

基于贝叶斯估计的威布尔更新过程统计控制

曹程明, 马义中

(南京理工大学经济管理学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 针对威布尔更新过程, 考虑威布尔分布形状参数偏移的探测问题以及实际中样本数据较少的问题, 结合贝叶斯理论, 设计了 Bayesian-Beta 控制图, 给出了控制图的设计方法、监控程序和参数的贝叶斯估计方法. 使用控制图的平均运行链长的均值 AARL(average of the average run length) 和标准差 SDARL(standard deviation of the average run length) 分析了参数估计对所设计的控制图性能的影响, 结果表明 Bayesian-Beta 控制图受参数估计的影响小, 对过程偏移具有较好的探测能力.

关键词: 威布尔分布; 更新过程; 贝叶斯; 参数估计; AARL; SDARL

中图分类号: O213.1 文献标识码: A 文章编号: 1000-5781(2021)02-0240-07

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2021.02.008

Statistic control of Weibull renewal process based on the Bayesian estimation

Cao Chengming, Ma Yizhong

(School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: A Bayesian-Beta control chart is proposed for the Weibull renewal process by combining Bayesian theory, to alleviate the problem of detecting the shift of the Weibull shape parameter and the problem of lack of enough sample data in practice usually. The design method and the monitoring procedure of the control chart and the Bayesian estimation method of the parameters are given. The effects of parameter estimation on the chart performance are evaluated in terms of the AARL and the SDARL. It is shown that the Bayesian-Beta control chart is less influenced by the parameter estimation and can detect the process shift efficiently.

Key words: Weibull distribution; renewal process; Bayesian; parameter estimation; AARL; SDARL

1 引 言

在高质量过程监控中, 监控事件间隔时间是一个重要问题^[1]. 当事件发生率不为定值时, 用威布尔分布描述事件间隔时间更为合适. Woodall 等^[2]、Ali 等^[3]建议研究威布尔分布的 TBE 控制图. 威布尔更新过程由一系列独立同分布的威布尔分布的事件间隔时间构成, 其在产品、设备或者生产系统的可靠性建模及监控中广泛应用^[4].

威布尔分布的形状参数与产品的失效机制紧密相关, 形状参数的变化往往意味着所监控的产品或系统的根本性的变化, 因此相比较于监控样本均值, 监控威布尔分布的形状参数更有意义^[4]. Pascual^[5]将威布尔分布转换成最小极值分布, 然后基于样本极差得到 $1/\beta$ 的无偏估计量作为监控统计量, 设计了 EWMA 控制

收稿日期: 2018-08-17; 修订日期: 2019-11-28.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71871119).

图监控威布尔分布的形状参数. Pascual 等^[6]和 Pascual 等^[7]采用了相似的方法, 将样本极差作为监控统计量对威布尔分布的形状参数进行监控. 但是应用这些控制图时, 为了得到控制限需要进行复杂的计算. 为了避免复杂的计算, Zhang 等^[4]利用形状参数的枢轴量构建了一个近似服从正态分布的统计量, 并在此基础上设计了 Beta 控制图, 仿真分析结果说明 Beta 控制图能够有效的探测到威布尔分布形状参数的偏移. 但是其研究中只应用 20 个过程稳定时的样本数据估计过程参数, 且没有分析参数估计对其所设计的控制图性能的影响. 由于参数估计量固有的波动, 在同一设计方法下设计出的控制图的性能将呈现差异, 这称之为使用者与使用者之间的波动. 这种波动使得使用者不能确定所设计控制图的错误警报概率, 影响其对控制图的信心.

在应用控制图的第一阶段, 收集大量的样本数据通常是不现实的, 贝叶斯估计利用了过程的先验信息, 可以减少参数估计对控制图性能的影响^[8]. Raubenheimer 等^[9]设计了 Bayesian c 图, 分析结果表明 Bayesian c 图具有良好的性能. Kumar 等^[10]设计了 Bayesian-Tr 控制图, 分析结果表明 Bayesian-Tr 控制图的性能优于传统的 Tr 控制图. Lee 等^[11]设计了基于贝叶斯理论的 Bernoulli CUSUM 控制图, 提高了控制图的性能.

