

带有环境净化的分数阶Solow模型及动力学分析

李俊瑞, 张艳霞

(西安财经学院统计学院, 陕西 西安 710100)

摘要: 考虑到经济环境系统中的主要指标具有“时间记忆”的特征, 为分析此系统, 提出了带有环境净化的分数阶Solow模型. 采用离散化处理方法求解该模型, 并运用非线性动力学理论、数值模拟和参数分析的方法, 分析了环境污染指数和污染治理强度两个参数对经济环境系统动态演化的影响机理、不同分数阶阶数对模型的动力学行为影响. 结果表明: 分数阶Solow模型对环境污染指数和污染治理强度两个参数具有高度敏感性, 并在临界参数附近发生分岔, 出现了极限环现象, 即经济周期; 同时增加污染治理投资对经济衰退具有一定的遏制作用; 与整数阶相比, 在刻画经济环境系统方面, 分数阶Solow模型具有更强的优势.

关键词: 非线性动力学; 经济环境系统; Solow模型; 分数阶

中图分类号: F224; O313 文献标识码: A 文章编号: 1000-5781(2020)01-0001-12

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2020.01.001

Fractional order Solow model with environmental purification and its dynamic analysis

Li Jiaorui, Zhang Yanxia

(Statistical Institute, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China)

Abstract: Considering the main indexes in the economy-environment system have the characteristics of time memory, a fractional Solow model with environmental purification is put forward in order to analyze the system. Discretization method is presented to solve the model, then nonlinear dynamics theory, numerical simulation and parameter analysis method are implemented to analyze the dynamic evolution mechanism of economy environment system influenced by environmental pollution index and pollution abatement intensity, and to analyze the dynamic behavior influence of different fractional orders on the model. Results show that the fractional order Solow model has so high a sensitivity to environmental pollution index and pollution abatement intensity that bifurcation happens near the critical parameters, then the limit cycles phenomenon, namely economic cycle, appears. Further, increased pollution abatement investment can curb economic recession to some extent. Our fractional order model has more advantages than integer order models in describing the economic environment system.

Key words: nonlinear dynamics; economy-environment system; Solow model; fractional order

1 引言

经济系统是由相互联系、相互作用的若干经济元素结合而成的有机整体. 在处理有关该系统的问题时, 既要考虑其经济效益, 又要考虑其对生态环境的影响. 环境各要素及其相互关系构成环境系统, 虽然该系统

收稿日期: 2017-01-13; 修订日期: 2017-05-27.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11572231); 陕西省教育厅专项科研计划资助项目(16JK1301).

具有一定的自我调节能力,但在很多情况下,其稳定性仍然取决于环境因素与外界进行物质交换和能量流动的容量.环境系统中存在着对外来影响比较敏感的不稳定现象,例如,在一定条件下,某个关键性因子的微小变化就有可能对该系统造成严重后果.在人类历史上,由于人类不合理利用和改造环境而引起环境无情报复的例子数不胜数,随着经济的发展,人类对环境的影响更加深刻.环境系统和经济系统之间一直在不断进行着物质和能量的交换,为了更好地刻画经济系统与环境系统运行的动态演化规律,将经济系统和环境系统融为一体,构成经济环境系统.经济增长一直是宏观经济研究的热点问题之一.然而,伴随着经济的快速增长,环境污染甚至恶化已严重威胁人类社会的发展.鉴于此,本文基于经典的Solow经济增长模型,将环境因素引入到该模型中,同时考虑到经济环境系统中的主要指标具有“时间记忆”的特征,建立了新的带有环境净化的分数阶Solow模型,并通过对模型的动力学分析,揭示了环境污染指数、污染治理强度等参数对经济-环境系统动态演化的影响机理,为政府宏观监控经济环境系统的运行提供了一定的理论依据.

在新古典经济学框架下,Solow模型^[1]作为经济增长模型中著名的模型,常被用来刻画单一的经济系统.模型描述了资本、投资、劳动、储蓄率、技术进步率等因素对经济发展的影响.现有的许多文献^[2-5]对此模型进行了详细的研究.在研究环境因素对经济系统的影响时,已有不少学者尝试对该模型作出改进,即将环境净化因素引入到Solow模型中,从而深入地解释经济环境系统的运行机制.魏立桥等^[6]以Solow模型为基础,研究了带有环境污染的经济增长模型.Antoci等^[7]基于Solow模型研究发现,人口数量的减少有助于经济增长和环境净化.有些学者^[8-11]考虑到系统中存在着大量的随机因素,采用对Solow模型加随机参数的方法进行了进一步的探究.

以上文献未涉及以下三个方面:环境系统对经济系统造成的经济损失问题,分数阶形式模型的研究,以及非线性动力学行为的研究.经济环境系统是包含许多不确定性因素和不可逆性因素的复杂非线性系统,存在整数阶微积分理论不能描述的经济变量的时间记忆性.研究表明^[12-16],许多实际系统可以用分数阶动力系统描述,如金融系统、生物系统、经济系统、神经网络和力学系统等.通常情况下,对分数阶系统的研究,大都通过数值模拟相轨图、时间序列图及分岔图,描述其复杂的非线性动力学行为.分数阶系统对历史数据具有强大的记忆功能,较整数阶系统更能反映实际系统运行的真实状况.经济系统中诸多非线性因素相互作用引起的波动,可能会导致系统出现经济周期现象.文献^[17-19]提出采用非线性动力学方法可深入研究非线性系统等复杂问题.所以,本文拟解决的问题如下:1)如何更真实地刻画经济环境系统运行的动态演化规律问题;2)如何分析该复杂系统的动力学行为问题;3)该系统的动力学行为所体现的经济含义问题.

