \in C_j} l_k^{ij} \geq b_k^i$, 则需要对临时任务量 l_k^{ij} 进行动态调整

$$\hat{l}_k^{ij} = l_k^{ij} \pm \frac{1}{N} \left(\sum_{a_i \in C_j} l_k^{ij} - b_k^i \right), \quad N = 1, 2, \dots, mr, \quad (10)$$

其中 N 表示不满足第 r 维资源约束的个数, 此时 $\sum_{a_i \in C_j} \hat{l}_k^{ij} = d_k^j$, $\sum_{a_i \in C_j} \hat{l}_k^{ij} \leq b_k^i$.

步骤 4 若现有联盟完成任务 $t_j \in T$ 时, 有新的 Agent 请求加入, 此时原有联盟成员已经完成了任务就积累了一定的绩效, 此时再进行任务分派时应给予已有联盟成员适当的奖励, 奖励规则如下

$$l_k^{ij} = q_k^i d_k^j \left(1 + \frac{\int_0^{R_e} x dx}{\int_0^1 x dx} \right) \left(\sum_{i=1}^m q_k^i \right)^{-1}, \quad (11)$$

其中 R_e 为绩效奖励系数, 通常为一个定值, R_e 属于区间 $[0, 1]$.

3.3 效用分配

重叠联盟 C_j 中成员 a_i 效用分配的多少取决于完成任务 t_j 所贡献的资源量, r 种资源量的价值是不同的, 价值通过价格得以体现, 因此需要对相关概念描述如下:

1) 资源价值

C_j 中需要的每种资源都有相应单位价格, ϕ_k 表示第 k 种资源价格; 权重系数 $\lambda_k = \phi_k \left(\sum_{k=1}^r \phi_k \right)^{-1}$, 表示第 k 种资源的价值, 应满足 $\sum_{k=1}^r \lambda_k = 1$.

2) 资源单位效用因子

$$\alpha_k^j = \frac{\lambda_k v(C_j)}{d_k^j}, \quad (12)$$

其中 a_k^j 表示第 k 种资源的单位收益.

a_i 在完成任务时, 可能同时参与了多个联盟 C_j , 假设 a_i 参与了 n^* 个联盟并都能完成任务, 则 a_i 可获得的效用为

$$u_i = \sum_{j=1}^{n^*} \sum_{k=1}^r \alpha_k^j w_k^{ij}, \quad \forall a_i \in C_j, \quad (13)$$

且满足 $\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^n v(C_j)$.

3) 更新单位效用因子

当重叠联盟刚开始形成时, 资源拥有量较多的成员凭借自身优势易于加入联盟, 资源拥有量较少的就被排除在联盟外, 但随着任务的进行, 联盟内成员资源量势必会减少, 联盟外成员依靠原有资源量转变为优势地位, 当新 Agent 加入可以带来额外效用, 联盟内新老成员又会开启新一轮的协商.

当 n^* 个联盟 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{n^*}\}$ 完成相应的任务 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{n^*}\}$ 时, 新 Agent 请求加入联盟共同完成余下的任务, 此时新 Agent 的加入会给联盟带来额外效用 v_j . 设 $\forall a_i \in C_j$ 已完成任务量为 $M_{ij} = [m_1^{ij}, m_2^{ij}, \dots, m_r^{ij}]$, 则根据式(13)可知原有联盟已得效用

$$\hat{u}_i = \sum_{j=1}^{n^*} \sum_{k=1}^r \alpha_k^j m_k^{ij}, \quad (14)$$

此时联盟总效用更新为

$$\hat{v}(C_j) = v(C_j) + v_j - \sum_{a_i \in C_j} \sum_{k=1}^r \alpha_k^j m_k^{ij}, \quad (15)$$

