Heston 模型下基于期权投资的鲁棒最优控制

杨　璐[1,2], 朱怀念[1], 张成科[1]
(1. 广东工业大学经济与贸易学院, 广东 广州 510520; 2. 广东工业大学管理学院, 广东 广州 510520)

摘要: 针对 Heston 随机波动率模型下的鲁棒最优投资问题, 构建了带期权投资的资产负债管理模型. 投资者的目标是最大化终端时刻净财富的幂效用, 利用随机最优控制方法, 分别获得了带期权投资以及无期权投资两种情形下鲁棒最优投资策略、最坏概率测度及值函数的解析表达式, 通过数值模拟发现考虑模型的鲁棒性以及进行期权投资能够改进投资者的效用.

关键词: Heston 模型; 模糊风险厌恶; 期权; 鲁棒最优投资策略
中图分类号: F224.9　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000−5781(2021)02−0157−14

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2021.02.002

Robust optimal control for derivative-based investment under the Heston model

Yang Lu[1,2], Zhu Huainian[1], Zhang Chengke[1]
(1. School of Economics & Commerce, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China;
2. School of Management, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: With regard to the robust optimal investment problem for an ambiguity-averse investor (AAI) with stochastic volatility, an asset-liability management model with derivative-based investment is constructed. The objective of investors is to maximize the power utility of net wealth at the end of time. The paper derives the explicit expressions for the robust optimal investment strategy, the worst-case scenario and the corresponding value function with and without derivative investment respectively by means of using stochastic optimal control method. The result of the numerical simulation shows that the established model and its algorithm are feasible and effective. Considering the robustness of the model and derivative trading the model can improve the utility of the investor.

Key words: Heston model; ambiguity aversion; derivative; robust optimal investment strategy

1　引　言

资产–负债管理是金融风险管理领域的经典问题, 它以研究负债情形下组合证券投资问题的最优投资策略和风险控制为目标, 以实现资产最优配置和套期保值为目的的一种现代金融管理方法, 在理论界和金融机构得到了快速发展. 尽管资产负债管理问题在多个领域已经有了广泛的运用, 从现有的文献可知, 仍有两个方面需要进一步的研究.

收稿日期: 2018−05−18; 修订日期: 2019−01−21.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71571053); 广东省自然科学基金资助项目(2018A030313687); 教育部人文社会科学研究青年资助基金项目(18YJC790003); 广东大学生科技创新培育专项资金资助项目(pdjha0151).

一方面是现有的文献中很少涉及到期权, 现实中, 期权的投资可以有效的对冲金融风险. 所以, 投资者在金融交易过程中广泛使用各种各样的金融衍生工具, 比如互换期权、远期期权以及信用衍生品等. 据货币监理署办公室发布的银行交易及衍生业务活动的季度报告显示[1]: 2016 年第一季度来自于期权的信贷敞口增加, 其净信用风险敞口从 651 亿美元增加至 4 601 亿美元. 因此, 期权交易与投资是高度相关的. 所以, 在资产–负债管理问题中很有必要考虑期权问题. 近年来, 一些学者在投资组合中也考虑了期权问题, 其中 Liu 等[1]指出期权对提高投资者的福利至关重要. 傅毅等[2]研究了含有期权的最优投资与比例再保险问题. Hsuku[3]研究了动态消费和递归效用函数下衍生证券的资产配置问题. Fu 等[4] 在连续时间的 Markov 机制转移市场中研究了带有期权的投资组合问题. Escobar 等[5] 研究了投资股票和期权下风险厌恶者的最优投资策略问题. Zeng 等[6]研究了养老金管理者在随机收入和随机波动率下基于期权的鲁棒最优投资策略. Shen 等[8]研究了 Heston 随机波动模型下基于均值–方差带负债过程的最优控制问题, Li 等[7]在 Shen 等[8]的基础上增加了期权.

另一方面, 不断有学者开始关注模型不确定性风险对最优投资策略的影响. 在现实的金融市场中, 风险资产的期望回报率往往很难被精确估计, 作为一个明智的决策者, 当意识到模型中漂移参数的不确定风险时, 应该将此因素考虑进来. 所谓模型不确定性, 是指由现实观测数据所得到的估计模型可能会偏离于真实的模型, 我们将此估计的模型称为参考模型, 而投资者对模型及其参数的不确定性持模糊厌恶态度. Ellsberg[9]是关于模糊厌恶的第一个研究者, 后来 Bossaerts 等[10]和 Dimmock 等[11]研究了模糊不确定对投资行为的影响. Branger 等[12]研究了关于跳跃和扩散风险的模糊风险厌恶下的最优投资组合问题. Flor 等[13]在随机利率的背景下, 考虑了模糊风险厌恶投资者的最优投资策略. Munk 等[14]研究了在随机利率风险和通货膨胀风险下, 模糊风险厌恶投资者的投资组合管理问题. Yi 等[15]、Zeng 等[16]和 Zheng 等[17]研究了不同框架下的鲁棒最优投资再保险问题.

由以上文献可以看出, 目前在资产–负债管理中把两者结合起来进行研究的文献几乎没有, 然而期权在资产负债管理的投资中也越来越受欢迎, 同时投资者一般也持模糊厌恶态度. 本文在 Zeng 等[6]研究的基础上, 把模型的不确定考虑进来, 在期权效用最大化的准则下研究了带有负债的鲁棒最优投资问题. 与本文研究相关的文献是 Li 等[7], 他们在 Heston 模型下研究了均值–方差型的负债管理问题, 但是未考虑模型的不确定性. 而鲁棒性问题的文献大都在最优投资再保险方面. 所以, 本文的创新之处是将模型的不确定性和期权投资考虑进资产–负债管理问题中, 在 Heston 模型下研究带有负债过程的鲁棒最优投资问题.

2 鲁棒最优投资模型

给定一个完备概率空间 $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P\right)$, 其上定义了一个三维标准布朗运动 $W(t) = (W_1(t), W_2(t), W_3(t))$, P 是真实概率测度, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$是定义在概率空间上的满足右连续和 P–完备的, 并且假设该概率空间足够大, 包括所有由金融资产价格波动所产生的随机因素. 另外, 假定金融市场中的交易可连续发生, 且不存在交易成本和税收费用.

2.1 金融市场

假设金融市场由无风险债券、风险股票和以股票为标的资产的期权构成, 无风险债券的价格 $B(t)$满足

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t, \quad B(0) = 1,$$

其中 r 为无风险利率.

风险股票的价格过程 $S(t)$服从

$$\mathrm{d}S(t) = S(t)\left(\left(r + \eta_1 V(t)\right)\mathrm{d}t + \sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_1(t)\right), \ \ S(0) = s_0,$$

[1]https://occ.gov/publications/publications-by-type/other-publications-reports/ semiannual-risk-perspective/semiannual-risk-perspective-fall-2016.pdf

股票价格波动的方差 $V(t)$ 服从

$$\mathrm{d}V(t)=\kappa\left(\delta-V(t)\right)\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{V(t)}\left(\rho\mathrm{d}W_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_2(t)\right),\quad V(0)=v_0>0,$$

其中 $W_1(t),W_2(t)$是定义在概率空间$\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},P\right)$上相互独立的布朗运动. 股票价格波动的方差 $V(t)$是一个随机过程, η_1 表示风险源 $W_1(t)$的市场价格参数, $\delta>0,\kappa>0,\sigma>0$ 分别为长期均值、均值回归速度和股票方差波动率, $\rho\in(-1,1)$为股票价格和股票价格方差之间的相关性.

此外, 投资者也会投资于期权. 根据文献[17], 设时刻 t 期权的价格为 $O\left(t,S(t),V(t)\right)$. 为了方便, 简记为 $O(t)$, 则期权价格满足

$$\mathrm{d}O(t)=rO(t)\mathrm{d}t+\left(O_{\mathrm{S}}S(t)+\sigma\rho O_{\mathrm{V}}\right)\left(\eta_1V(t)\mathrm{d}t+\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_1(t)\right)+$$

$$\sigma\sqrt{1-\rho^2}O_{\mathrm{V}}\left(\eta_2V(t)\mathrm{d}t+\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_2(t)\right),$$

其中 η_2 表示风险源 $W_2(t)$的市场价格参数, O_{S} 和 O_{V} 分别是期权价格 $O(t)$对于股票价格 $S(t)$ 和股票价格方差 $V(t)$的偏导数. 对于给定的物理测度, 在金融市场无风险资产和风险资产服从的随机微分方程中存在唯一的风险中性测度, 可以证明金融市场是完备的, 并且存在唯一的定价核[7].

假设投资者在时间区间 $[0,T]$内面临一个不可控的与随机波动有关的外生负债 $L(t)$, 其演化过程服从如下随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}L(t)=L(t)\left(\left(\mu+\alpha V(t)\right)\mathrm{d}t+\beta_1\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_1(t)+\beta_2\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_2(t)+\beta_3\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_3(t)\right)\\ L(0)=l_0>0,\end{cases}$$

其中 $\mu\geqslant0,\alpha\geqslant0$ 是漂移系数, β_1,β_2 和 β_3 是波动系数, 在此假设负债是不可控的, 即投资者不能通过改变交易策略来决定其想要承担负债的价值.