针对威布尔更新过程, 考虑威布尔分布形状参数偏移的探测问题以及实际中样本数据较少的问题, 本文在 Beta 控制图的基础上, 结合贝叶斯理论, 设计了 Bayesian-Beta 控制图监控威布尔更新过程的形状参数. 首先, 给出了 Bayesian-Beta 控制图的统计设计方法及其监控程序; 其次, 给出了过程参数的贝叶斯估计方法; 然后, 应用 AARL 和 SDARL 及蒙特卡洛仿真分析了参数估计对控制图性能的影响, 结果表明 Bayesian-Beta 控制图受参数估计量波动的影响更小, 所提出的贝叶斯估计方法中先验信息的误差对控制图性能的影响小, 可操作性强; 最后, 用实际案例说明 Bayesian-Beta 控制图在实际中的应用.

2 Bayesian-Beta 控制图的设计

2.1 监控统计量

两参数威布尔分布的密度函数如下

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\alpha)^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\alpha, \beta > 0$, 分别是威布尔分布的尺度和形状参数.

令 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为威布尔分布的一组样本值, 则 α 和 β 的极大似然估计 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 可由下式得到, 即

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}} \ln(x_i) \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}} \right)^{-1} - \frac{1}{\hat{\beta}} \\ \hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}} \right)^{1/\hat{\beta}}. \end{cases} \quad (2)$$

$\hat{\beta}/\beta$ 是枢轴量, 其分布不依赖于未知参数 β ^[12]. Bain^[12]证明 $B_n \hat{\beta}$ 是参数 β 的无偏估计量, 即 $E[B_n \hat{\beta}] = \beta$, 其中 $B_n = 1/E[\hat{\beta}/\beta]$ 可以通过蒙特卡洛仿真得到. B_n 的参考值可参照文献[4]. 尽管 $B_n \hat{\beta}$ 是参数 β 的无偏估计量且渐近正态, 但在小样本下是有偏的. 对 $B_n \hat{\beta}$ 进行 Box-Cox 转换得

$$\hat{S} = (B_n \hat{\beta})^\lambda. \quad (3)$$

Zhang 等^[4]的仿真实验表明, $\lambda = -0.5$ 时, $\hat{S}$ 近似服从正态分布. $\hat{S}$ 的均值 $E_c[\hat{S}]$ 和方差 $\text{Var}_c(\hat{S})$ 分别为 $E_c[\hat{S}] = B_n^\lambda \beta^\lambda E_n$, $\text{Var}_c(\hat{S}) = B_n^{2\lambda} \beta^{2\lambda} V_n$. 其中 $E_n = E[(\hat{\beta}/\beta)^\lambda]$, $V_n = \text{Var}[(\hat{\beta}/\beta)^\lambda]$. $(\hat{\beta}/\beta)^\lambda$ 是枢轴量, 因此 E_n 和 V_n 可通过蒙特卡洛仿真得到. E_n 和 V_n 的参考值可参照文献[4].

2.2 控制限的设计

对于一系列来自威布尔更新过程的事件间隔时间的数据, 设定窗口大小为 n , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为第一个样本, $\{x_2, x_3, \dots, x_{n+1}\}$ 为第二个样本, 依此类推, 根据式(3)可计算统计量 $\hat{S}$ 的值. 由 2.1 节可知统计量 $\hat{S}$ 服从均值为 $B_n^{-0.5} \beta^{-0.5} E_n$, 方差为 $B_n^{-1} \beta^{-1} V_n$ 的正态分布. Zhang 等^[4]设计了 Beta 控制图, 其上控制限 UCL 和中心线 CL 以及下控制限 LCL 分别为

$$\begin{cases} \text{UCL} = (B_n \beta_{ic})^{-0.5} E_n + k(B_n \beta_{ic})^{-0.5} \sqrt{V_n}, \\ \text{CL} = (B_n \beta_{ic})^{-0.5} E_n, \\ \text{LCL} = (B_n \beta_{ic})^{-0.5} E_n - k(B_n \beta_{ic})^{-0.5} \sqrt{V_n}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 n 为计算监控统计量的窗口大小, 其中 k 为控制图系数.

显然控制图的 ARL_0 值由 n 和 k 决定, 不同 n 和 k 的 ARL_0 值可参照 Zhang 等^[4]. β_{ic} 为过程受控时的 β 值. 在应用控制图的第一阶段, 收集大量的样本数据通常是不现实的, 为了利用过程的先验信息, 本文使用贝叶斯方法估计 β 值, 设计 Bayesian-Beta 控制图, 其控制限的设计与 Beta 控制图相同.