基于经典的Solow模型,本文首次提出带有环境净化的分数阶Solow模型.与以往研究相比,内容有如下四点不同之处:1)以往只是单纯的研究经济系统,这里将其与环境系统融为一体,并以全局动态分析的角度引入环境净化因素,实现模型的优化;2)首次引入分数阶项;3)对不易求解的分数阶系统,采用离散化处理方法;4)采用非线性动力学方法,得出新的研究结论,更深入地揭示了经济环境系统的本质特征及其复杂动力学行为.研究表明:1)分数阶Solow模型对某些参数具有高度敏感性,在临界参数附近发生分岔,进一步出现极限环现象,即经济周期;2)增加污染治理投资对经济衰退具有一定的遏制作用,但污染治理投资并非越大越好,依据边际效应先上升后下降的原理,通过优化参数,可改进经济环境系统;3)分数阶Solow模型对历史数据具有的时间记忆性,使其较整数阶Solow模型更加接近系统运行的动态演化规律,辅以非线性动力学方法,将复杂的经济环境系统刻画得更贴切实际.

2 带有环境净化的分数阶Solow模型

考虑一经济环境系统,由经济和环境两个子系统组成,两个子系统通过物质和能量的交换运行,经济系统在资本的累积过程中产生污染,排放到环境系统中,增加了环境污染物的存量,而环境系统中积累的污染物,反过来对经济系统造成经济损失,抑制资本的积累;环境系统造成的污染经济损失刺激经济系统投入污染治理投资,去除部分污染量,减少环境系统中环境污染物的存量,从而反过来减少了环境系统对经济系统

造成的污染经济损失. 与传统的经济系统不同, 该系统是基于经典的Solow模型, 引入环境净化因素, 从而将经济系统和环境系统合成为一个系统. 鉴于涉及字母符号较多, 为便于理解, 其含义所述见表1.

表 1 所用各符号的含义
Table 1 The meaning of the signs

符号	含义	符号	含义	符号	含义
K	生产资本	Z	废弃物污染量	i	污染治理投资的响应程度
P	污染物存量	s	储蓄率	ϵ	环境污染指数
Y	经济总产量	G	污染经济损失	α	分数阶阶数
E	污染治理投资	L	劳动力	θ	生产资本的损耗率
C	消费品量	A	综合技术进步水平	q	参数 $q > 1$
R	去除的污染量	γ	环境净化能力	β	参数 $0 < \beta < 1$

考虑的带有环境净化的经济环境系统中, 主要通过研究经济系统中的生产资本 $K(t)$ 和环境系统中的污染物存量 $P(t)$ 随时间 t 的演化规律, 揭示经济环境系统的运行本质. 为简单记, 省略 t , 即将 $K(t)$ 简记为 K 、 $P(t)$ 简记为 P , 其他变量同此记法. 令污染治理投资为 E , 消费为 C ; 经过污染治理, 去除的污染量为 R ; 在环境系统中, 污染物存量 P 的影响因素主要来自资本累积过程中产生的污染量 Z 、污染治理去除掉的污染量 R 和环境的自然净化量 γ . 污染物存量 P 对经济系统造成的经济损失量为 G .

生产函数 $F(K, L)$ 主要刻画一定时期内, 在技术水平不变的情况下, 生产资本 K 、劳动力 L 的投入量与经济总产量 Y 之间的关系. 这里的生产函数仍采用新古典Cobb-Douglas生产函数, 与诸多文献中^[8,9]刻画传统经济系统的经典Solow模型采用的生产函数一致, 其形式如下

$$Y = F(K, L) = AK^\beta L^{1-\beta}, \quad (1)$$

其中 A 表示综合技术进步水平, K 是生产资本的投入, L 是生产中劳动力的投入, β 是参数, $0 < \beta < 1$.

污染治理投资 E 与环境污染造成的经济损失 G 有直接的响应关系, 污染经济损失越大, 则响应的污染治理投资就越大, 二者关系如下

$$E = iG, \quad (2)$$

其中 $i > 0$, 表示污染治理投资的响应程度, 即污染治理强度, 污染治理投资的多少集中体现在参数 i 的大小上, 这里的参数 i 综合了各种经济、环境治理和投资政策因素.

废弃物污染量 Z 与经济总产量 Y 有直接的关系, 根据EKC理论^[20], Z 与 Y 两者呈倒“U”型, 在起始阶段, 经济的高速发展产生大量的污染排放, Z 随着 Y 的增加而增加. 当 Y 达到一定程度后, 由于经济结构模式的优化和清洁环境技术的提高, 随 Y 的增加, Z 增加的速度变缓, 直至为零. 之后, Z 随着 Y 的增加而减少. 废弃物污染量 Z 与经济总产量 Y 之间的关系如下

$$Z(Y) = \epsilon Y e^{-\lambda Y}, \quad (3)$$

其中 ϵ, λ 为参数, 均大于0. 这里称 ϵ 为环境污染指数, 表示环境污染的严重程度. 环境系统中的污染物存量随 ϵ 增大. 污染物存量越大, 环境污染越严重.