2.2　鲁棒优化问题

以上的框架是传统的投资组合模型, 一般投资者是风险中性的. 然而, 现实中, 投资者通常是模糊厌恶的, 并且总想使自己免于最坏的情形, 即担心模型及其参数的不确定性风险. 当投资者在投资组合问题中加入模糊厌恶的因素后, 这里用与真实概率测度 P 等价的可替代测度 Q 来描述获取投资者模糊性知识的参考模型, 认为参考模型只是真实模型的一个近似, 因而希望考虑用一个由所有可替代测度 Q 构成的集合 $\mathcal{Q}$[18], 使得 $\mathcal{Q}:=\{Q|Q\sim P\}$. 这里将在可替代测度集合 $\mathcal{Q}$ 中重新考虑模型.

定义 $\varPhi:=\{(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t))\}_{t\in[0,T]}$, 其满足:

1) $\phi_1(t),\phi_2(t)$和 $\phi_3(t)$在 $t\in[0,T]$ 上 $\mathcal{F}_t$–可测;

2) $\mathrm{E}\left[\exp\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T\left(\left(\phi_1(t)\right)^2+\left(\phi_2(t)\right)^2+\left(\phi_3(t)\right)^2\right)\mathrm{d}t\right)\right]<\infty$;

3) $\phi_1(t)>0,\phi_2(t)>0,\phi_3(t)>0$.

定义 $\varTheta$ 为满足上述条件的所有可测过程构成的空间. 根据 Girsanov 定理, 对于每一个可替代测度 $Q\in\mathcal{Q}$, 将存在一个循序可测过程 $\varPhi$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|_{\mathcal{F}_t}=\varLambda^{\varPhi}(t),$$

其中

$$\varLambda^{\varPhi}(t)=\exp\left(-\int_0^t\left(\phi_1(s)\right)^2\mathrm{d}W_1(s)-\frac{1}{2}\left(\phi_1(s)\right)^2\mathrm{d}s-\int_0^t\left(\phi_2(s)\right)^2\mathrm{d}W_2(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\phi_2(s)\right)^2\mathrm{d}s-\right.$$

$$\left.\int_0^t\left(\phi_3(s)\right)^2\mathrm{d}W_3(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\phi_3(s)\right)^2\mathrm{d}s\right).$$

根据 $\varPhi$ 的定义, 知 $\{\varLambda^{\varPhi}(t)|t\in[0,T]\}$是一个 $\mathcal{Q}$–鞅. 进一步, 根据 Girsanov 定理, 在可替代测度 $Q\in\mathcal{Q}$ 下标准布朗运动可以表示为

$$\mathrm{d}W_1^{\varPhi}(t)=\mathrm{d}W_1(t)+\phi_1(t)\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}W_2^{\varPhi}(t)=\mathrm{d}W_2(t)+\phi_2(t)\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}W_3^{\varPhi}(t)=\mathrm{d}W_3(t)+\phi_3(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $W_1^{\varPhi}(t),W_2^{\varPhi}(t)$和 $W_3^{\varPhi}(t)$是一维标准布朗运动.

显然, 在可替代测度下的扩散模型只会改变漂移参数. 在可替代测度 $Q\in\mathcal{Q}$ 下, 股票的价格过程、波动的方差过程和负债过程可以重新表示为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S^{\varPhi}(t)=&S^{\varPhi}(t)\left(\left(r+\eta_1V^{\varPhi}(t)-\phi_1(t)\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\right)\mathrm{d}t+\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\mathrm{d}W_1^{\varPhi}(t)\right),\\
\mathrm{d}V^{\varPhi}(t)=&\left(\kappa\left(\delta-V^{\varPhi}(t)\right)-\sigma\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\left(\rho\phi_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\phi_2(t)\right)\right)\mathrm{d}t+\\
&\sigma\rho\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\mathrm{d}W_1^{\varPhi}(t)+\sigma\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_2^{\varPhi}(t),\\
\mathrm{d}L^{\varPhi}(t)=&L^{\varPhi}(t)\left(\left(\mu+\alpha V^{\varPhi}(t)-\beta_1\phi_1(t)\sqrt{V^{\varPhi}(t)}-\beta_2\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\phi_2(t)-\beta_3\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\phi_3(t)\right)\mathrm{d}t+\right.\\
&\left.\beta_1\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\mathrm{d}W_1^{\varPhi}(t)+\beta_2\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\mathrm{d}W_2^{\varPhi}(t)+\beta_3\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\mathrm{d}W_3^{\varPhi}(t)\right).
\end{aligned}$$

2.3 财富过程

对于任意的 $t\in[0,T]$, 假设 $X^{\pi}(t)$是投资者在时刻 t 持有的财富, $\pi_{\mathrm{S}}(t)$和 $\pi_{\mathrm{O}}(t)$ 分别是投资者在时刻 t 投资到风险股票和期权上的资金, $X^{\pi}(t)-\pi_{\mathrm{S}}(t)-\pi_{\mathrm{O}}(t)$ 是投资者在时刻t 投资到无风险债券上的资金. 用 $\pi=\{(\pi_{\mathrm{S}}(t),\pi_{\mathrm{O}}(t))\}_{t\in[0,T]}$ 表示投资者的一个投资策略, 则投资者在时刻 t 基于投资策略 π 下的财富过程 $X^{\pi}(t)$ 为

$$\begin{cases}
\mathrm{d}X^{\pi}(t)=(X^{\pi}(t)-\pi_{\mathrm{S}}(t)-\pi_{\mathrm{O}}(t))\dfrac{\mathrm{d}B(t)}{B(t)}+\pi_{\mathrm{S}}(t)\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+\pi_{\mathrm{O}}(t)\dfrac{\mathrm{d}O(t)}{O(t)}\\
\qquad\qquad=rX^{\pi}(t)\mathrm{d}t+\theta_1(t)\left(\eta_1V(t)\mathrm{d}t+\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_1(t)\right)+\theta_2(t)\left(\eta_2V(t)\mathrm{d}t+\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_2(t)\right)\\
X^{\pi}(0)=x_0>0,
\end{cases}$$

其中$\begin{pmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (O_{\mathrm{S}}S(t)+\sigma\rho O_{\mathrm{V}})/O(t)\\ 0 & (\sigma\sqrt{1-\rho^2}O_{\mathrm{V}})/O(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\mathrm{S}}(t)\\ \pi_{\mathrm{O}}(t)\end{pmatrix}$.

在可替代测度 $Q\in\mathcal{Q}$下, 财富过程 $X^{\pi}(t)$可以表示为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X^{\varPhi,\pi}(t)=&\left(rX^{\varPhi,\pi}(t)+\theta_1(t)\eta_1V^{\varPhi}(t)-\theta_1(t)\phi_1(t)\sqrt{V^{\varPhi}(t)}+\theta_2(t)\eta_2V^{\varPhi}(t)-\right.\\
&\left.\theta_2(t)\phi_2(t)\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\right)\mathrm{d}t+\theta_1(t)\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_1^{\varPhi}(t)+\theta_2(t)\sqrt{V(t)}\mathrm{d}W_2^{\varPhi}(t).
\end{aligned}$$

扣除负债后投资者的净资产为

$$\begin{cases}
\mathrm{d}Y^{\varPhi,\pi}(t)=\mathrm{d}X^{\varPhi,\pi}(t)-\mathrm{d}L^{\varPhi}(t)=\left[r\left(Y^{\varPhi,\pi}(t)+L^{\varPhi}(t)\right)+\theta_1(t)\left(\eta_1V^{\varPhi}(t)-\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\phi_1(t)\right)+\right.\\
\qquad\theta_2(t)\left(\eta_2V^{\varPhi}(t)-\phi_2(t)\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\right)-L^{\varPhi}(t)\left(\mu+\alpha V(t)-\right.\\
\qquad\left.\left.\beta_1\phi_1(t)\sqrt{V^{\varPhi}(t)}-\beta_2\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\phi_2(t)-\beta_3\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\phi_3(t)\right)\right]\mathrm{d}t+\\
\qquad\left[\theta_1(t)\sqrt{V^{\varPhi}(t)}-L^{\varPhi}(t)\beta_1\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\right]\mathrm{d}W_1^{\varPhi}(t)+\\
\qquad\left[\theta_2(t)\sqrt{V^{\varPhi}(t)}-L^{\varPhi}(t)\beta_2\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\right]\mathrm{d}W_2^{\varPhi}(t)-L^{\varPhi}(t)\beta_3\sqrt{V^{\varPhi}(t)}\mathrm{d}W_3^{\varPhi}(t)\\
Y^{\varPhi,\pi}(0)=x_0-l_0>0.
\end{cases}\tag{1}$$

定义 1(容许策略)　称策略 $\pi=\{(\pi_{\mathrm{S}}(t),\pi_{\mathrm{O}}(t))\}_{t\in[0,T]}$ 是可容许的, 如果满足如下条件

(i) $\pi(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$–循序可测;

(ii) $\mathrm{E}_{t,y,v,l}^{\Phi^*}\left\{\int_0^t\left[V^{\Phi}(s)\left(\pi\left(s\right)\right)^2\right]\mathrm{d}s\right\}<\infty$ 和 $\mathrm{E}_{t,y,v,l}^{\Phi^*}\left[\left|U\left(Y^{\Phi,\pi}\left(t\right)\right)\right|\right]<\infty$, 这里 Q^* 是描述最坏情形的可替代测度, 对于任意 (t,y,v,l),

$$\mathrm{E}_{t,y,v,l}^{\Phi^*}\left[\,\cdot\,\right]=\mathrm{E}^{\Phi^*}\left[\,\cdot\,|(Y^{\Phi,\pi}\left(t\right),V^{\Phi}\left(t\right),L^{\Phi}\left(t\right))\,=(y,v,l)\right];$$

(iii) 设 $O=[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\forall(t,y,v,l)\in O$, 随机微分方程(1)具有路径唯一的解 $\{Y^{\Phi,\pi}(t)\}_{t\in[0,T]}$.