2.3 控制图的监控程序

质量控制的第一阶段: 确定过程的受控状态. 首先根据第一阶段的 m 个样本数据得到参数 β 的贝叶斯估计值 $\hat{\beta}_{ic}$; 然后选取合适的窗口大小 n 和系数 k 计算控制限、打点, 判断过程是否受控, 若有异常点且异常点是由异常原因造成, 则需要查找异常原因并消除, 调整生产参数, 采集数据重新估计参数 β , 计算控制限和打点, 直到确定过程处于受控状态, 将此时的 $\hat{\beta}_{ic}$ 作为过程参数的估计值, 开始第二阶段的监控. 第二阶段: 监控阶段. 计算 $\hat{S}_i$, 打点, 若打点值超出控制限, 则可判断过程失控, 查找失控原因, 采取措施使过程回到受控状态(当 $i < n$ 时, 计算 $\hat{S}_i$ 需要用到 $n - i$ 个第一阶段的观测值).

3 贝叶斯估计

3.1 参数估计的步骤

式(4)是建立在已知参数 β_{ic} 的基础上, 在实际中参数 β_{ic} 通常是未知的. 假设 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为第一阶段的样本数据.

令 $\theta = 1/\alpha^\beta$, 则式(1)变为

$$f(x, \theta, \beta) = \beta x^{\beta-1} \theta^\beta e^{-\theta x^\beta}, \quad x > 0.$$

假设参数 θ 的先验分布为伽马分布 $\text{Gamma}(c, d)$, $c, d > 0$, β 的先验分布为伽马分布 $\text{Gamma}(e, f)$, $e, f > 0$ 且独立于 θ ^[13]. 可得 θ 和 β 的联合后验密度为

$$p(\beta, \theta | \mathbf{X}) \propto \beta^m \exp \left((\beta - 1) \sum_{i=1}^m \ln(x_i) \right) \theta^{m+c-1} \exp \left(-\theta \left(d + \sum_{i=1}^m x_i^\beta \right) \right).$$

因此, θ 和 β 的后验密度为

$$p(\beta | \mathbf{X}) \propto \beta^m \exp \left((\beta - 1) \sum_{i=1}^m \ln(x_i) \right) \left(d + \sum_{i=1}^m x_i^\beta \right)^{-(m+c)} p(\beta),$$

$$p(\theta | \beta, \mathbf{X}) \propto \text{Gamma} \left(m + c, d + \sum_{i=1}^m x_i^\beta \right).$$

在平方损失下, β 的点估计为其后验分布的均值. 这里采用独立链 M-H 算法从其后验密度中对 β 进行

采样, 具体步骤如下:

步骤 1 任意选择一个初始值 $\beta^{(i)}$, 并令 $i = 0$;

步骤 2 从伽马分布 $\text{Gamma}(e, f)$ 中生成一个备选值 β^* , 并从均匀分布 $U(0, 1)$ 中抽取 u ;

步骤 3 若 $u \leq a(\beta^{(i)}, \beta^*)$, 令 $\beta^{(i+1)} = \beta^*$, 否则令 $\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)}$, 接受概率为

$$a(\beta^{(i)}, \beta^*) = \min \left\{ \frac{p(\beta^* | \mathbf{X})(\text{Gamma}(\beta^{(i)}, e, f))}{p(\beta^{(i)} | \mathbf{X})(\text{Gamma}(\beta^*, e, f))}, 1 \right\};$$

步骤 4 令 $i \leftarrow i + 1$, 并返回到步骤 2, 重复步骤 2、步骤 3, $M = 10\,000$ 次.

则参数 β 的估计值为 $\hat{\beta}_{ic} = \sum_{i=1}^M \beta^{(i)}$.