联盟 C_j 剩下的资源需求

$$\hat{d}_k^j = d_k^j - \sum_{a_i \in C_j} m_k^{ij}, \quad (16)$$

根据式(12)更新单位效用因子

$$\hat{\alpha}_k^j = \frac{\lambda_k \hat{v}(C_j)}{\hat{d}_k^j}. \quad (17)$$

设新 Agent 加入联盟 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{n^*}\}$ 后, a_i 参与任务 t_j 新分派的任务量 $\hat{W}_{ij} = [\hat{w}_1^{ij}, \hat{w}_2^{ij}, \dots, \hat{w}_r^{ij}]$. a_i 的效用应该是新 Agent 参与联盟之前获得的效用和新 Agent 加入联盟 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{n^*}\}$ 后获得效用之和, 要大于等于之前完成任务获得的总效用, 才能满足效用非减原则, 即

$$\sum_{i=1}^{n^*} \sum_{k=1}^r \hat{\alpha}_k^j \hat{w}_k^{ij} + \hat{u}_i \geq u_i, \quad (18)$$

将式(13)和式(14)代入式(18)可得

$$\sum_{j=1}^{n^*} \sum_{k=1}^r \hat{\alpha}_k^j \hat{w}_k^{ij} + \sum_{j=1}^{n^*} \sum_{k=1}^r \alpha_k^j m_k^{ij} \geq \sum_{j=1}^{n^*} \sum_{k=1}^r \alpha_k^j w_k^{ij}, \quad (19)$$

整理得

$$\sum_{j=1}^{n^*} \sum_{k=1}^r \left(\hat{\alpha}_k^j \hat{w}_k^{ij} + \alpha_k^j m_k^{ij} - \alpha_k^j w_k^{ij} \right) \geq 0, \quad (20)$$

再将式(12)、式(15)~式(17)代入式(20), 整理可得

$$\sum_{i=1}^{m^*} \sum_{k=1}^r \lambda_k \left(\frac{\hat{w}_k^{ij*} \left(v(C_j) + v_j - \sum_{a_i \in C_j} \sum_{k=1}^r \left(\frac{\lambda_k m_k^{ij} v(C_j)}{d_k^j} \right) \right)}{d_k^j - \sum_{a_i \in C_j} m_k^{ij}} + \frac{(m_k^{ij} - w_k^{ij}) v(C_j)}{d_k^j} \right) \geq 0. \quad (21)$$

由判断条件可知, 如若允许新的 Agent 加入联盟, 满足式(21)就符合效用非减条件; 反之若不满足式(21), 就拒绝新的 Agent 加入. 判断条件中不确定因素为 m_k^{ij} , w_k^{ij} , $\hat{w}_k^{ij}$ 三个, $\hat{w}_k^{ij}$ 在之前的联盟中任务确定后也会变为已知量 m_k^{ij} , w_k^{ij} , 则受到 Agent 加入联盟时机的影响, 越早加入联盟对 Agent 越有利. 另外, 任务结束时, 每个 a_i 获得的总效用是其完成联盟所有任务从中获得的效用之和; 若中途有某个 Agent 退出联盟, 则它在该联盟中最终所获效用为零.

绩效奖励策略可以促进 Agent 积极、及时地参加重叠联盟, 提高联盟生成速度, 且越早加入联盟, 获得的效用分配也越高, 具有较好的时效性. 一方面, 原有联盟成员因为资源优势在整体效用分配过程中占据主动, 并能满足效用非减条件选择继续待在联盟完成任务; 另一方面, 后加入的 Agent 因为原有 Agent 完成任务消耗了一定资源, 也能在加入重叠联盟时成为主体地位, 通过协商获得令自己满意的效用, 不会退出联盟去创建新的联盟, 该策略的协商一致稳定性明显优于其他分配策略的强制稳定性.

4 实例验证与对比分析

假设存在 3 个 Agent, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, 需要合作完成 2 个任务, $T = \{t_1, t_2\}$, $t_1 > t_2$. 每个 Agent 初始资源数量 $B_1 = [4, 3]$, $B_2 = [4, 5]$, $B_3 = [3, 3]$. t_1, t_2 资源数量需求 $D_1 = [3, 4]$, $D_2 = [4, 3]$. 接下来讨论不同情形和不同时刻下的分配策略应用举例.