定义 Π 为所有可容许策略所构成的集合.

3　鲁棒最优投资策略

假设投资者具有幂效用函数, 投资者同时具有风险和模糊厌恶双重特性. 此时, 投资者希望在最坏的市场环境中寻找最优投资策略实现鲁棒性. 所以, 投资者面对如下的鲁棒优化问题

$$\mathop{\mathrm{Sup}}_{\pi\in\Pi}\mathop{\mathrm{Inf}}_{\Phi\in\Theta}\mathrm{E}^{\Phi^*}\left[U\left(Y^{\Phi,\pi}\left(T\right)\right)+\int_0^T\left(\frac{\left(\phi_1\left(s\right)\right)^2}{2\Psi_1\left(t,y,v,l\right)}+\frac{\left(\phi_2\left(s\right)\right)^2}{2\Psi_2\left(t,y,v,l\right)}+\frac{\left(\phi_3\left(s\right)\right)^2}{2\Psi_3\left(t,y,v,l\right)}\right)\mathrm{d}s\right],\tag{2}$$

其中 $U\left(y\right)=\dfrac{y^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $\gamma>1$ 表示投资者的风险厌恶系数[5]. 惩罚项中的扰动 $\phi_1\left(t\right),\phi_2\left(t\right)$和 $\phi_3\left(t\right)$ 随着 $\Psi_1\left(t,y,v,l\right),\Psi_2\left(t,y,v,l\right)$ 和 $\Psi_3\left(t,y,v,l\right)$的减少而减少, $\Psi_1\left(t,y,v,l\right),\Psi_2\left(t,y,v,l\right)$ 和 $\Psi_3\left(t,y,v,l\right)$是非负函数, 它们反映了投资者对模型不确定性的模糊厌恶程度和t时刻对参考模型的信任程度. 在式(2)中添加惩罚项, 其中可替代模型和参考模型之间的距离用相对熵来度量. 根据文献[19], $\Psi_1\left(t,y,v,l\right)$, $\Psi_2\left(t,y,v,l\right)$和 $\Psi_3\left(t,y,v,l\right)$越大, 偏离参考模型的偏差越小. 此外, 投资人对参考模型信任越少, 则更喜欢考虑替代模型. 因此, 投资人的模糊厌恶 $\Psi_1\left(t,y,v,l\right),\Psi_2\left(t,y,v,l\right)$ 和 $\Psi_3\left(t,y,v,l\right)$增加. 由此, 可得下面结论.

命题 1[5]　存在唯一的函数 $H\left(t,y,v,l\right)$满足

$$H\left(t,y,v,l\right)=\mathop{\mathrm{Sup}}_{\pi\in\Pi}H^{\Phi^*,\pi}\left(t,y,v,l\right),\tag{3}$$

$$\begin{aligned}H^{\Phi^*,\pi}\left(t,y,v,l\right)&=\mathop{\mathrm{Inf}}_{\Phi\in\Theta}H^{\Phi,\pi}\left(t,y,v,l\right)\\&=\mathop{\mathrm{Inf}}_{\Phi\in\Theta}\mathrm{E}_{t,y,v,l}\left[U\left(Y^{\Phi,\pi}\left(T\right)\right)+\int_t^T\left(\frac{\left(\phi_1\left(s\right)\right)^2}{2\Psi_1\left(t,y,v,l\right)}+\frac{\left(\phi_2\left(s\right)\right)^2}{2\Psi_2\left(t,y,v,l\right)}+\frac{\left(\phi_3\left(s\right)\right)^2}{2\Psi_3\left(t,y,v,l\right)}\right)\mathrm{d}s\right],\end{aligned}\tag{4}$$

其中

$$\Psi_1\left(t,y,v,l\right)=\frac{\tilde{\beta}_1}{\left(1-\gamma\right)H\left(t,y,v,l\right)},$$

$$\Psi_2\left(t,y,v,l\right)=\frac{\tilde{\beta}_2}{\left(1-\gamma\right)H\left(t,y,v,l\right)},$$

$$\Psi_3\left(t,y,v,l\right)=\frac{\tilde{\beta}_3}{\left(1-\gamma\right)H\left(t,y,v,l\right)}.$$

根据命题 1, 定义 $H\left(t,y,v,l\right)$为效用最大化问题的值函数. 为了便于分析, 设 $\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2$ 和 $\tilde{\beta}_3$ 是大于 0 的模糊厌恶参数, 它们用来描述投资者对模糊厌恶的态度. 这里允许股票价格的不确定性程度与股票的波动性不同. 记 $\tilde{\beta}_1$ 为投资者对股票市场回报率的模糊厌恶程度, $\tilde{\beta}_2$ 为投资者对股票波动风险的模糊厌恶程度, $\tilde{\beta}_3$ 为投资者对负债风险源的模糊厌恶程度.

下面主要研究鲁棒优化框架下投资者的最优投资策略问题. 令 $C^{1,2,2,2}\left(O\right)$ 表示由函数 $\psi(t,y,v,l)$构成的集合，其中 $\psi\left(t,\cdot,\cdot,\cdot\right)$ 在 $t\in[0,T]$上一阶连续可微, $\psi\left(\cdot,y,v,l\right)$ 在 $y\in\mathbb{R}$, $v\in\mathbb{R}^+$, $l\in\mathbb{R}^+$ 上二阶连续可微. 为了方便, $\phi\left(t\right)=\left(\phi_1\left(t\right),\phi_2\left(t\right),\phi_3\left(t\right)\right)$, $\pi\left(t\right)=\left(\pi_{\mathrm{S}}\left(t\right),\pi_{\mathrm{O}}\left(t\right)\right)$ 和 $\theta\left(t\right)=\theta\left(\theta_1\left(t\right),\theta_2\left(t\right)\right)$分别简记

为 $\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$, $\pi=(\pi_{\rm S},\pi_{\rm O})$ 和 $\theta=\theta(\theta_1,\theta_2)$, 对于任意 $(t,y,v,l)\in O$ 和 $\psi(t,y,v,l)\in C^{1,2,2,2}(O)$, 定义生成元为

$$\begin{aligned}A^{\Phi,\pi}\psi(t,y,v,l)=&\psi_t+\big[r(y+l)+\theta_1\left(\eta_1 v-\sqrt{v}\phi_1\right)+\theta_2\left(\eta_2 v-\phi_2\sqrt{v}\right)-\\&\left(\mu+\alpha v-\beta_1\phi_1\sqrt{v}-\beta_2\sqrt{v}\phi_2-\beta_3\sqrt{v}\phi_3\right)\big]\psi_y+\\&l\left[\kappa(\delta-v)-\sigma\sqrt{v}\left(\rho\phi_1+\sqrt{1-\rho^2}\phi_2\right)\right]\psi_v+\\&l\left(\mu+\alpha v-\beta_1\phi_1\sqrt{v}-\beta_2\sqrt{v}\phi_2-\beta_3\sqrt{v}\phi_3\right)\psi_l+\\&\frac{1}{2}v\left(\theta_1^2-2\theta_1 l\beta_1+l^2\beta_1^2+l^2\beta_2^2-2\theta_2 l\beta_2+\theta_2^2+l^2\beta_3^2\right)\psi_{yy}+\frac{1}{2}v\sigma^2\psi_{vv}+\\&\frac{1}{2}vl^2\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\right)\psi_{ll}+l\left(\sigma\rho\beta_1+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)v\psi_{lv}+\\&\left(l\beta_1\theta_1-l^2\beta_1^2+l\beta_2\theta_2-l^2\beta_2^2-l^2\beta_3^2\right)v\psi_{yl}+\\&\left(\sigma\rho\theta_1-\sigma\rho l\beta_1+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\theta_2-l\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)v\psi_{yv},\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $\psi_t,\psi_y,\psi_v,\psi_l,\psi_{yy},\psi_{lv},\psi_{vv},\psi_{yl},\psi_{yv}$ 分别表示函数 ψ 对于不同变量的偏导数.

根据动态规划原理, 相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程[5]为

$$\underset{\pi\in\Pi}{\rm Sup}\ \underset{\Phi\in\Theta}{\rm Inf}\left\{A^{\Phi,\pi}J(t,y,v,l)+\frac{\phi_1^2}{2\Psi_1}+\frac{\phi_2^2}{2\Psi_2}+\frac{\phi_3^2}{2\Psi_3}\right\}=0,$$

其中边界条件为 $J(T,y,v,l)=U(y)$.