去除的污染量 R 与污染治理投资 E 、废弃物污染量 Z 有关. 增大污染治理投资 E , 去除的污染量 R 逐渐增大, 如果污染治理投资 E 无穷大, 那么去除的污染量 R 逐渐趋于废弃物污染量 Z , 即去除掉所有污染物. 这里, 定义一个污染治理函数 $R(Z, E)$, 用以描述去除的污染量 R 与污染治理投资 E 、废弃物污染量 Z 之间的关系, 假定其函数形式^[21]为

$$R(Z, E) = ZE/(E + \omega Z), \quad (4)$$

其中 ω 为参数. 若 $E \ll \omega Z$, 则 $R \approx E/\omega$, 即近似为线性函数; 若 $E = \omega Z$, 则 $R = Z/2$, 表示废弃物污染量减半; 如果 $E \gg \omega Z$, 则有 $R \approx Z$, 表示废弃物污染物几乎被全部去除.

函数 $\gamma(P)$ 表示污染的自然净化量,具有较强的非线性特征.环境净化能力 γ 与环境污染物存量 P 有关,当环境污染物存量处于较低状态时,环境系统的自我净化能力较强;当环境污染物存量达到一定的上限,环境的自我净化能力则会逐渐减弱.这种特征可以用Hill函数^[21]来进行刻画.形式如下

$$\gamma(P) = \delta P D^q / (P^q + D^q), \quad (5)$$

其中 δ, q, D 为参数,且 $q > 1$.

利用MATLAB数值模拟,得到 $\gamma(P)$ 函数走势图,如图1所示.如果 $P \ll D$,有 $\gamma(P) \approx \delta P$,即 $\gamma(P)$ 近似为 P 的线性函数;如果 $P = D$,有 $\gamma(P) = \delta D/2$,即可净化掉 $\delta D/2$ 的污染物;如果 $P \gg D$,则有 $\gamma(P) \approx 0$,即失去环境净化能力.

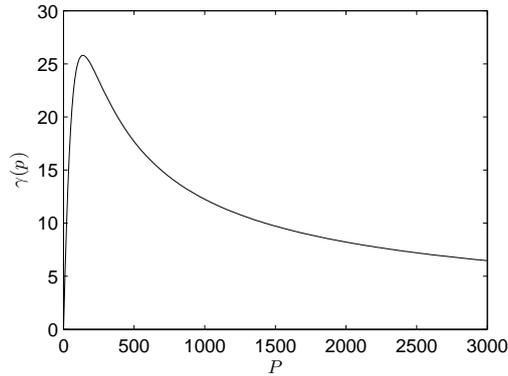


图1 环境净化函数走势图,其中 $\delta=0.5, D=100, q=1.6$

Fig. 1 The trend plot of the environmental purification function with $\delta=0.5, D=100, q=1.6$

污染经济损失 G 与环境净化能力相关,根据文献[21],假设其正比于非线性环境净化能力与线性净化能力的差值,污染经济损失函数为

$$G(Y, P) = lY P^{q+1} / (P^q + D^q), \quad (6)$$

其中 l 为参数.

为刻画带有环境净化的经济环境系统,用 $\frac{dK(t)}{dt}$ 表示 t 时刻生产资本量的变化率,描述了经济系统的变化,用 $\frac{dP(t)}{dt}$ 表示 t 时刻环境污染物存量的变化率,描述了环境系统的变化.

在经济环境系统运行中,生产资本量 $K(t)$ 和环境污染物存量 $P(t)$ 都具有一定的经济“惯性”, t 时刻的量不仅受到 $t-1$ 时刻的影响,而且还受到 $t-2, t-3, \dots$ 等各期的影响,只是随着时间的前移,影响逐渐衰弱.这两个变量的这一特征与离散化的分数阶导数的特征是一致的,因此,引入分数阶导数能够较好地在全局描述系统的历史依赖性.根据不同的分数阶定义,Caputo型^[22]分数阶微积分定义物理意义更加明确,并且便于数学上的处理,因此本文引入了Caputo型分数阶形式对模型进行改进.

生产资本量 $K(t)$ 的变化包括投资量 sY 的增加、污染造成的经济损失 G 和生产资本 K 的损耗.根据Caputo分数阶微积分定义,经济系统的演化方程如下

$$\frac{d^\alpha K(t)}{dt^\alpha} = sY(t) - G(Y(t), P(t)) - \theta K(t). \quad (7)$$

环境污染物存量 $P(t)$ 的变化包括废弃物污染量 Z 的输入、污染治理投资污染物的去除 R 和环境污染物的净化量 γ .根据Caputo分数阶微积分定义,环境系统的演化方程如下

$$\frac{d^\alpha P(t)}{dt^\alpha} = Z(Y(t)) - R(Z(t), E(t)) - \gamma(P(t)). \quad (8)$$

因此,结合式(7)和式(8)得到了刻画带有环境净化的经济环境系统的模型,称之为带有环境净化的分数

阶Solow模型

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha K(t)}{dt^\alpha} = sY(t) - G(Y(t), P(t)) - \theta K(t) \\ \frac{d^\alpha P(t)}{dt^\alpha} = Z(Y(t)) - R(Z(t), E(t)) - \gamma(P(t)), \end{cases} \quad (9)$$

其中 s 表示储蓄率, $0 \leq s \leq 1$, θ 表示生产资本的损耗率, $0 < \theta < 1$, α 为分数阶阶数, 且 $\alpha > 0$.