3.2 先验分布参数的取值

令 $\text{prior}(\beta)$ 和 $\text{prior}(\alpha)$ 分别为 β 和 α 的先验值, $\text{MLE}(\beta)$ 和 $\text{MLE}(\alpha)$ 分别为参数 β 和 α 在样本 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 下的极大似然估计. 则 β 和 θ 先验分布的参数值可由式(5)和式(6)得到

$$\begin{cases} \frac{e}{f} = \frac{1}{2} (\text{MLE}(\beta) + \text{prior}(\beta)) \\ \frac{e}{f^2} = \frac{0.01}{2} (\text{MLE}(\beta) + \text{prior}(\beta)), \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{c}{d} = \frac{1}{2} (1/\text{MLE}(\alpha)^{\text{MLE}(\beta)} + 1/\text{prior}(\alpha)^{\text{prior}(\beta)}) \\ \frac{c}{d^2} = \frac{0.01}{2} (1/\text{MLE}(\alpha)^{\text{MLE}(\beta)} + 1/\text{prior}(\alpha)^{\text{prior}(\beta)}). \end{cases} \quad (6)$$

4 控制图的性能分析

4.1 受控状态下控制图的性能分析

过程受控时, 为了分析参数估计对控制图性能的影响, 考虑当第一阶段的样本数 m 为 20, 50, 100, 200, 250 和 500, 参数 β 真实值分别为 0.5, 1 和 2 时控制图的性能. 不失一般性, 令 $\alpha = 1$. 表 1、表 2 和表 3 分别是 $n = 11, k = 2.2$; $n = 15, k = 2.1$ 和 $n = 20, k = 2.0$ 即 $\text{ARL}_0 = 100$ 时 Bayesian-Beta 控制图的 AARL 和 SDARL 值. 为了比较 Bayesian-Beta 控制图(贝叶斯估计)和 Beta 控制图(极大似然估计)的性能差异, 表 1、表 2 和表 3 同时给出了 Beta 控制图的 AARL 和 SDARL 值. 具体的仿真步骤如下:

步骤 1 初始化 m, n, k, β, α , 并令先验值为 $\text{prior}(\beta) = \beta$ 和 $\text{prior}(\alpha) = \alpha$;

步骤 2 生成 m 个第一阶段的样本数据, 估计过程参数 $\hat{\beta}_{ic}$ 后进入过程监控阶段;

步骤 3 产生一系列监控阶段的数据, 计算 $\hat{S}_i$ 并打点, 当点超出控制限时, 认为过程失控, 此时的 i 为运行链长;

步骤 4 重复步骤 3 共 10 000 次, 计算 i 的均值得到 ARL;

步骤 5 重复步骤 2 到步骤 4 共 2 000 次, 计算 ARL 的均值和标准差得 AARL 和 SDARL.

从表 1、表 2 和表 3 中可以看出随着样本数 m 的增大, Bayesian-Beta 控制图和 Beta 控制图的 AARL 逐渐接近 100, SDARL 越来越小, 即随着样本数 m 的增大, 参数未知的 Bayesian-Beta 控制图和 Beta 控制图的性能越来越接近参数已知情况. 对比 Bayesian-Beta 控制图和 Beta 控制图的性能可以发现 Bayesian-Beta 控制图的 AARL 更大, SDARL 更小, 例如, 当 $m = 20, \beta = 0.5$ 时, Bayesian-Beta 控制图的 $\text{AARL} = 75.73$, $\text{SDARL} = 26.53$, Beta 控制图的 $\text{AARL} = 63.63$, $\text{SDARL} = 30.79$, 说明用贝叶斯估计可以有效降低参数估计对控制图性能的影响. Zhang 等^[14]建议 SDARL 值应小于设定值 ARL_0 的 10%, 对于 Bayesian-Beta

控制图, 当样本数 m 为 200 时, 其 SDARL 值在设定值 ARL_0 的 10% 左右, 而 Beta 控制图, 当样本数 m 为 250 甚至 500 时, 其 SDARL 值才在设定值 ARL_0 的 10% 左右.

对比表 1、表 2 和表 3 可以看出, 当 ARL_0 相同, 窗口大小 n 不同时控制图的性能略有差异. 当样本数和参数 β 相同如 $m = 20, \beta = 0.5$ 时, $n = 11$ 时的 $AARL = 75.73$, $SDARL = 25.63$, $n = 15$ 时的 $AARL = 71.74$, $SDARL = 26.57$, $n = 20$ 时的 $AARL = 66.90$, $SDARL = 27.15$, 说明参数未知情况下, 窗口大小 n 较小时受控状态下的控制图的性能更稳定.