由文献[5]知下述结论成立.

命题 2 如果存在一个函数 $J(t,y,v,l)\in C^{1,2,2,2}(O)$ 和一个控制 $(\pi^*,\Phi^*)=\{(\pi^*(t),\phi^*(t))\}_{t\in[0,T]}$, $\{(\pi^*(t),\phi^*(t))\}_{t\in[0,T]}\in\Pi\times\Theta$ 满足

1) 对于$\forall\phi(t)>0$, $A^{\Phi,\pi^*}J(t,y,v,l)+\dfrac{\phi_1^2}{2\Psi_1}+\dfrac{\phi_2^2}{2\Psi_2}+\dfrac{\phi_3^2}{2\Psi_3}\geqslant 0$;

2) 对于$\forall\pi\in\mathbb{R}^2$, $A^{\Phi^*,\pi}J(t,y,v,l)+\dfrac{\phi_1^2}{2\Psi_1}+\dfrac{\phi_2^2}{2\Psi_2}+\dfrac{\phi_3^2}{2\Psi_3}\leqslant 0$;

3) $A^{\Phi^*,\pi^*}J(t,y,v,l)+\dfrac{\phi_1^2}{2\Psi_1}+\dfrac{\phi_2^2}{2\Psi_2}+\dfrac{\phi_3^2}{2\Psi_3}=0,\ J(T,y,v,l)=U(y)$;

4) $\{J(\tau,y,v,l)\}_{\tau\in\varsigma}$ 和$\left\{\dfrac{(\phi_1^*(\tau))^2}{2\Psi_1(\tau,y,v,l)}+\dfrac{(\phi_2^*(\tau))^2}{2\Psi_2(\tau,y,v,l)}+\dfrac{(\phi_3^*(\tau))^2}{2\Psi_3(\tau,y,v,l)}\right\}_{\tau\in\zeta}$ 是一致可积的, 其中 ζ 表示终止时刻 $\tau\leqslant T$ 的集合,$\Phi^*=\{\phi^*=(\phi_1^*,\phi_2^*,\phi_3^*)\}$, 则值函数为 $J(t,y,v,l)=H(t,y,v,l)$, 最优策略为(π^*,Φ^*).

定理 1 对于鲁棒最优投资问题, 给定值函数(3)和扣除负债后的财富过程(1), 其最优投资策略为

$$\pi_{\rm S}^*(t)=\theta_1^*(t)-\frac{O_{\rm S}S(t)+\sigma\rho O_{\rm V}}{O(t)}\pi_{\rm O}(t),\quad \pi_{\rm O}^*(t)=\frac{O(t)\theta_2^*(t)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}O_{\rm V}},$$

其中

$$\theta_1^*(t)=\frac{\eta_1(1-\gamma)+\sigma\rho\left(1-\gamma-\tilde\beta_1\right)\tilde g(t)}{\left(\tilde\beta_1+\gamma\right)(1-\gamma)}\left(X^{\pi^*}(t)+\hat h(t)\right),$$

$$\theta_2^*(t)=\frac{\eta_2(1-\gamma)+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\left(1-\gamma-\tilde\beta_2\right)\tilde g(t)}{\left(\tilde\beta_2+\gamma\right)(1-\gamma)}\left(X^{\pi^*}(t)+\hat h(t)\right).$$

相应的值函数为

$$J(t,y,l,v)=\frac{(y+l+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left(\tilde g(t)v+\hat g(t)\right),\tag{6}$$

其中
$$\tilde{g}=\frac{n_1n_2-n_1n_2\mathrm{e}^{a_2(n_1-n_2)(T-t)}}{n_2-n_1\mathrm{e}^{a_2(n_1-n_2)(T-t)}},$$
$$\hat{g}=\int_t^T(\kappa\delta\tilde{g}+(1-\gamma)\,r)\mathrm{d}s,\quad n_{1,2}=\frac{b_2\pm\sqrt{b_2^2-4a_2c_2}}{-2a_2}$$
$$a_2=\frac{1}{2}\sigma^2\left[1-\frac{\beta_1\rho^2}{1-\gamma}-\frac{\beta_2\left(1-\rho^2\right)}{1-\gamma}\right]+\frac{\sigma^2\rho^2\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)^2}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)(1-\gamma)}+\frac{\sigma^2\left(1-\rho^2\right)\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_2\right)^2}{2\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)(1-\gamma)},$$
$$b_2=\frac{\eta_1\sigma\rho\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)}{\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}+\frac{\eta_2\sigma\sqrt{1-\rho^2}\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_2\right)}{\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)}-\kappa,$$
$$c_2=\frac{(1-\gamma)\,\eta_1^2}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}+\frac{(1-\gamma)\,\eta_2^2}{2\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)},\quad \hat{h}=\mathrm{e}^{r(t-T)}.$$

最坏的概率测度为
$$\phi_1=\frac{\sqrt{v}\tilde{\beta}_1\left[\eta_1\left(1-\gamma\right)+\sigma\rho\tilde{g}\right]}{(1-\gamma)\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)},\quad \phi_2=\frac{\sqrt{v}\tilde{\beta}_2\left[\eta_2\left(1-\gamma\right)+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\tilde{g}\right]}{(1-\gamma)\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)},\quad \phi_3=0.$$

证明　由式(5)可得
$$\begin{aligned}&J_t+\Big[r\left(y+l\right)+\theta_1\left(\eta_1v-\sqrt{v}\phi_1\right)+\theta_2\left(\eta_2v-\phi_2\sqrt{v}\right)-\\&\quad l\big(\mu+\alpha v-\beta_1\phi_1\sqrt{v}-\beta_2\sqrt{v}\phi_2-\beta_3\sqrt{v}\phi_3\big)\Big]J_y+\\&\quad\left[\kappa\left(\delta-v\right)-\sigma\sqrt{v}\left(\rho\phi_1+\sqrt{1-\rho^2}\phi_2\right)\right]J_v+l\left(\mu+\alpha v-\beta_1\phi_1\sqrt{v}-\beta_2\sqrt{v}\phi_2-\beta_3\sqrt{v}\phi_3\right)J_l+\\&\quad\frac{1}{2}v\left(\theta_1^2-2\theta_1l\beta_1+l^2\beta_1^2+l^2\beta_2^2-2\theta_2l\beta_2+\theta_2^2+l^2\beta_3^2\right)J_{yy}+\frac{1}{2}v\sigma^2J_{vv}+\frac{1}{2}vl^2\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\right)J_{ll}+\\&\quad l\left(\sigma\rho\beta_1+\sigma_{\mathrm{V}}\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)vJ_{lv}+\left(l\beta_1\theta_1-l^2\beta_1^2+l\beta_2\theta_2-l^2\beta_2^2-l^2\beta_3^2\right)vJ_{yl}+\\&\quad\left(\sigma\rho\theta_1-\sigma\rho l\beta_1+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\theta_2-l\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)vJ_{yv}+\\&\quad\frac{(1-\gamma)\,J\phi_1^2}{2\tilde{\beta}_1}+\frac{(1-\gamma)\,J\phi_2^2}{2\tilde{\beta}_2}+\frac{(1-\gamma)\,J\phi_3^2}{2\tilde{\beta}_3}=0.\end{aligned}\tag{7}$$

将式(7)左边 ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 的函数分别对 ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 求偏导数, 并令偏导数为 0, 所得方程的解为
$$\begin{cases}\phi_1=\dfrac{\tilde{\beta}_1}{(1-\gamma)\,J}\left[\left(\sqrt{v}\theta_1-l\beta_1\sqrt{v}\right)J_y+\sigma\rho\sqrt{v}J_v+l\beta_1\sqrt{v}J_l\right]\\\phi_2=\dfrac{\tilde{\beta}_2}{(1-\gamma)\,J}\left[\left(\sqrt{v}\theta_2-l\beta_2\sqrt{v}\right)J_y+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{v}J_v+l\beta_2\sqrt{v}J_l\right]\\\phi_3=\dfrac{\tilde{\beta}_3}{(1-\gamma)\,J}\left(-l\beta_3\sqrt{v}J_y+l\beta_3\sqrt{v}J_l\right).\end{cases}\tag{8}$$