4.1 联盟形成初始

假设 Agent 合作联盟的效用如下

$$\begin{aligned} v_1(\{a_i\} : i = 1, 2, 3) &= v_2(\{a_i\} : i = 1, 2, 3) = 0, \\ v_1(\{a_i, a_i\} : i \neq \hat{i}) &= v_2(\{a_i, a_i\} : i \neq \hat{i}) = 6, \\ v_1(\{a_1, a_2, a_3\}) &= v_2(\{a_1, a_2, a_3\}) = 9, \\ v_1(\{a_i\} : i = 1, 2, 3) + v_2(\{a_i\} : i = 1, 2, 3) &= 0, \\ v_1(\{a_i, a_i\} : i \neq \hat{i}) + v_2(\{a_i, a_i\} : i \neq \hat{i}) &= 12, \\ v_1(\{a_1, a_2, a_3\}) + v_2(\{a_1, a_2, a_3\}) &= 18. \end{aligned}$$

通过两种资源价格换算成 $\lambda_k : \{0.33, 0.67\}$, t_1, t_2 并行执行, 且已形成合作联盟 $C = \{a_1, a_2\}$, $v(\{a_1, a_2\}) = 6$, 由式(12)可得单位效用因子 $\alpha_k^1 : \{0.67, 1\}$, $\alpha_k^2 : \{0.50, 1.33\}$. 根据上例 a_1, a_2 关于任务 t_1, t_2 的分派量为

$$W_{11} = [1.29, 1.79], \quad W_{21} = [1.71, 2.21], \quad W_{12} = [1.71, 1.21], \quad W_{22} = [2.29, 1.79].$$

根据式(13)完成任务后可分别获得效用

$$u_1 = (0.67 \times 1.29 + 1 \times 1.79) + (0.50 \times 1.71 + 1.33 \times 1.21) = 5.12,$$

$$u_2 = (0.67 \times 1.71 + 1 \times 2.21) + (0.50 \times 2.29 + 1.33 \times 1.79) = 6.88.$$

4.2 成员加入组成新联盟

假设在 T_1 时刻, a_3 请求加入联盟 C , 带来的额外效用分别是

$$v_1 = v_2 = v(\{a_1, a_2, a_3\}) - v(\{a_1, a_2\}) = 9 - 6 = 3.$$

假设在此时刻 a_1, a_2 完成 t_1, t_2 任务量分别是

$$G_{11} = [1, 0], G_{21} = [0, 0],$$

$$G_{12} = [0, 0], G_{22} = [0, 1].$$

此时 a_1, a_2 剩余资源量

$$\hat{B}_1 = [3, 3], \hat{B}_2 = [4, 4].$$

t_1, t_2 剩余资源需求量

$$\hat{D}_1 = [2, 4], \hat{D}_2 = [4, 2].$$

a_1, a_2 已经完成 t_1, t_2 的任务量已获效用分别为

$$\hat{u}_1 = 0.67, \hat{u}_2 = 1.33.$$

此时 a_1, a_2 已经完成了规定的联盟任务, 因此可获得一定的绩效奖励, 设联盟绩效奖励系数 $R_e = 0.5$, a_1, a_2, a_3 由任务分派获得最终任务量为

$$\hat{W}_{11} = [0.75, 1.50], \hat{W}_{21} = [1, 2], \hat{W}_{31} = [0.25, 0.50],$$

$$\hat{W}_{12} = [1.25, 0.75], \hat{W}_{22} = [2, 1], \hat{W}_{32} = [0.75, 0.25].$$