此模型与经典的Solow模型有以下不同: 1) 当污染经济损失 $G = 0$ 时, 经济系统的变化式子(7)则为经典的Solow模型, 即 $\frac{dK(t)}{dt} = sY(t) - \theta K(t)$. 2) 考虑到经济系统和环境系统之间的相互影响, 基于经典的Solow模型, 引入环境净化, 进而给出环境系统变化的式子(8), 从而将其改进为带有环境净化的Solow模型. 3) 考虑到经济环境系统中变量的长时间记忆性, 首次把分数阶微积分理论引入到Solow模型中, 从而将其推广到分数阶领域, 最终建立带有环境净化的分数阶Solow模型.

3 带有环境净化的分数阶Solow模型的离散化处理

由于带有环境净化的分数阶Solow模型(9)是一个十分复杂的非线性的连续性系统, 并且是分数阶形式下的模型, 不易求出其解析解. 因此, 为了得到其数值解, 这里对其进行离散化处理.

首先, 将式(1)~式(6)的函数形式代入到分数阶模型(9)中, 则带有环境净化的分数阶Solow模型(9)的数学表达式描述如下

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha K(t)}{dt^\alpha} = sAK^\beta L^{1-\beta} - lAK^\beta L^{1-\beta} P^{q+1}/(P^d + D^q) - \theta K \\ \frac{d^\alpha P(t)}{dt^\alpha} = \epsilon AK^\beta L^{1-\beta} e^{-\lambda AK^\beta L^{1-\beta}} - \left[\epsilon AK^\beta L^{1-\beta} e^{-\lambda AK^\beta L^{1-\beta}} \cdot ilAK^\beta L^{1-\beta} P^{q+1}/(P^d + D^q) \right] / \\ \left[ilAK^\beta L^{1-\beta} P^{q+1}/(P^q + D^q) + \omega \epsilon AK^\beta L^{1-\beta} e^{-\lambda AK^\beta L^{1-\beta}} \right] - \delta PD^q/(P^q + D^q). \end{cases} \quad (10)$$

为便于离散化处理模型(10), 模型的右端采用如下简记形式, 令

$$f(K(t), P(t)) = sAK^\beta L^{1-\beta} - lAK^\beta L^{1-\beta} P^{q+1}/(P^d + D^q) - \theta K,$$

$$g(K(t), P(t)) = \epsilon AK^\beta L^{1-\beta} e^{-\lambda AK^\beta L^{1-\beta}} - \left[\epsilon AK^\beta L^{1-\beta} e^{-\lambda AK^\beta L^{1-\beta}} \cdot ilAK^\beta L^{1-\beta} P^{q+1}/(P^d + D^q) \right] / \left[ilAK^\beta L^{1-\beta} P^{q+1}/(P^d + D^q) + \omega \epsilon AK^\beta L^{1-\beta} e^{-\lambda AK^\beta L^{1-\beta}} \right] - \delta PD^q/(P^q + D^q),$$

因此, 模型(10)可简记为如下形式

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha K(t)}{dt^\alpha} = f(K(t), P(t)) \\ \frac{d^\alpha P(t)}{dt^\alpha} = g(K(t), P(t)). \end{cases} \quad (11)$$

根据Caputo分数阶微积分定义, 为得到其积分形式, 令初值为 (K_0, P_0) , 且 $K^{(i)}(0) = K_0^{(i)}$, $P^{(i)}(0) = P_0^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. 则式(11)等价的积分方程为

$$\begin{cases} K(t) = \sum_{i=0}^{n-1} K_0^{(i)} \frac{t^i}{i!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(K(\tau), P(\tau)) d\tau \\ P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_0^{(i)} \frac{t^i}{i!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(K(\tau), P(\tau)) d\tau. \end{cases} \quad (12)$$

令 $h = T/N$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, T 是采样时间, 对式(12)离散化处理, 得

$$\begin{cases} K_h(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} K_0^{(i)} \frac{t^i}{i!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[f(K_h^\rho(t_{n+1}), P_h^\rho(t_{n+1})) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(K_h(t_j), P_h(t_j)) \right] \\ P_h(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} P_0^{(i)} \frac{t^i}{i!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[g(K_h^\rho(t_{n+1}), P_h^\rho(t_{n+1})) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} g(K_h(t_j), P_h(t_j)) \right], \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} K_h^\rho(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} K_0^{(i)} \frac{t^i}{i!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(K_h(t_j), P_h(t_j)) \\ P_h^\rho(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} P_0^{(i)} \frac{t^i}{i!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(K_h(t_j), P_h(t_j)), \end{cases} \quad (14)$$

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1, \end{cases} \quad (15)$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha), 0 \leq j \leq n, \quad (16)$$