将式(8)代入式(7)化简整理得
$$\begin{aligned}&J_t+\left[r\left(y+l\right)+\theta_1\eta_1v+\theta_2\eta_2v-l\left(\mu+\alpha v\right)\right]J_y+\left[\kappa\left(\delta-v\right)\right]J_v+l\left(\mu+\alpha v\right)J_l+\\&\quad\frac{1}{2}v\left(\theta_1^2-2\theta_1l\beta_1+l^2\beta_1^2+l^2\beta_2^2-2\theta_2l\beta_2+\theta_2^2+l^2\beta_3^2\right)J_{yy}+\frac{1}{2}v\sigma^2J_{vv}+\frac{1}{2}vl^2\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\right)J_{ll}+\\&\quad l\left(\sigma\rho\beta_1+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)vJ_{lv}+\left(l\beta_1\theta_1-l^2\beta_1^2+l\beta_2\theta_2-l^2\beta_2^2-l^2\beta_3^2\right)vJ_{yl}+\\&\quad\left(\sigma\rho\theta_1-\sigma\rho l\beta_1+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\theta_2-l\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)vJ_{yv}-\frac{\tilde{\beta}_1v}{2\left(1-\gamma\right)J}\left[\left(\theta_1-l\beta_1\right)J_y+\sigma\rho J_v+l\beta_1J_l\right]^2-\\&\quad\frac{\tilde{\beta}_2v}{2\left(1-\gamma\right)J}\left[\left(\theta_2-l\beta_2\right)J_y+\sigma\sqrt{1-\rho^2}J_v+l\beta_2J_l\right]^2-\frac{\tilde{\beta}_3v}{2\left(1-\gamma\right)J}\left(-l\beta_3J_y+l\beta_3J_l\right)^2=0.\end{aligned}\tag{9}$$

将式(9)左边 θ_1, θ_2 的函数分别对 θ_1, θ_2 求偏导数, 并令偏导数为 0, 所得方程的解为

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\eta_1 J_y + l\beta_1 (J_{yl} - J_{yy}) + \sigma\rho J_{yv} - \dfrac{\tilde{\beta}_1 [\sigma\rho J_v + l\beta_1 (J_l - J_y)]}{(1-\gamma) J} J_y}{\dfrac{\tilde{\beta}_1}{(1-\gamma) J} J_y^2 - J_{yy}} \\ \theta_2 = \dfrac{\eta_2 J_y + l\beta_2 (J_{yl} - J_{yy}) + \sigma\sqrt{1-\rho^2} J_{yv} - \dfrac{\tilde{\beta}_2 [\sigma\sqrt{1-\rho^2} J_v + l\beta_2 (J_l - J_y)]}{(1-\gamma) J} J_y}{\dfrac{\tilde{\beta}_2}{(1-\gamma) J} J_y^2 - J_{yy}}. \end{cases} \tag{10}$$

将式(10)代入式(9)化简整理得

$$\begin{aligned} 0 = {} & J_t + [r(y+l) - l(\mu + \alpha v)] J_y + [\kappa(\delta - v)] J_v + l(\mu + \alpha v) J_l + \frac{1}{2} v (l^2\beta_1^2 + l^2\beta_2^2 + l^2\beta_3^2) J_{yy} + \\ & \frac{1}{2} v\sigma^2 J_{vv} + \frac{1}{2} v l^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) J_{ll} + l\left(\sigma\rho\beta_1 + \sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right) v J_{lv} + (-l^2\beta_1^2 - l^2\beta_2^2 - l^2\beta_3^2) \times \\ & v J_{yl} + \left(-\sigma\rho l\beta_1 - l\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right) v J_{yv} - \frac{\tilde{\beta}_1 v}{2(1-\gamma) J} [-l\beta_1 J_y + \sigma\rho J_v + l\beta_1 J_l]^2 - \\ & \frac{\tilde{\beta}_2 v}{2(1-\gamma) J} \left[-l\beta_2 J_y + \sigma\sqrt{1-\rho^2} J_v + l\beta_2 J_l\right]^2 - \frac{\tilde{\beta}_3 v}{2(1-\gamma) J} (-l\beta_3 J_y + l\beta_3 J_l)^2 + \\ & \frac{v\left\{\eta_1 J_y - l\beta_1 J_{yy} + \beta_1 J_{yl} + \sigma\rho J_{yv} - \dfrac{\tilde{\beta}_1 [-l\beta_1 J_y + \sigma_2\rho_2 J_v + l\beta_1 J_l]}{(1-\gamma) J} J_y\right\}^2}{2\left[\dfrac{\tilde{\beta}_1}{(1-\gamma) J} J_y^2 - J_{yy}\right]} + \\ & \frac{v\left\{\eta_2 J_y + \beta_2 (J_{yl} - J_{yy}) + \sigma\sqrt{1-\rho^2} J_{yv} - \dfrac{\tilde{\beta}_2 [\sigma\sqrt{1-\rho^2} J_v + l\beta_2 (J_l - J_y)] J_y}{(1-\gamma) J}\right\}^2}{2\left[\dfrac{\tilde{\beta}_2}{(1-\gamma) J} J_y^2 - J_{yy}\right]}. \end{aligned} \tag{11}$$

根据式(2)中的幂效用函数, 推测式(11)中值函数的形式为

$$J(t, y, l, v) = \frac{(y + h(t,l))^{1-\gamma}}{1-\gamma} g(t, v), \ g(T, v) = 1, \tag{12}$$

其中 $g(t, v) = \exp[\tilde{g} v + \hat{g}], \ \tilde{g}(T) = \hat{g}(T) = 0, h(t, l) = \tilde{h} l + \hat{h}, \ \hat{h}(T) = 0.$

由式(12)可得

$$\begin{cases} J_t = h_t (y+h)^{-\gamma} g + \dfrac{(y+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma} g_t, \ \ J_y = (y+h)^{-\gamma} g, \ \ J_l = h_l (y+h)^{-\gamma} g \\ J_v = \dfrac{(y+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma} g_v \\ J_{yy} = -\gamma (y+h)^{-\gamma-1} g, \ \ J_{yl} = -\gamma h_l (y+h)^{-\gamma-1} g, \ \ J_{yv} = (y+h)^{-\gamma} g_v \\ J_{ll} = h_{ll} (y+h)^{-\gamma} g - \gamma (y+h)^{-\gamma-1} h_l^2 g, \ \ J_{lv} = h_l (y+h)^{-\gamma} g_v \\ J_{vv} = \dfrac{(y+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma} g_{vv} \\ g_t = g(\tilde{g}_t v + \hat{g}_t), \ \ g_v = g\tilde{g}, \ \ g_{vv} = g\tilde{g}^2 \\ h_t = \tilde{h}_t l + \hat{h}_t, \ \ h_l = \tilde{h}, \ \ h_{ll} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

将式(13)代入式(11)化简整理得

$$\frac{(y+h)}{1-\gamma}\left\{v\left\{\tilde{g}_t+\tilde{g}^2\left[\frac{1}{2}\sigma^2\left[1-\left(\beta_1\rho^2-\beta_2\left(1-\rho^2\right)\right)/(1-\gamma)\right]+\right.\right.\right.$$
$$\sigma^2\rho^2\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)^2/\left(2(\tilde{\beta}_1+\gamma)(1-\gamma)\right)+\sigma^2(1-\rho^2)(1-\gamma-\tilde{\beta}_2)^2/\left(2(\tilde{\beta}_2+\gamma)(1-\gamma)\right)\Big]+$$
$$\left(\eta_1\sigma\rho\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)/\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)+\eta_2\sigma\sqrt{1-\rho^2}\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_2\right)/\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)-\kappa\right)\tilde{g}+$$
$$\left.\left.\frac{(1-\gamma)\,\eta_1^2}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}+\frac{(1-\gamma)\,\eta_2^2}{2\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)}+\hat{g}_t\right\}+\kappa\delta\tilde{g}+r\,(1-\gamma)\right\}+l\left(\tilde{h}_t+(\mu_L+\alpha v)\left(\tilde{h}-1\right)\right)+\hat{h}_t-r\hat{h}+$$
$$rl\left(1-\tilde{h}\right)-\frac{1}{2}\gamma(y+h)^{-1}vl^2\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\right)\left(\tilde{h}-1\right)^2+l\left(\sigma\rho\beta_1+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)v\tilde{g}\left(\tilde{h}-1\right)-$$
$$\frac{\beta_1 v}{2}(y+h)^{-1}\left(l\beta_1\left(\tilde{h}-1\right)\right)^2-\frac{\tilde{\beta}_1 v}{1-\gamma}l\beta_1\left(\tilde{h}-1\right)\sigma\rho\tilde{g}-\frac{\beta_2 v}{2}(y+h)^{-1}\left[l\beta_2\left(\tilde{h}-1\right)\right]^2-$$
$$\frac{\tilde{\beta}_2 v}{1-\gamma}l\beta_2\left(\tilde{h}-1\right)\sigma\sqrt{1-\rho^2}\tilde{g}-\frac{\beta_3 v}{2}(y+h)^{-1}l^2\beta_3^2\left(\tilde{h}-1\right)^2=0. \tag{14}$$

将式(14)拆分可得

$$\tilde{g}_t+\tilde{g}^2\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\left[1-\frac{\beta_1\rho^2}{(1-\gamma)}-\frac{\beta_2\left(1-\rho^2\right)}{(1-\gamma)}\right]+\frac{\sigma^2\rho^2\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)^2}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)(1-\gamma)}+\frac{\sigma^2\left(1-\rho^2\right)\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_2\right)^2}{2\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)(1-\gamma)}\right\}+$$
$$\left[\frac{\eta_1\sigma\rho\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)}{\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}+\frac{\eta_2\sigma\sqrt{1-\rho^2}\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_2\right)}{\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)}-\kappa\right]\tilde{g}+\frac{(1-\gamma)\,\eta_1^2}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}+\frac{(1-\gamma)\,\eta_2^2}{2\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)}=0,$$

$$\hat{g}_t+\kappa\delta\tilde{g}+(1-\gamma)\,r=0,\ \ \tilde{h}-1=0,\ \ \hat{h}_t-r\hat{h}=0.$$