表 1 受控状态下控制图的性能($n = 11, k = 2.2$)
Table 1 Control chart performance in controlled state($n = 11, k = 2.2$)

m	Bayesian-Beta 控制图						Beta 控制图					
	$\beta = 0.5$		$\beta = 1$		$\beta = 2$		$\beta = 0.5$		$\beta = 1$		$\beta = 2$	
	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL
20	75.73	25.63	75.31	22.71	80.18	22.55	63.63	30.79	61.47	29.14	63.90	30.15
50	85.64	18.74	85.07	15.78	89.16	15.50	79.64	22.85	77.86	21.13	79.38	22.70
100	91.90	13.74	88.79	12.17	94.00	10.72	89.18	16.10	84.96	15.47	88.81	15.41
200	96.22	10.16	92.08	8.91	96.07	8.21	95.12	11.28	90.48	10.50	93.52	10.80
250	96.72	9.37	93.08	8.26	97.13	7.20	95.86	10.26	91.95	9.52	95.33	9.15
500	99.63	5.86	94.93	5.63	98.94	5.31	99.35	6.20	94.54	6.08	98.25	6.13

表 2 受控状态下控制图的性能($n = 15, k = 2.1$)
Table 2 Control chart performance in controlled state($n = 15, k = 2.1$)

m	Bayesian-Beta 控制图						Beta 控制图					
	$\beta = 0.5$		$\beta = 1$		$\beta = 2$		$\beta = 0.5$		$\beta = 1$		$\beta = 2$	
	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL
20	71.74	26.57	75.25	25.11	77.41	24.53	59.26	31.38	59.84	31.48	59.96	31.50
50	82.20	19.66	86.35	17.78	87.43	17.60	75.78	23.83	77.94	23.63	76.37	24.89
100	88.96	14.47	90.64	13.70	93.08	12.41	86.02	16.95	86.13	17.48	86.87	17.54
200	93.76	10.40	94.58	9.87	95.67	9.49	92.60	11.61	92.67	11.78	92.53	12.54
250	94.27	9.53	95.79	9.02	97.01	8.24	93.38	10.50	94.44	10.52	94.77	10.55
500	97.36	5.85	98.16	5.78	99.18	5.88	97.07	6.19	97.69	6.34	98.34	6.91

表 3 受控状态下控制图的性能($n = 20, k = 2.0$)
Table 3 Control chart performance in controlled state($n = 20, k = 2.0$)

m	Bayesian-Beta 控制图						Beta 控制图					
	$\beta = 0.5$		$\beta = 1$		$\beta = 2$		$\beta = 0.5$		$\beta = 1$		$\beta = 2$	
	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL
20	66.90	27.15	71.73	26.08	73.75	25.01	54.39	31.42	55.90	32.10	55.91	31.90
50	77.67	20.58	83.42	18.77	84.04	17.88	70.97	24.59	74.48	24.69	72.54	25.45
100	84.86	15.39	87.96	14.55	89.85	12.34	81.72	17.91	83.11	18.49	83.40	17.85
200	90.17	10.98	92.24	10.56	92.55	9.20	88.89	12.26	90.15	12.58	89.36	12.49
250	90.82	10.08	93.57	9.61	93.89	7.76	89.83	11.12	92.11	11.18	91.64	10.28
500	94.26	5.91	96.21	6.15	95.97	5.32	93.94	6.30	95.69	6.75	95.16	6.39

4.2 先验信息误差灵敏度的分析

在贝叶斯估计中, 先验信息对估计结果有一定的影响. 在确定参数 β 和 θ 先验分布的参数值时利用了参数 β 和 α 的先验值 $\text{prior}(\beta)$ 和 $\text{prior}(\alpha)$, 显然 $\text{prior}(\beta)$ 和 $\text{prior}(\alpha)$ 会影响到控制图的性能. 令 $\delta_1 = \text{prior}(\beta)/\beta$, $\delta_2 = \text{prior}(\alpha)/\alpha$ 分别为参数 β 和 α 的先验值 $\text{prior}(\beta)$ 和 $\text{prior}(\alpha)$ 和其真实值的误差系数. 因为 δ_1 或 δ_2 的增大(或减小)对控制图性能的影响相同, 所以分析中考虑 δ_1 或 δ_2 取相同值的情况. 表 4 给出了误差系数 δ_1 或 δ_2 为(1.15, 1.10, 1.05, 1.00, 0.95, 0.90, 0.85)时的控制图的性能, 其中 $n = 11$, $k = 2.2$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$.