将所得值代入判断条件, a_1, a_2 均满足式(21), 因此允许 a_3 加入. 由式(17)可得, 加入联盟 C 后新的单位效用因子 $\hat{\alpha}_k^1 : \{1.39, 1.39\}, \hat{\alpha}_k^2 : \{0.64, 2.56\}$. 则 a_1, a_2, a_3 完成 t_1, t_2 后各自获得的最后效用为

$$u_1 = 0.67 + (1.39 \times 0.75 + 1.39 \times 1.50) + (0.64 \times 1.25 + 2.56 \times 0.75) = 6.51 > 5.12,$$

$$u_2 = 1.33 + (1.39 \times 1 + 1.39 \times 2) + (0.64 \times 2 + 2.56 \times 1) = 9.33 > 6.88,$$

$$u_3 = (1.39 \times 0.25 + 1.39 \times 0.50) + (0.64 \times 0.75 + 2.56 \times 0.25) = 2.16 > 0.$$

完成任务 t_1, t_2 后, a_1, a_2, a_3 所剩资源量为 $\hat{B}_1 = [1, 0.75], \hat{B}_2 = [1, 1], \hat{B}_3 = [2, 2.25]$.

若在 T_2 时刻, a_3 申请加入联盟时, a_1, a_2 分别完成 t_1, t_2 任务量为

$$G_{11} = [1, 0], G_{21} = [1, 1],$$

$$G_{12} = [1, 1], G_{22} = [0, 1].$$

此时 a_1, a_2, a_3 任务分派分得 t_1, t_2 的任务量为

$$\hat{W}_{11} = [0.31, 0.94], \hat{W}_{21} = [0.47, 1.41], \hat{W}_{31} = [0.22, 0.66],$$

$$\hat{W}_{12} = [0.94, 0.31], \hat{W}_{22} = [1.41, 0.47], \hat{W}_{32} = [0.66, 0.22].$$

将任务分配量代入式(21)后, a_1, a_2 均满足效用非减条件, 因此允许 a_3 加入. 同理可以求出 a_1, a_2, a_3 完成 t_1, t_2 后各自获得的最后效用分别为 6.41, 8.86, 2.73.

4.3 重叠联盟分配策略对比

根据上面的实例, 表 1 和表 2 分别给出了不同时刻本文方法与文献[30, 31]的对比情况.

表 1 T_1 时刻本文方法与相关分配策略对比Table 1 Comparison between the method of this paper and the related allocation strategy in T_1

应用情形	情形 1	情形 2
联盟	$\{a_1\}$	$\{a_1, a_2\}$
效用	u_1	u_1, u_2
文献[30]的方法	0	5.75, 6.25
文献[31]的方法	0	5, 7
本文方法	0	5.12, 6.88

表 2 T_2 时刻本文方法与相关分配策略对比Table 2 Comparison between the method of this paper and the related allocation strategy in T_2

应用情形	情形 1	情形 2
联盟	$\{a_1\}$	$\{a_1, a_2\}$
效用	u_1	u_1, u_2
文献[30]的方法	0	5.75, 6.25
文献[31]的方法	0	5, 7
本文方法	0	5.12, 6.88

表 1 和表 2 是不同情形、不同时刻现有分配策略与本文分配策略的对比实例, 在情形 1 中, 本文分配策略和现有分配策略都能均衡各成员利益, 完成联盟任务, 但在更加复杂的情形 2 中, 现有分配策略就不再适用. 文献[30]的分配策略只能对任务依次串行进行, 虽然在一定程度上避免了资源冲突问题, 但不能满足并发多任务的情形, 因此在情形 2 无论哪个时刻都不能形成新联盟. 文献[31]的分配策略虽然在 T_2 时刻满足效用非减条件, 但在时间更早的 T_1 时刻联盟 C_j 则拒绝新成员 a_3 的加入, 在情形 2 中此分配策略也显示出一定的局限性. 利用本文分配策略, 无论在情形 1 还是情形 2 都能较好解决资源冲突问题, 对重叠联盟的效用进行合理分配, 从而提高联盟形成的成功率.