解得

$$\begin{cases}\tilde{g}=\dfrac{n_1n_2-n_1n_2\mathrm{e}^{a_2(n_1-n_2)(T-t)}}{n_2-n_1\mathrm{e}^{a_2(n_1-n_2)(T-t)}}\\ \hat{g}=\displaystyle\int_0^T(\kappa\delta\tilde{g}+(1-\gamma)\,r)\mathrm{d}s\\ \tilde{h}=1\\ \hat{h}=\mathrm{e}^{r(t-T)},\end{cases}$$

其中

$$n_{1,2}=\frac{b_2\pm\sqrt{b_2^2-4a_2c_2}}{-2a_2},$$
$$a_2=\frac{1}{2}\sigma^2\left[1-\frac{\beta_1\rho^2}{(1-\gamma)}-\frac{\beta_2\left(1-\rho^2\right)}{(1-\gamma)}\right]+\frac{\sigma^2\rho^2\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)^2}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)(1-\gamma)}+\frac{\sigma^2\left(1-\rho^2\right)\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_2\right)^2}{2\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)(1-\gamma)},$$
$$b_2=\frac{\eta_1\sigma\rho\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)}{\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}+\frac{\eta_2\sigma\sqrt{1-\rho^2}\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_2\right)}{\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)}-\kappa,$$
$$c_2=\frac{(1-\gamma)\,\eta_1^2}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}+\frac{(1-\gamma)\,\eta_2^2}{2\left(\tilde{\beta}_2+\gamma\right)}.$$

投资者为模糊中性时的情形, 即式(4)中的模糊厌恶参数 $\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2=\tilde{\beta}_3=0$, 此时即为定理 1 的特殊情形, 可以得到下面的结论.

推论 1 如果投资者是模糊中性的, 即所有的模糊厌恶参数 $\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2=\tilde{\beta}_3=0$, 则最优投资策略和值函数分别为

$$\pi_{1\mathrm{S}}^*(t)=\theta_1^*(t)-\frac{O_{\mathrm{S}}S(t)+\sigma\rho O_{\mathrm{V}}}{O(t)}\pi_{\mathrm{O}}(t), \tag{15}$$

$$\pi_{1\mathrm{O}}^*(t)=\frac{O(t)\,\theta_2^*(t)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}O_{\mathrm{V}}}, \tag{16}$$

$$\bar{J}(t,y,l,v)=\frac{(y+l)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left(\tilde{g}_1(t)v+\hat{g}_1(t)\right), \tag{17}$$

其中

$$\theta_1^*(t)=\frac{\eta_1(1-\gamma)+\sigma\rho(1-\gamma)\tilde{g}_1(t)}{\gamma(1-\gamma)}\left(X^{u^*}(t)+\hat{h}(t)\right),$$

$$\theta_2^*(t)=\frac{\eta_2(1-\gamma)+\sigma\sqrt{1-\rho^2}(1-\gamma)\tilde{g}_1(t)}{\gamma(1-\gamma)}\left(X^{u^*}(t)+\hat{h}(t)\right),$$

$$\hat{g}_1=\int_t^T(\kappa\delta\tilde{g}_1+(1-\gamma)r)\mathrm{d}s,$$

$$\tilde{g}_1=\frac{n_1n_2-n_1n_2\mathrm{e}^{a_1(n_1-n_2)(T-t)}}{n_2-n_1\mathrm{e}^{a_1(n_1-n_2)(T-t)}},$$

$$n_{1,2}=\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2-4a_1c_1}}{-2a_1},$$

$$a_1=\frac{\sigma^2}{2},\ \ b_1=\frac{\eta_1\sigma\rho(1-\gamma)}{\gamma}+\frac{\eta_2\sigma\sqrt{1-\rho^2}(1-\gamma)}{\gamma}-\kappa,\ \ c_1=\frac{1-\gamma}{2\gamma}\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right).$$

4 无期权下的鲁棒最优投资策略

在不考虑期权的框架下, 概率测度 P 下的财富过程 $X^{\Phi,\pi}(t)$为

$$\mathrm{d}X^{\Phi,\pi}(t)=rX^{\Phi,\pi}(t)\,\mathrm{d}t+\pi(t)\left[\left(\eta_1V^{\Phi}(t)-\sqrt{V^{\Phi}(t)}\phi_1(t)\right)\mathrm{d}t+\sqrt{V^{\Phi}(t)}\mathrm{d}W_1^{\Phi}(t)\right].$$

投资者扣除负债后的净资产为

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y^{\tilde{\Phi},\tilde{\pi}}(t)=\mathrm{d}X^{\tilde{\Phi},\tilde{\pi}}(t)-\mathrm{d}L^{\tilde{\Phi}}(t)\\ \qquad=\left[r\left(Y^{\tilde{\Phi},\tilde{\pi}}(t)+L^{\tilde{\Phi}}(t)\right)+\tilde{\pi}(t)\left(\eta_1V^{\tilde{\Phi}}(t)-\sqrt{V^{\tilde{\Phi}}(t)}\tilde{\phi}_1(t)\right)-L^{\Phi}(t)\times\right.\\ \qquad\left.\left(\mu+\alpha V(t)-\beta_1\tilde{\phi}_1(t)\sqrt{V^{\tilde{\Phi}}(t)}-\beta_2\sqrt{V^{\tilde{\Phi}}(t)}\tilde{\phi}_2(t)-\beta_3\sqrt{V^{\tilde{\Phi}}(t)}\tilde{\phi}_3(t)\right)\right]\mathrm{d}t+\\ \qquad\left[\tilde{\pi}(t)\sqrt{V^{\tilde{\Phi}}(t)}-L^{\tilde{\Phi}}(t)\beta_1\sqrt{V^{\tilde{\Phi}}(t)}\right]\mathrm{d}W_1^{\tilde{\Phi}}(t)-\\ \qquad L^{\tilde{\Phi}}(t)\left[\beta_2\sqrt{V^{\tilde{\Phi}}(t)}\mathrm{d}W_2^{\tilde{\Phi}}(t)+\beta_3\sqrt{V^{\tilde{\Phi}}(t)}\mathrm{d}W_3^{\tilde{\Phi}}(t)\right],\ \ Y^{\tilde{\Phi},\tilde{\pi}}(0)=x_0-l_0>0,\end{cases}$$

其中 $\tilde{\pi}=\{\tilde{\pi}(t)\}_{t\in[0,T]}$, $\tilde{\Phi}:=\left\{\left(\tilde{\phi}_1(t),\tilde{\phi}_2(t),\tilde{\phi}_3(t)\right)\right\}_{t\in[0,T]}$.

最优投资问题为

$$\operatorname*{Sup}_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}}\operatorname*{Inf}_{\tilde{\Phi}\in\tilde{\Theta}}\mathrm{E}^{\tilde{Q}^*}\left[U\left(Y^{\tilde{\Phi},\tilde{\pi}}(T)\right)+\int_0^T\left(\frac{\left(\tilde{\phi}_1(s)\right)^2}{2\tilde{\Psi}_1(t,y,v,l)}+\frac{\left(\tilde{\phi}_2(s)\right)^2}{2\tilde{\Psi}_2(t,y,v,l)}+\frac{\left(\tilde{\phi}_3(s)\right)^2}{2\tilde{\Psi}_3(t,y,v,l)}\right)\mathrm{d}s\right],$$

相应的 HJB 方程为

$$\operatorname*{Sup}_{\tilde{\pi}\in\tilde{\Pi}}\operatorname*{Inf}_{\tilde{\Phi}\in\tilde{\Theta}}\left\{A^{\tilde{\Phi},\tilde{\pi}}\tilde{J}(t,y,v,l)+\frac{\tilde{\phi}_1^2}{2\tilde{\Psi}_1}+\frac{\tilde{\phi}_2^2}{2\tilde{\Psi}_2}+\frac{\tilde{\phi}_3^2}{2\tilde{\Psi}_3}\right\}=0,$$

其中
$$\tilde{\Psi}_1(t,y,v,l)=\frac{\tilde{\beta}_1}{(1-\gamma)\tilde{J}(t,y,v,l)},\ \tilde{\Psi}_2(t,y,v,l)=\frac{\tilde{\beta}_2}{(1-\gamma)\tilde{J}(t,y,v,l)},$$
$$\tilde{\Psi}_3(t,y,v,l)=\frac{\tilde{\beta}_3}{(1-\gamma)\tilde{J}(t,y,v,l)},$$

边界条件为 $\tilde{J}(T,y,v,l)=U(y)$.