$$\rho = \min(2, 1 + \alpha). \quad (17)$$

则误差估计为

$$\max_{0 \leq n \leq N} |K(t_n) - K_h(t_n)| = O(h^\rho), \quad (18)$$

$$\max_{0 \leq n \leq N} |P(t_n) - P_h(t_n)| = O(h^\rho). \quad (19)$$

因此, 得到如下带有环境净化的分数阶Solow模型的离散化形式

$$\begin{cases} K_{n+1} = K_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[sAK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta} - lAK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta} P_{n+1}^{\rho(q+1)} / (P_{n+1}^{\rho d} + D^q) - \theta K_{n+1}^\rho + \right. \\ \left. \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} (sAK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta} - lAK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta} P_j^{\rho(q+1)} / (P_j^d + D^q) - \theta K_j) \right] \\ P_{n+1} = P_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\epsilon AK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta} e^{-\lambda AK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta}} - (\epsilon AK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta} e^{-\lambda AK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta}} \cdot \right. \\ \left. ilAK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta} P_{n+1}^{\rho(q+1)} / (P_{n+1}^{\rho d} + D^q) \right) / (ilAK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta} P_{n+1}^{\rho(q+1)} / (P_{n+1}^{\rho d} + D^q) + \\ \left. \omega \epsilon AK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta} e^{-\lambda AK_{n+1}^{\rho\beta} L^{1-\beta}}) - \delta P_{n+1}^\rho D^q / (P_{n+1}^{\rho q} + D^q) + \right. \\ \left. \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} (\epsilon AK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta} e^{-\lambda AK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta}} - (\epsilon AK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta} e^{-\lambda AK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta}} ilAK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta} P_j^{\rho(q+1)} / (P_j^d + D^q)) / \right. \\ \left. (ilAK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta} P_j^{\rho(q+1)} / (P_j^d + D^q) + \omega \epsilon AK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta} e^{-\lambda AK_j^{\rho\beta} L^{1-\beta}}) - \delta P_j^\rho D^q / (P_j^{\rho q} + D^q) \right) \Big], \end{cases} \quad (20)$$

其中 $A, \beta, L, s, l, \theta, D, \lambda, \delta, q, \epsilon, i, \omega$ 均为模型参数, $\rho = \min(2, 1 + \alpha)$.

对于式(20), 设定参数值后, 只要赋予模型初值和任意分数阶阶数 α 就可运用Fortran软件编程求得分数阶Solow模型的数值解.

4 带有环境净化的分数阶Solow模型的动力学分析

本节主要从三个角度研究带有环境净化的分数阶Solow模型的动力学行为, 一是在给定分数阶阶数下, 不考虑污染治理投资时, 研究环境污染导致经济衰退并伴随经济周期波动的可能性及影响机制; 二是在给定分数阶阶数下, 研究污染治理投资对经济衰退和周期波动的影响; 三是研究分数阶阶数对模型的动力学行为影响. 根据分数阶Solow模型的离散化形式, 利用Fortran软件求得模型的数值解, 并利用MATLAB软件绘制仿真相图、时间序列图、最大Lyapunov指数图等, 从而更深入地刻画经济环境系统的本质特征.

4.1 无污染治理投资时模型的动力学行为

无污染治理投资时, 鉴于环境污染的严重程度主要体现在环境污染指数 ϵ 上, 所以本节通过分析参数 ϵ 对分数阶Solow模型的影响, 研究该模型的动力学行为. 在无污染治理投资时, 即 $E = 0$ 时, 利用污染治理投资去除的污染量 $R(Z, E) = 0$. 由式(9)和式(3)可知, 环境系统中的污染物存量的大小与参数 ϵ 值的正相关性显著. 采用模型的离散化形式(20), 近似刻画模型(9)随参数 ϵ 变化而逐渐演化的动态行为.

设定参数 $A=0.333, \beta=0.6, L=1, s=0.3, l=0.0015, \theta=0.01, D=100, \lambda=0.2, \delta=0.5, q=1.6, \alpha=0.9$, 并设初值 $K(0) = 3, P(0) = 3$. 为力求贴合实际, 这里基本参数的取值来自于相关文献^[21]的研究.

运用MATLAB软件调用模型数值解绘制仿真图, 分别得到模型(9)的相图, 时间序列图和最大Lyapunov指数图, 如图2~图4所示.