表 4 不同误差系数下控制图的性能对比

Table 4 Performance comparison of control charts with different error coefficients

	1.15		1.10		1.05		1.00		0.95		0.90		0.85		Beta 控制图	
m	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL	AARL	SDARL
20	67.51	25.66	70.82	24.60	73.58	23.32	75.31	22.71	77.26	20.82	78.02	20.00	78.06	19.76	61.47	29.14
50	77.02	19.93	79.94	18.77	82.36	17.45	85.07	15.78	85.54	15.02	86.13	14.25	86.02	14.02	77.86	21.13
100	83.31	15.49	85.41	14.32	87.20	13.12	88.79	12.17	89.65	10.94	90.24	10.22	90.40	9.94	84.96	15.47
200	88.94	11.15	90.22	10.35	91.34	9.55	92.08	8.91	92.91	8.16	93.36	7.66	93.57	7.35	90.48	10.50
250	90.19	10.15	91.30	9.44	92.25	8.74	93.08	8.26	93.70	7.47	94.16	6.98	94.46	6.57	91.95	9.52
500	93.32	6.96	93.92	6.60	94.49	6.22	94.93	5.63	95.44	5.50	95.81	5.16	96.13	4.84	94.54	6.08

当误差系数 $\delta_1 = \delta_2 > 1$ 时, 即参数 β 和 α 的先验值 $\text{prior}(\beta)$ 和 $\text{prior}(\alpha)$ 大于其真实值时, 控制图的性能随着误差系数的增大越来越差, 但仍然比 Beta 控制图的性能更好, 例如 $m = 20$ 时, 误差系数 $\delta_1 = \delta_2 = 1.15$ 的 $\text{AARL} = 67.51$, $\text{SDARL} = 25.66$, $\delta_1 = \delta_2 = 1.10$ 的 $\text{AARL} = 70.82$, $\text{SDARL} = 24.60$, $\delta_1 = \delta_2 = 1.05$ 的 $\text{AARL} = 73.58$, $\text{SDARL} = 23.32$, Beta 控制图的 $\text{AARL} = 61.47$, $\text{SDARL} = 29.14$. 当误差系数 $\delta_1 = \delta_2 < 1$ 时, 即参数 β 和 α 的先验值 $\text{prior}(\beta)$ 和 $\text{prior}(\alpha)$ 小于其真实值时, 控制图的性能随着误差系数的减小越来越好.

综上, 采用贝叶斯方法估计参数能够有效减少参数估计量的波动对控制图性能的影响, 即使用者与使用者之间的波动问题, 增强了使用者对控制图的信心; 先验信息值的误差在真实值的 15% 以内, Bayesian-Beta 控制图都有着较好的性能, 说明所提贝叶斯估计方法具有可操作性.

5 案例分析

表 5 的数据是某生产系统中生产出来的硬盘驱动器的加速寿命试验的失效数据^[4]. 取前 20 个数据为第一阶段的样本数据, $n = 11$, $k = 2.2$ 即 $\text{ARL}_0 = 100$, 计算得 $\hat{\beta}_{ic} = 1.238$, $\text{LCL} = 0.624$, $\text{CL} = 0.867$, $\text{UCL} = 1.110$. 剩余的数据作为第二阶段的监控数据, 监控图如图 1 所示.

表 5 硬盘驱动器失效时间

Table 5 failure times of hard disk drives

序号	失效时间/h	序号	失效时间/h	序号	失效时间/h	序号	失效时间/h
1	207	13	451	25	753	37	915
2	489	14	372	26	462	38	4
3	208	15	909	27	209	39	2
4	89	16	828	28	798	40	80
5	46	17	120	29	260	41	754
6	469	18	982	30	21	42	222
7	26	19	612	31	594	43	93
8	320	20	376	32	723	44	499
9	181	21	4	33	82	45	448
10	567	22	531	34	59	46	93
11	702	23	133	35	4	47	42
12	257	24	916	36	326		

图 1 中的实心圆点表示第一阶段的打点值, 可以看出第一阶段过程是稳定的; 其余点是第二阶段的打点值, 超出控制限的打点值用方框实心点表示. 图中有一个明显的上升的趋势, 说明形状参数的值在减小, 意味着该硬盘驱动的可靠性在提高. 事实上该硬盘驱动器的可靠性确实提高了, 图中的上升的趋势符合事实. 可见 Bayesian-Beta 控制图对过程偏移具有较好的探测能力.