为了方便, 将 $\tilde{\pi}(t),\tilde{\phi}(t)=\left(\tilde{\phi}_1(t),\tilde{\phi}_2(t),\tilde{\phi}_3(t)\right)$简记为 $\tilde{\pi},\tilde{\phi}=\left(\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2,\tilde{\phi}_3\right)$, 并且生成元为

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{\tilde{\phi},\tilde{\pi}}\psi(t,y,v,l)=&\psi_t+\Big[r(y+l)+\pi\left(\eta_1 v-\sqrt{v}\tilde{\phi}_1\right)-\\&l\left(\mu+\alpha v-\beta_1\tilde{\phi}_1\sqrt{v}-\beta_2\sqrt{v}\tilde{\phi}_2-\beta_3\sqrt{v}\tilde{\phi}_3\right)\Big]\psi_y+\\&\left[\kappa(\delta-v)-\sigma\sqrt{v}\left(\rho\tilde{\phi}_1+\sqrt{1-\rho^2}\phi_2\right)\right]\psi_v+l\left(\mu+\alpha v-\beta_1\tilde{\phi}_1\sqrt{v}-\beta_2\sqrt{v}\tilde{\phi}_2-\beta_3\sqrt{v}\tilde{\phi}_3\right)\psi_l+\\&\frac{1}{2}v\left(\pi^2+l^2\beta_1^2+l^2\beta_2^2+l^2\beta_3^2-2\pi l\beta_1\right)\psi_{yy}+\frac{1}{2}v\sigma_{\mathrm{V}}^2\psi_{vv}+l\left(\sigma\rho\beta_1+\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)v\psi_{lv}+\frac{1}{2}vl^2\times\\&\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\right)\psi_{ll}+\left(l\beta_1\pi-l^2\beta_1^2-l^2\beta_2^2-l^2\beta_3^2\right)v\psi_{yl}+\left(\sigma\rho\pi-\sigma\rho l\beta_1-l\sigma\sqrt{1-\rho^2}\beta_2\right)v\psi_{yv}.\end{aligned}$$

下面的定理给出了无期权下的鲁棒最优投资策略和最优值函数, 由于定理 2 的证明过程类似于定理 1, 囿于篇幅有限, 此处不再给出详细的证明过程.

定理 2　对于无期权交易时的鲁棒投资策略问题, 最优投资策略为

$$\tilde{\pi}=\frac{\eta_1(1-\gamma)+\sigma\rho\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)\tilde{g}_2(t)}{\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)(1-\gamma)}\left(X^{\pi^*}(t)+\hat{h}(t)\right),$$

相应的值函数为

$$\tilde{J}(t,y,l,v)=\frac{(y+l+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left(\tilde{g}_2(t)v+\hat{g}_2(t)\right),\tag{18}$$

最坏的概率测度为

$$\tilde{\phi}_1=\frac{\tilde{\beta}_1\sqrt{v}\left[\eta_1(1-\gamma)+\sigma\rho\tilde{g}_2\right]}{\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)(1-\gamma)},\ \tilde{\phi}_2=\frac{\tilde{\beta}_2\sqrt{v}\sigma\sqrt{1-\rho^2}\tilde{g}_2}{1-\gamma},\ \tilde{\phi}_3=0,$$

其中
$$\tilde{g}_2=\frac{\tilde{n}_1\tilde{n}_2-\tilde{n}_1\tilde{n}_2\mathrm{e}^{\tilde{a}_2(\tilde{n}_1-\tilde{n}_2)(T-t)}}{\tilde{n}_2-\tilde{n}_1\mathrm{e}^{\tilde{a}_2(\tilde{n}_1-\tilde{n}_2)(T-t)}},\ \hat{g}_2=\int_t^T(\kappa\delta\tilde{g}_2+(1-\gamma)r)\mathrm{d}s,\ \tilde{n}_{1,2}=\frac{\tilde{b}_2\pm\sqrt{\tilde{b}_2^2-4\tilde{a}_2\tilde{c}_2}}{-2\tilde{a}_2},$$
$$\tilde{a}_2=\frac{1}{2}\sigma^2\left[1-\frac{\beta_1\rho^2}{(1-\gamma)}-\frac{\beta_2(1-\rho^2)}{(1-\gamma)}\right]+\frac{\sigma^2\rho^2\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)^2}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)(1-\gamma)},\ \tilde{b}_2=\frac{\left(1-\gamma-\tilde{\beta}_1\right)\eta_1\sigma\rho}{\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}-\kappa,$$
$$\tilde{c}_2=\frac{(1-\gamma)}{2\left(\tilde{\beta}_1+\gamma\right)}\eta_1^2.$$

5 数值模拟

为了分析模型参数对最优投资策略的影响及考虑鲁棒性和期权交易对投资效用的影响, 进行如下的数值模拟, 其中参数取值来自 Zeng 等[16], 具体如表 1 所示.

表 1 参数的取值

Table 1 Values of parameters

$r = 0.05$	$k = 1$	$\sigma = 0.25$	$\rho = -0.4$
$\eta_1 = 4$	$\eta_2 = -6$	$\mu = 0.08$	$\delta = 0.016\,9$
$\lambda_1 = 0.35$	$\lambda_2 = 0.40$	$\xi = 0.20$	$v = 0.022\,5$
γ=4	z =1	$T = 5$	$t = 0$
$\beta_1 = \tilde{\beta}_1 = 0,1$	$\beta_2 = \tilde{\beta}_2 = 0,2$	$\beta_3 = \tilde{\beta}_3 = 0,3$	$l = 1$

5.1 模型参数对鲁棒最优投资策略的影响

下面基于定理 1 主要分析均值回归速率 κ 和波动系数 σ 对投资者鲁棒最优投资策略的影响.

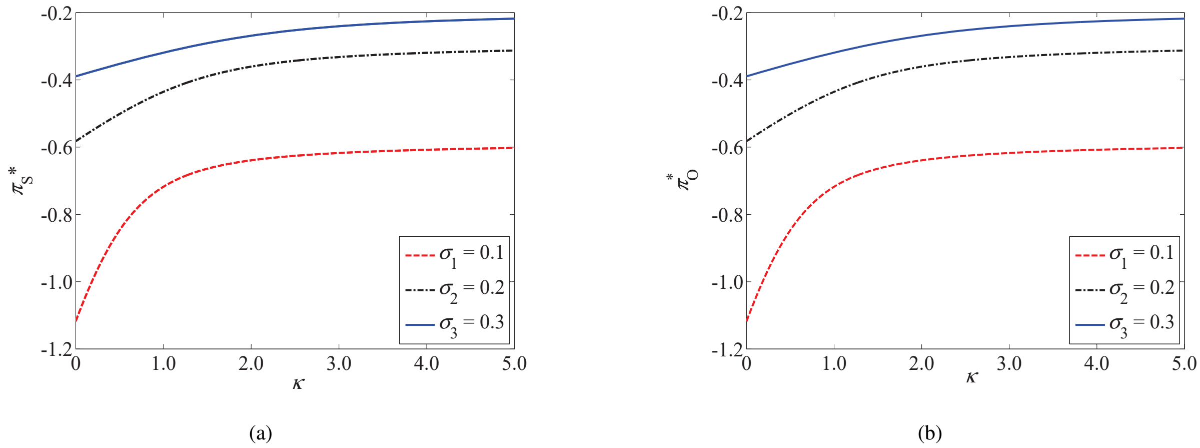

图 1 κ 和 σ 对 π_S^* 和 π_O^* 的影响

Fig. 1 The effects of κ and σ on π_S^* and π_O^*

图 1 描述了股票价格波动的平均回复速率参数 κ 和波动系数 σ 对鲁棒最优投资策略的影响. 首先从图中可以看到, 随着 κ 的增加, π_S^* 和 π_O^* 的绝对值均随之减少. 这是因为 κ为股票价格波动 $V(t)$的平均回复速率, 当 $\rho < 0$ 时, 股票价格波动 $V(t)$与股票价格 $S(t)$ 的运动方向相反, κ 越大, $V(t)$波动的抵消效用就越弱, 则意味着股票的价格波动增加, 投资风险加大, 故投资者会减持股票和衍生期权上的投资份额. 其次, 随着 σ 的增大, π_S^* 和 π_O^* 的绝对值均随之减少, 因为 σ 表示的是股票价格的波动率, σ 增大, $V(t)$ 波动增大, 意味着股票的价格波动增加, 投资风险变大, 故投资者会减持股票和衍生期权上的投资份额.

5.2 效用改善

在这一部分, 将研究鲁棒和期权交易对效用改善的影响, 首先研究鲁棒对投资者效用改善的影响, 然后研究期权交易对投资者效用改善的影响.

对于第一种情形, 主要研究鲁棒对效用改善的影响, 定义效用改善函数为

$$\mathrm{UI}_1(t,y,v,l) = 1 - J(t,y,v,l)/\bar{J}(t,y,v,l) = 1 - \mathrm{e}^{v[\tilde{g}(t)-\tilde{g}_1(t)]+\hat{g}(t)-\hat{g}_1(t)}, \quad (\gamma > 1),$$

其中 $J(t,y,v,l), \bar{J}(t,y,v,l)$如式(6)和式(15)$\sim$式(17)所示.

对于第二种情形, 主要考虑是否要进行期权交易, 定义效用改善函数为

$$\mathrm{UI}_2(t,y,v,l) = 1 - J(t,y,v,l)/\tilde{J}(t,y,v,l) = 1 - \mathrm{e}^{v[\tilde{g}(t)-\tilde{g}_2(t)]+\hat{g}(t)-\hat{g}_2(t)}, \quad (\gamma > 1),$$

其中 $J(t,y,v,l), \tilde{J}(t,y,v,l)$ 如式(6)和式(18)所示.