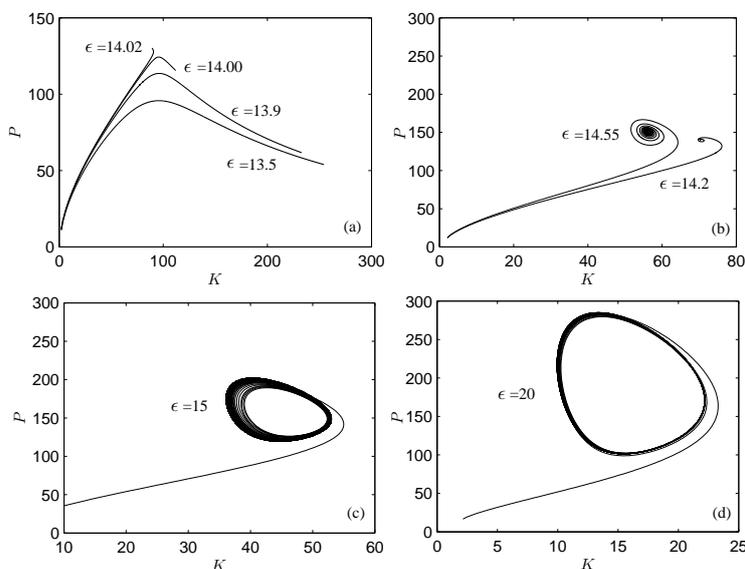


图 2 模型(9)随 ϵ 变化的 K - P 相图

Fig. 2 K - P phase plot of model (9) with ϵ variation

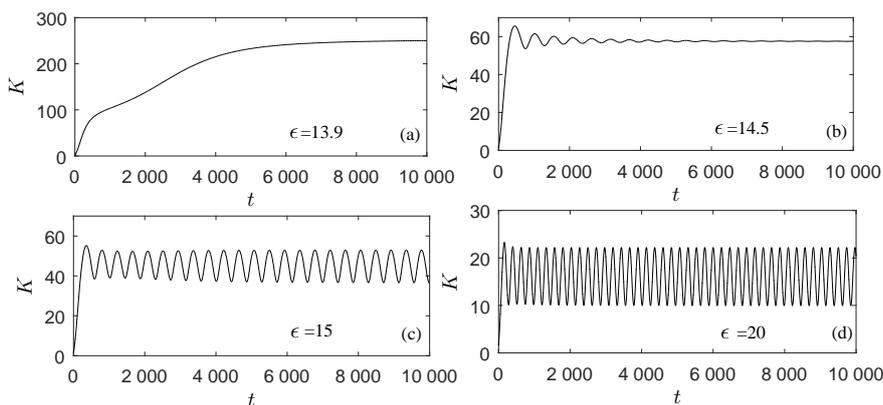


图 3 模型(9)随 ϵ 变化的时间序列图

Fig. 3 The time series plot of model (9) with ϵ variation

图2显示模型(9)随参数 ϵ 变化的 K - P 相图, (a)~(d)中参数 ϵ 取值逐渐增大. 图3显示模型(9)随参数 ϵ 变化的时间序列图, 这里只给出了 K 的时间序列图, 即在参数 ϵ 取不同值时, K 随时间演化的时间序列图, (a)~(d)中参数 ϵ 取值逐渐增大. 由于仅从 K - P 相图和 K 的时间序列图就能分析系统的动力学行为, 并且 P 的时间序列图的波动性与 K 相似, 所以这里不再给出 P 的时间序列图, 下同. 图2和图3所示, 模型(9)存在临界点 $\epsilon_0 \approx 14.01$, 在临界点 ϵ_0 附近, 系统的动态演化行为对参数 ϵ 非常敏感, 发生了分岔. 当 $\epsilon < \epsilon_0$ 时, P

先增加后下降, K 持续增加, 模型稳定, 即经济环境系统稳定发展; 当 $\epsilon > \epsilon_0$ 时, 模型出现不稳定状态, 从经济角度上看, 就是这种不稳定状态导致了经济系统的波动, 环境污染指数 ϵ 越大, 系统波动越明显. 当 $\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_a$ ($\epsilon_a \approx 14.55$)时, 系统的波动程度随时间的演化逐渐减弱, 最终演化为新稳定状态, 但是相对 $\epsilon < \epsilon_0$ 的稳定状态来看, 系统仍存在一定程度的经济衰退现象; 当 $\epsilon > \epsilon_a$ 时, 系统的不稳定状态随时间的演化出现极限环现象, 即经济周期, 这与真实的经济系统表现一致, 在“繁荣-衰退-萧条-复苏-繁荣”的循环中不断变化; 在无污染治理投资时, 经济系统被动地承受来自环境系统造成的经济损失, 当污染物存量达到经济系统不能承受的范围时, 经济环境系统严重失衡, 从而导致经济衰退; 参数 ϵ 越大, 则波动周期越短, 经济周期波动越强烈, 即环境污染指数越大, 则经济衰退越严重.

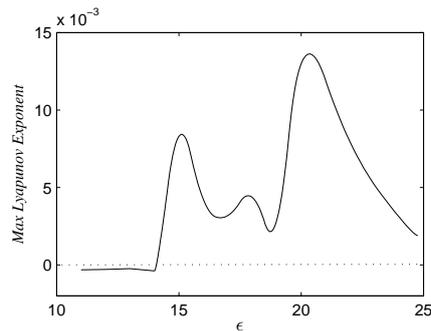


图4 模型(9)的最大Lyapunov指数

Fig. 4 Maximal Lyapunov exponent of model (9)

图4显示模型的最大Lyapunov指数. 当 $\epsilon < \epsilon_0$ 时, 模型的最大Lyapunov指数小于0; 当 $\epsilon > \epsilon_0$ 时, 模型的最大Lyapunov指数大于0, 恰好也反映出系统的不稳定现象.

4.2 有污染治理投资时模型的动力学行为

有污染治理投资时, 鉴于污染治理投资对污染经济损失的响应程度体现在污染治理强度 i 上, 参数 i 越大表示污染治理投资越多, 所以本节通过分析污染治理强度 i 对分数阶Solow模型的影响, 研究该模型的动力学行为.

考虑污染治理投资时, 即 $E \neq 0$ 时, 利用污染治理投资去除的污染量 $R(Z, E) \neq 0$. 设定参数 $\epsilon=20$, $\omega=0.2$, 其他参数同上. 对于 $\epsilon \approx 20 \gg \epsilon_0$ 时经济严重衰退的危险系统, 本节采用模型的离散化形式(20), 近似刻画模型(9)随参数 i 演化的动力学行为, 并分析适当的污染治理投资策略能否避免经济周期中的经济衰退问题. 运用MATLAB软件调用模型数值解绘制仿真图, 分别得到模型(9)的相图, 时间序列图, 如图5~图7所示.