4.4 分配策略相关特性分析

本文分配策略除了满足有效性和简单性两个基本特性的基础上, 也较好满足了其他特性:

1) 时效性分析. 本文分配策略时效性体现在两个方面: 一方面, 与现有分配策略相比, 在 T_2 时刻本文分配策略会使联盟原有成员 a_1, a_2 所得效用(6.41, 8.86)高于文献[31]分配策略原有成员所得效用(5.63, 7.69), 在同一时刻加入联盟时, 利用本文分配策略可获得比现有分配策略更高的效用; 另一方面, 在情形 2 中, T_1 时刻早于 T_2 时刻, 利用本文分配策略, 当新成员在 T_1 时刻加入现有联盟时所得效用为(6.51, 9.33), 在时间稍晚的 T_2 时刻新成员加入时所得效用为(6.41, 8.86), 联盟成员在时间较早的 T_1 时刻加入会获得比 T_2 时刻更高的效用分配, 说明加入联盟时间越早, 分得效用也就越多, 体现了联盟效用分配时效性特征.

2) 稳定性分析. 通过对不同情形下联盟形成分配策略的分析, 现有分配策略在某些情形变得不再适用, 影响联盟的稳定性, 导致联盟失败. 联盟形成的基础是各成员有利可图, a_1, a_2 已经完成了相应的任务, 当新 Agent 申请加入时, a_1, a_2 获得的额外联盟效用已经有了参照, 要高于新成员加入之前的效用. a_3 作为新加入者, 完成一定任务量就会获得效用, 只要达到满意的效用分配, 联盟成员就不会退出当前联盟转投其他联盟. 通过案例分析, 本文分配策略在不同情形下都能适用, 相比现有分配策略更能均衡各方成员利益, 避免出现冲突的局面, 保证联盟的稳定运行.

3) 动态性分析. 联盟形成是在开放的环境中各成员动态博弈的过程, 效用分配取决于联盟成员资源贡献量, 成员资源贡献量不是加入联盟初始就确定的, 成员之间依据任务需求量互相协商. 当有新成员加入现有联盟时, 联盟原有成员与新成员也需要进行协商, 逐步构建新联盟. 在构建新联盟的过程中, 原有联盟成员 a_1, a_2 应符合效用非减原则, 现有分配策略按照某种硬性规则, 一旦不满足效用非减原则则会造成联盟的失败. 本文加入绩效奖励系数可以使任务分配变得更具灵活性, 当成员之间出现利益冲突时可以通过协商

的方式找到一种符合各方成员利益的分配方式,更能体现联盟效用分配的动态性特征。

5 结束语

如何在多个重叠联盟之间分配效用,尤其如何给同时参与了多个任务的 Agent 成员划分效用是 MAS 中的一个难点问题。为此,本文根据每个 Agent 当前拥有的资源状况和任务的实际需求,提出一种面向任务优先满足和绩效奖励的重叠联盟效用分配策略。基于任务优先满足可有效避免多个重叠联盟之间的资源冲突问题,合理反映 Agent 对联盟贡献的差异性;基于绩效奖励可在一定程度上保护原有联盟成员的既得利益,维护联盟的稳定性。对比实例分析结果表明,本文所提策略可满足效用非减、时效性、稳定性和动态性等特征,为重叠联盟效用分配提供了一个有益的尝试。在未来的研究工作中,将探索一种对新加入 Agent 成员更加公平的效用分配策略,以有效保护每个联盟成员的合法权益。

参考文献:

- [1] He W, Chen G, Han Q, et al. Network-based leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via distributed impulsive control. *Information Sciences*, 2017, 380(20): 145–158.
- [2] Ye D, Zhang M, Sutanto D. Decentralised dispatch of distributed energy resources in smart grids via multi-agent coalition formation. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 2015, 83(1): 30–43.
- [3] 杜先进, 曹云芳, 何波, 等. 基于合作竞争策略的特许经营广告决策研究. *系统工程学报*, 2015, 30(1): 55–65.
Du X J, Cao Y F, He B, et al. Advertising decisions research based on the cooperation and competition strategy in franchising. *Journal of Systems Engineering*, 2015, 30(1): 55–65. (in Chinese)
- [4] 李昌文, 周永务, 李绩才, 等. 研发合作联盟的稳定性研究. *系统工程学报*, 2019, 34(6): 783–789.
Li C W, Zhou Y W, Li J C, et al. Research on stability of R&D cooperation alliance. *Journal of Systems Engineering*, 2019, 34(6): 783–789. (in Chinese)
- [5] Chen J, Sun D. Coalition-based approach to task allocation of multiple robots with resource constraints. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2012, 9(3): 516–528.
- [6] Saad W, Han Z, Basar T, et al. Hedonic coalition formation for distributed task allocation among wireless agents. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2011, 10(9): 1327–1344.
- [7] Erli G, Takahasi K, Chen L, et al. Transmission expansion cost allocation based on cooperative game theory for congestion relief. *Electrical Power and Energy Systems*, 2005, 27(4): 61–67.
- [8] Crispim J, Rego N, Sousa J P. Stochastic partner selection for virtual enterprises: A chance-constrained approach. *International Journal of Production Research*, 2015, 53(12): 3661–3677.
- [9] 罗新星, 张鹏. 可变促销努力下的动态供应链收益共享契约. *系统工程学报*, 2020, 35(1): 120–129.
Luo X X, Zhang P. Dynamic supply chain revenue sharing contract under mutable promotion efforts. *Journal of Systems Engineering*, 2020, 35(1): 120–129. (in Chinese)
- [10] Meng F Y, Tan C Q, Zhang Q. The generalized symmetric coalitional Banzhaf value for multichoice games with a coalition structure. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2014, 27(5): 1064–1078.
- [11] Bueyuekoezkan G, Feyzioglu O, Nebol E. Selection of the strategic alliance partner in logistics value chain. *International Journal of Production Economics*, 2008, 113(1): 148–158.
- [12] Shirokikh V A, Lezhnina E A. Coalition-formation problem for cooperative inventory routing game. *Automation and Remote Control*, 2019, 80(7): 1358–1367.
- [13] 桂海霞, 张国富, 苏兆品, 等. 一种基于差分进化和编码修正的重叠联盟结构生成算法. *控制理论与应用*, 2018, 35(2): 215–223.
Gui H X, Zhang G F, Su Z P, et al. An algorithm for overlapping coalition structure generation based on differential evolution and encoding repairs. *Control Theory and Applications*, 2018, 35(2): 215–223. (in Chinese)
- [14] 孙红霞, 张强. 基于势函数的企业联盟收益分配策略. *系统工程学报*, 2018, 33(6): 763–770.
Sun H X, Zhang Q. Profit allocation in enterprises coalition based on potential function. *Journal of Systems Engineering*, 2018, 33(6): 763–770. (in Chinese)