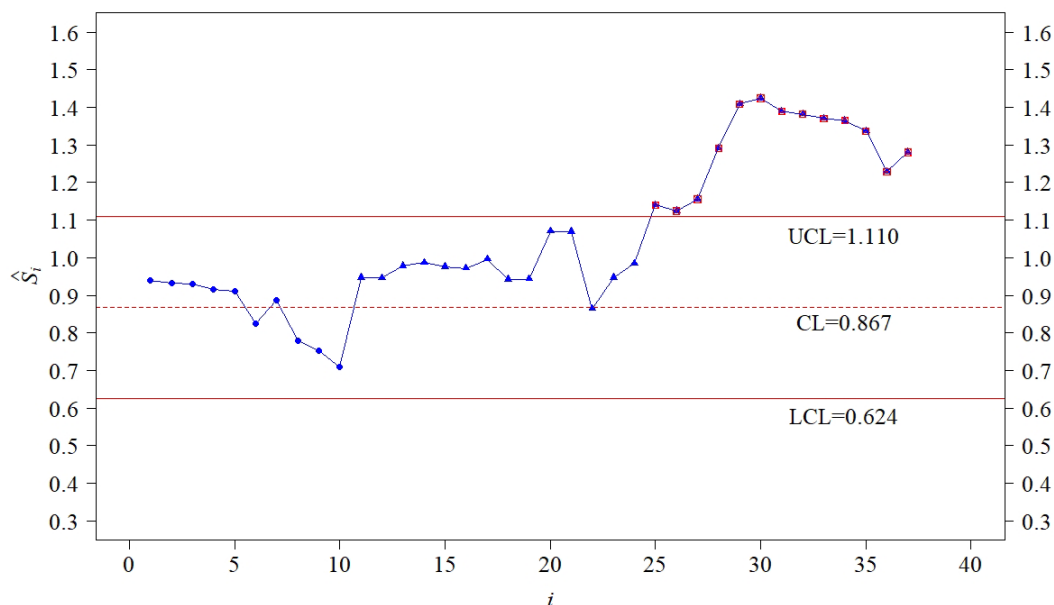


图 1 某硬盘驱动器的生产过程监控图

Fig. 1 The control chart of a hard disk drives' production process

6 结束语

针对威布尔更新过程, 考虑威布尔分布形状参数偏移的探测问题以及实际中样本数据较少的问题, 设计了 Bayesian-Beta 控制图, 给出了控制图的监控程序和参数的贝叶斯估计方法. 相比较于 Beta 控制图, 在过程受控时 Bayesian-Beta 控制图的 AARL 更接近于 ARL_0 , SDARL 更小, 即 Bayesian-Beta 控制图的性能受参数估计量波动的影响更小. 所提出的贝叶斯估计方法中先验信息的误差对控制图性能的影响小, 可操作性强. 案例分析表明 Bayesian-Beta 控制图在实际应用中能够有效探测到过程的偏移.

由于监控统计量之间的相关性, 本文未能给出 ARL 的理论计算方法, 另外如何处理数据之间的相关性是一个需要进一步研究的问题.

参考文献:

- [1] Montgomery D C. Introduction to Statistical Quality Control. 7th ed. Hoboken New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.
- [2] Woodall W H, Driscoll A R. Some Recent Results on Monitoring the Rate of a Rare Event. Switzerland: Springer International Publishing, 2015.
- [3] Ali S, Pievatolo A. High quality process monitoring using a class of inter-arrival time distributions of the renewal process. Computers & Industrial Engineering, 2016, 94(4): 45–62.
- [4] Zhang C W, Ye Z S, Xie M. Monitoring the shape parameter of a Weibull renewal process. IIE Transactions, 2017, 49(8): 800–813.
- [5] Pascual F. EWMA charts for the Weibull shape parameter. Journal of Quality Technology, 2010, 42(4): 400–416.
- [6] Pascual F, Zhang H F. Monitoring the Weibull shape parameter by control charts for the sample range. Quality and Reliability Engineering International, 2011, 27(1): 15–25.
- [7] Pascual F, Li S. Monitoring the Weibull shape parameter by control charts for the sample range of type II censored data. Quality and Reliability Engineering International, 2012, 28(2): 233–246.
- [8] Ali S, Pievatolo A, Gob R. An overview of control charts for high-quality processes. Quality and Reliability Engineering International, 2016, 32(7): 2171–2189.