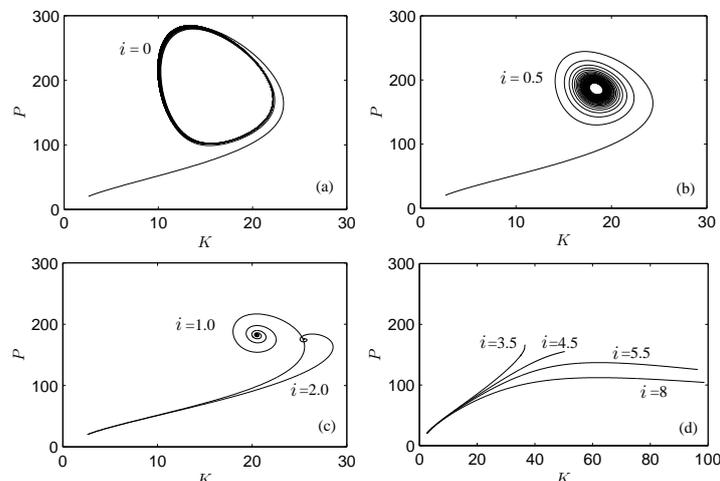


图5 模型(9)随 i 变化的 K - P 相图

Fig. 5 K - P phase plot of model (9) with i variation

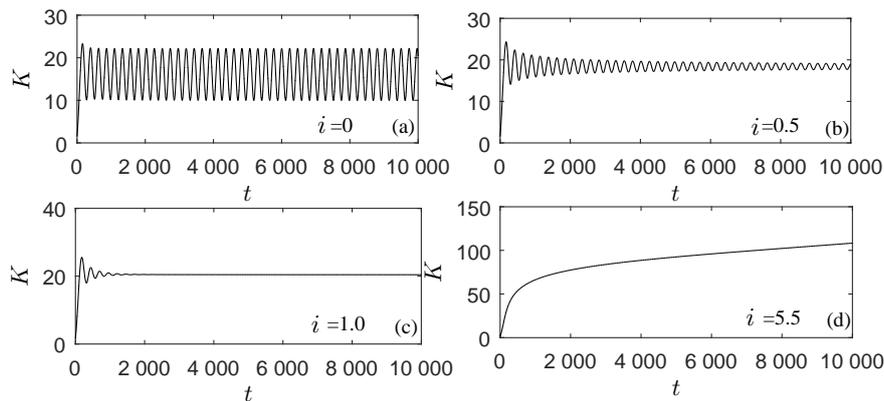
图 6 模型(9)随*i*变化的时间序列图Fig. 6 The time series plot of model (9) with i variation

图5显示模型(9)随参数*i*变化的*K-P*相图, (a)~(d)中参数*i*取值逐渐增大. 图6显示模型(9)随参数*i*变化的时间序列图, (a)~(d)中参数*i*取值逐渐增大. 图5和图6所示, 模型(9)存在临界点 $i_0 \approx 4.0$, 在临界点 i_0 附近, 经济环境系统的动力学行为对*i*具有较强的敏感性, 出现分岔现象. 图形表明: 当 $i < i_0$ 时, *K-P*相图呈极限环状态, 即系统仍存在长时间的经济衰退现象; 当 $i > i_0$ 时, *P*先增加后下降, *K*持续增加, 模型处于安全的稳定状态, 即经济环境系统稳定发展. 随着参数*i*的增大, 经济周期极限环逐渐减小, 最终趋于某定态, 直到 $i > i_0$ 时, 经济才得以平稳发展, 所以通过增加污染治理投资避免经济衰退. 从经济角度上看, 污染治理强度*i*越大, 则由环境污染造成的经济损失越少; 经济损失的减少使得生产资本增多, 经济得到发展; 随着时间的演化, 系统波动程度逐渐减弱, 从而经济环境系统稳定发展.

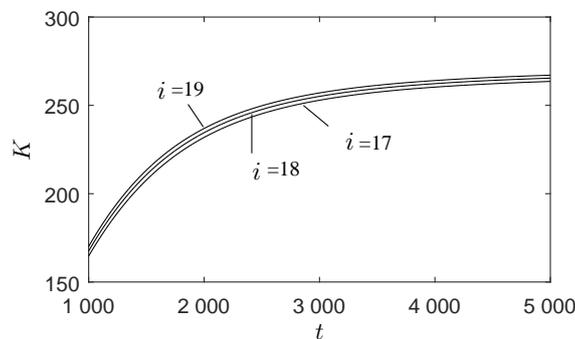
图 7 参数*i*在*i_u*附近的时间历程图Fig. 7 The time series plot with parameter i in the vicinity of i_u

图7显示参数*i*在 i_u 附近的时间历程图, i_u 为参数*i*的最优值. 通过图5与图6的分析得知, 增加参数*i*值可避免经济衰退现象, *i*值的少量增加可促进经济总产量大幅度的提高, 特别是在临界点 i_0 附近, 促进作用更为明显. 然而, 当 $i > i_0$ 时, 其边际效应随着*i*值的增加而逐渐减弱, *i*值过高甚至会抑制经济总产量的增加. 所以污染治理投资并非越大越好, 适度的污染治理投资可以促进经济的发展, 但过度的污染治理投资会减少生产资本的投资, 抑制经济的发展. 图7显示参数*i*=17、*i*=18和*i*=19的时间序列图, 三条曲线十分相近几乎重合. 分析表明: 对于 $\epsilon \approx 20 \gg \epsilon_0$ 时经济严重衰退的危险系统, 污染治理强度*i*存在最优值 $i_u \approx 18$; 在最优值 i_u 附近, 分数阶模型(9)的动力学行为对*i*不敏感, 其不敏感性说明, 通过优化参数*i*可优化经济环境系统, 从而使经济-环境协调发展.