- [15] Gusev V V. Shapley, Owen and Aumann-Dreze values in a patrolling game with coalition structure. *Automation and Remote Control*, 2017, 78(10): 1883–1891.
- [16] Service T C, Adams J A. Coalition formation for task allocation: Theory and algorithms. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 2011, 22(2): 225–248.
- [17] Zick Y, Markakis E, Elkind E. Arbitration and stability in cooperative games with overlapping coalitions. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2014, 50(8): 847–884.
- [18] Rosenschein J S. *Rational Interaction: Cooperation among Intelligent Agents*. Stanford: Stanford University Press, 1986.
- [19] David W K Y, Leon A P. Cooperative dynamic games with control lags. *Dynamic Games and Applications*, 2019, 9(2): 550–567.
- [20] Li K. Multi-context research on strategy characteristics of knowledge sharing in organization based on dynamic cooperative game perspective. *Journal of Knowledge Management*, 2018, 22(4): 850–866.
- [21] Bauso D, Timmer J. Robust dynamic cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 2009, 38(1): 23–36.
- [22] Ehud L, Marco S. On the core of dynamic cooperative game. *Dynamic Games and Applications*, 2013, 3(3): 359–373.
- [23] Dubey P. *The Shapley Value*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- [24] 南江霞, 关晶, 王盼盼. 基于 Choquet 积分的直觉模糊联盟合作博弈的 Shapley 值. *运筹与管理*, 2019(9): 41–46.
Nan J X, Guan J, Wang P P. Shapley value for the intuitionistic fuzzy coalition cooperative games with Choquet integral. *Operations Research and Management Science*, 2019(9): 41–46. (in Chinese)
- [25] Giulia C, Encarnación A, Stefano M, et al. An application of the Shapley value to the analysis of co-expression networks. *Applied Network Science*, 2018, 3(1): 1–21.
- [26] 邹正兴, 张强, 李美苓. 具有结盟限制的合作对策的加权 Shapley 值. *系统工程理论与实践*, 2018, 38(1): 145–163.
Zou Z X, Zhang Q, Li M L. The weighted Shapley value for games with restricted cooperation. *Systems Engineering: Theory and Practice*, 2018, 38(1): 145–163. (in Chinese)
- [27] 罗翊, 石纯一. Agent 协作求解中形成联盟的行为策略. *计算机学报*, 1997, 20(11): 961–965.
Luo Y, Shi C Y. The behavior strategy to form coalition in agent cooperative problem-solving. *Chinese Journal of Computers*, 1997, 20(11): 961–965. (in Chinese)
- [28] 夏娜, 蒋建国, 于春华, 等. 一种基于利益均衡的联盟形成策略. *控制与决策*, 2005, 20(12): 1426–1428.
Xia N, Jiang J G, Yu C H, et al. A coalition formation strategy based on benefit equilibrium. *Control and Decision*, 2005, 20(12): 1426–1428. (in Chinese)
- [29] 蒋建国, 夏娜, 于春华. 基于能力向量发挥率和拍卖的联盟形成策略. *电子学报*, 2004, 32(12): 215–217.
Jiang J G, Xia N, Yu C H. The coalition formation strategy based on capability vector contribution-rate and auction. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(12): 215–217. (in Chinese)
- [30] 张国富, 杨仁志, 苏兆品, 等. 一种基于讨价还价的重叠联盟效用划分策略. *模式识别与人工智能*, 2014, 27(10): 930–938.
Zhang G F, Yang R Z, Su Z P, et al. A payoff distribution strategy for overlapping coalitions based on bargaining. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2014, 27(10): 930–938. (in Chinese)
- [31] 桂海霞, 蒋建国, 张国富. 面向并发多任务的重叠联盟效用分配策略. *模式识别与人工智能*, 2016, 29(4): 332–340.
Gui H X, Jiang J G, Zhang G F. Payoff distribution strategy of overlapping coalitions for concurrent multiple tasks. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2016, 29(4): 332–340. (in Chinese)
- [32] Xia C, Howell J. Loop status monitoring and fault localisation. *Journal of Process Control*, 2003, 13(7): 679–691.

作者简介:

桂海霞(1978—), 女, 安徽桐城人, 博士, 副教授, 研究方向: 复杂系统, 智能联盟, Email: guihaixia18@sohu.com;
 赵邦磊(1993—), 男, 山东聊城人, 硕士生, 研究方向: 进化计算, 路径优化, Email: zbanglei@163.com;
 张国富(1979—), 男, 安徽合肥人, 博士, 教授, 研究方向: 计算智能, 联盟博弈, Email: zgf@hfut.edu.cn;
 苏兆品(1983—), 女, 山东菏泽人, 博士, 副教授, 研究方向: 演化计算, 应急管理, Email: szp@hfut.edu.cn;
 蒋建国(1955—), 男, 安徽广德人, 硕士, 教授, 研究方向: 分布式人工智能, 数字图像处理, Email: jgjiang@hfut.edu.cn.