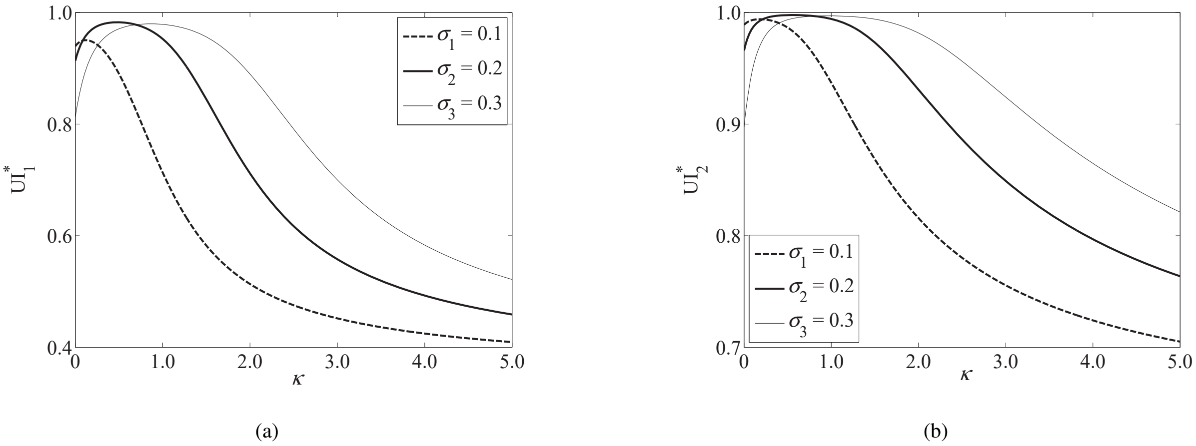

图 2　κ 和 σ 对 UI_1^* 和 UI_2^* 的影响

Fig. 2　The effects of κ and σ on UI_1^* and UI_2^*

图 2 描述了股票价格波动的平均回复速率参数 κ 和波动系数 σ 对投资者效用改善的影响. 首先从图中可以看到, UI_1^* 和 UI_2^* 随着 κ 和 σ 的变化而发生变化, 且其值均大于 0, 说明考虑模型的鲁棒性和期权投资均能增加投资者的效用. 其次, 从图中可以发现, UI_1^* 和 UI_2^* 均随着 κ 的增加而变小, 随着 σ 的增加而增加, 这是因为在股票价格波动过程中, 取值较大的回复速率 κ 和取值较小的波动参数 σ 意味着股票价格波动的不确定性减少, 因此投资者会面临较低的波动率风险, 故投资者的效用改善会随着 κ 的增加和 σ 的减少而变小, 这与 Zeng 等[6] 中的结论是一致的.

6　结束语

本文研究了随机波动率模型下带期权的资产负债管理的鲁棒最优投资策略问题, 其中股票价格服从 Heston 模型, 投资人持模糊风险厌恶态度. 为了应对波动性风险, 投资者将自己的财富投资于期权. 首先, 获得了幂效用准则下带期权的资产负债管理的鲁棒最优投资策略、最坏的概率测度及值函数的解析表达式和特殊情况无风险厌恶态度下的最优投资策略及值函数的解析表达式. 然后, 得出了无期权下鲁棒最优投资策略、最坏的概率测度及值函数的解析表达式. 最后, 模拟了模型中的参数对投资策略和效用改善的影响. 发现, 在资产负债管理的鲁棒最优投资策略中, 有两个因素起着重要作用. 第一个因素是模糊风险规避, 当一个投资者在参考模型中面临模糊风险规避时, 它通常会降低市场回报风险和波动风险的风险敞口, 因为在一个不确定的环境中, 采取保守策略是最优的. 此外, 投资者对股票和期权投资有明显的模糊性. 第二个因素是期权, 期权具有提供频繁交易机会和提高市场效率的便利性质, 期权的投资可能会带来巨大的效用改善.

参考文献:

[1] Liu J, Pan J. Dynamic derivative strategies. Journal of Financial Economics, 2001, 69(3): 401–430.

[2] Hsuku Y H. Dynamic consumption and asset allocation with derivative securities. Quantitative Finance, 2007, 7(2): 137–149.

[3] 傅　毅, 张寄洲, 周　翠. 含有期权的最优投资与比例再保险策略. 系统工程学报, 2015, 30(2): 181–189.
Fu Y, Zhang J Z, Zhou C. Optimal investment and proportional reinsurance strategy with options. Journal of Systems Engnineering, 2015, 30(2): 181–189. (im Chinese)

[4] Fu J, Wei J, Yang H. Portfolio optimization in a regime-switching market with derivatives. European Journal of Operational Research, 2014, 233(1): 184–192.

[5] Escobar M, Ferrando S, Rubtsov A. Robust portfolio choice with derivative trading under stochastic volatility. Journal of Banking & Finance, 2015, 61(12): 142–157.

[6] Zeng Y, Li D, Chen Z, et al. Ambiguity aversion and optimal derivative-based pension investment with stochastic income and volatility. Journal of Economic Dynamics & Control, 2018, 88(3): 70–103.

[7] Li D, Shen Y, Zeng Y. Dynamic derivative-based investment strategy for mean-variance asset-liability management with stochastic volatility. Insurance Mathematics & Economics, 2018, 78: 72–86.

[8] Shen Y, Zeng Y. Optimal investment-reinsurance strategy for mean-variance insurers with square-root factor process. Insurance Mathematics & Economics, 2015, 62(5): 118–137.

[9] Ellsberg D. Risk, Ambiguity, and the savage axioms. Quarterly Journal of Economics, 1961, 75(4): 643–669.

[10] Bossaerts P, Ghirardato P, Guarnaschelli S, et al. Ambiguity in asset markets: Theory and experiment. Review of Financial Studies, 2010, 23(4): 1325–1359.

[11] Dimmock S G, Kouwenberg R, Mitchell O S, et al. Ambiguity aversion and household portfolio choice puzzles: Empirical evidence. Journal of Financial Economics, 2016, 119(3): 559–577.

[12] Branger N, Larsen L S. Robust portfolio choice with uncertainty about jump and diffusion risk. Journal of Banking & Finance, 2013, 37(12): 5036–5047.

[13] Flor C R, Larsen L S. Robust portfolio choice with stochastic interest rates. Annals of Finance, 2014, 10(2): 243–265.

[14] Munk C, Rubtsov A. Portfolio management with stochastic interest rates and inflation ambiguity. Annals of Finance, 2014, 10(3): 419–455.

[15] Yi B, Li Z, Viens F G, et al. Robust optimal control for an insurer with reinsurance and investment under Heston's stochastic volatility model. Insurance Mathematics & Economics, 2013, 53(3): 601–614.

[16] Zeng Y, Li D, Gu A. Robust equilibrium reinsurance-investment strategy for a mean-variance insurer in a model with jumps. Insurance Mathematics & Economics, 2016, 66: 138–152.

[17] Zheng X, Zhou J, Sun Z. Robust optimal portfolio and proportional reinsurance for an insurer under a CEV model. Insurance Mathematics & Economics, 2016, 67: 77–87.

[18] Anderson E W, Hansen L P, Sargent T J. A quartet of semigroups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection. Journal of the European Economic Association, 2003, 1(1): 68–123.

[19] Maenhout P J. Robust portfolio rules and asset pricing. Review of Financial Studies, 2004, 17(4): 951–983.

作者简介:

杨 璐(1989—), 女, 河南周口人, 博士生, 研究方向: 博弈论及其应用, Email: 1032075667@qq.com;

朱怀念(1985—), 男, 安徽蚌埠人, 博士, 副教授, 研究方向: 动态博弈理论, 保险精算, Email: zhuhuainian@gdut.edu.cn;

张成科(1964—), 男, 广西贺州人, 博士, 教授, 研究方向:博弈论及其应用, Email: zhangck@gdut.edu.cn.

第十九届中国运筹学会不确定系统分会年会(USC2021)

2021–07–27～2021–07–31 河南·信阳

第十九届中国运筹学会不确定系统分会年会拟于 2021–07–27～2021–07–31 在河南省信阳市召开.

中国运筹学会不确定系统分会年会主要关注不确定理论及其应用, 围绕不确定分析、不确定规划、不确定过程、不确定可靠性分析、不确定金融、不确定控制列、不确定统计、不确定图及不确定微分方程等方面开展焦点学术研讨.

会议由信阳师范学院陈越奋老师担任会议主席, 诚邀相关领域的国内外专家、学者和研究生报告最新的研究进展. 会前(7 月 25 日～7 月 27 日)拟举办由清华大学刘宝碇教授领衔主讲的不确定理论高级研修班, 研修班旨在提高青年教师和研究生应用不确定理论解决实际问题的能力以及撰写学术论文的水平.

主办者希望学员从中了解当今国际研究热点, 发现新的研究契机. 请感兴趣的老师和同学关注公众号“不确定理论”获得会议最新信息.