附录 相关定理证明

定理 1 若一个 OCF 问题有可行解, 则应满足式(6).

证明 充分性. 已知一个 OCF 问题有解, 意味着联盟 C_j 的资源总和多于任务 T 的资源需求总量, t_j 的 r 维资源需求向量中任意一种资源需求总有至少一个 Agent 可以满足, 如果存在任意一种资源没有被满足, 则 OCF 问题无解. 对于 $k = 1, 2, \dots, r$, 符合 $\sum_{j=1}^n d_k^j \leq \sum_{i=1}^m b_k^i$, 即 $\sum_{j=1}^n D_j \leq \sum_{i=1}^m B_i$. 因此得证.

必要性. 假设任务 t_j 存在某种资源需求大于联盟 C_j 成员资源的初始总量和, 即 $\sum_{j=1}^n d_k^j > \sum_{i=1}^m b_k^i$, 则与 $\sum_{j=1}^n d_k^j \leq \sum_{i=1}^m b_k^i$ 的判断条件矛盾, 综合两方面命题得证. 证毕.

定理 2 对于 $\forall a_i \in A$, 若不存在资源冲突问题则应满足式(8).

证明 充分性. 若联盟 C_j 完成任务不存在资源冲突, 意味着 Agent 成员每种资源拥有总量大于任务资源需求量, 实际贡献量则应小于或等于任务资源需求量, 即

$$\sum_{j=1}^n w_k^{ij} \leq b_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

必要性. 已知 $\sum_{j=1}^n w_k^{ij} \leq b_k^i$, 每个 Agent 实际贡献资源量小于或者等于任务资源需求量, 不存在资源冲突的状况. 证毕.

定理 3 $\forall t_j \in T$ 经过上述任务分派方式后均满足式(7)和式(8).

证明 经式(9)分派任务后, 实际资源贡献量 $\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{L}_{ij}$, 那么有

$$\sum_{a_i \in C_j} \mathbf{W}_{ij} = \sum_{a_i \in C_j} \mathbf{L}_{ij},$$

而

$$\sum_{i=1}^m l_k^{ij} = \sum_{i=1}^m \left[\frac{q_k^i}{\sum_{i=1}^m q_k^i} d_k^j \right],$$

展开

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m l_k^{ij} &= \frac{\sum_{i=1}^m q_k^i}{\sum_{i=1}^m q_k^i} d_k^j = d_k^j, \\ \sum_{i=1}^m w_k^{ij} &= d_k^j. \end{aligned}$$

式(7)得证.

经式(10)调整后 $\forall a_i \in C_j, \hat{L}_{ij} \geq 0$, 则最后 a_i 的实际资源贡献量 $W_{ij} = \hat{L}_{ij}$, 那么有 $\sum_{a_i \in C_j} \mathbf{W}_{ij} = \sum_{a_i \in C_j} \hat{L}_{ij}$,

$$\hat{l}_k^{ij} = l_k^{ij} \pm \frac{1}{N} \left(\sum_{a_i \in C_j} l_k^{ij} - b_k^i \right), \quad N = 1, 2, \dots, mr,$$

$$\sum_{a_i \in C_j} \hat{l}_k^{ij} = \sum_{a_i \in C_j} \left[l_k^{ij} \pm \frac{1}{N} \left(\sum_{a_i \in C_j} l_k^{ij} - b_k^i \right) \right],$$

$\hat{l}_k^{ij}$ 经过此消彼减后变成

$$\sum_{a_i \in C_j} \hat{l}_k^{ij} = \sum_{a_i \in C_j} l_k^{ij}, \text{ 而 } \sum_{a_i \in C_j} l_k^{ij} \leq b_k^i, \text{ 即 } \sum_{j=1}^n w_k^{ij} \leq b_k^i.$$

式(8)得证.

证毕.