4.3 不同分数阶阶数下分数阶Solow模型的动力学行为

本节通过数值模拟, 分析分数阶阶数的大小对分数阶Solow模型的动力学行为影响.

分数阶阶数 α 分别选取1, 0.9, 0.85, 采用模型的离散化形式(20)近似刻画模型(9), 并运用MATLAB软件绘制仿真图, 得到模型(9)在不同分数阶阶数下的相图、时间序列图, 如图8~图11所示.

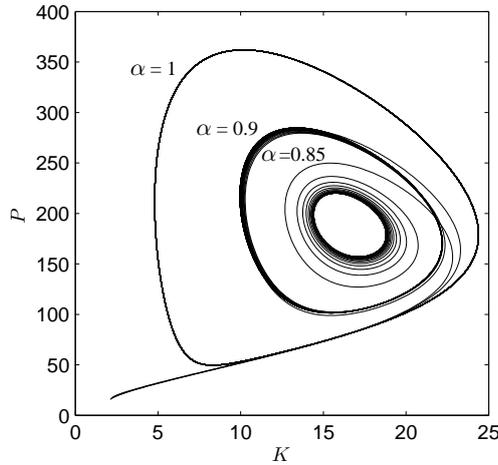


图 8 模型(9)在不同分数阶阶数下的K-P相图

Fig. 8 K-P phase plot of model (9) under different fractional orders

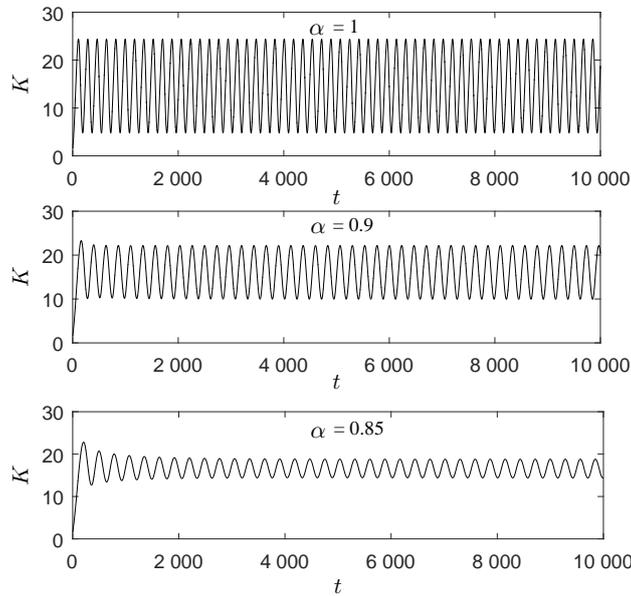


图 9 模型(9)在不同分数阶阶数下的时间序列图

Fig. 9 The time series plot of model (9) under different fractional orders

无污染治理投资时, $R(Z, E)=0$. 对于模型(9), 选取 $\epsilon=20$ 时的经济周期, 其他参数不变, 图8显示模型(9)在分数阶阶数 α 分别选取1, 0.9, 0.85时的K-P相图, 图9显示模型(9)在分数阶阶数 α 分别选取1, 0.9, 0.85时的时间序列图. 分析表明, 阶数 α 越小, 则经济周期极限环越小, 并且波动周期越长, 表明经济波动较平稳.

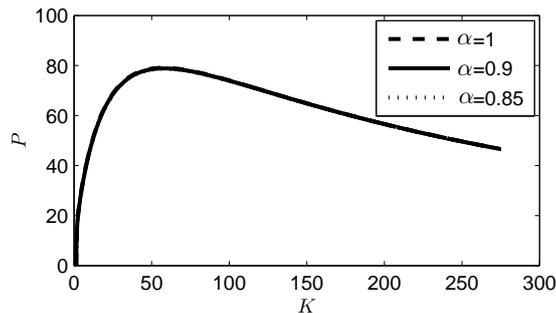


图 10 模型(9)在不同分数阶阶数下的K-P相图

Fig. 10 K-P phase plot of model (9) under different fractional orders

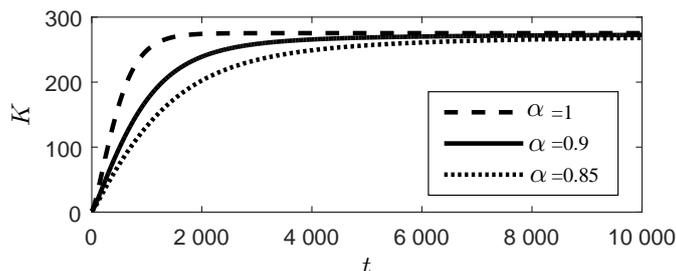


图 11 模型(9)在不同分数阶阶数下的时间序列图

Fig. 11 The time series plot of model (9) under different fractional orders

有污染治理投资时, $R(Z, E) \neq 0$. 取参数 $i=18$, 其他参数不变. 图10显示模型(9)在分数阶阶数 α 分别选取 1, 0.9, 0.85 时的 $K-P$ 相图; 图11显示模型(9)在分数阶阶数 α 分别选取 1, 0.9, 0.85 时的时间序列图. 图10和图11表明: 加强污染治理投资程度, 三个不同分数阶阶数下的系统均可避免经济衰退现象, 并且相轨图十分接近几乎重合; 时间历程图显示, 分数阶阶数越小, 则刻画的经济系统中经济发展表现得越缓慢, 但最终都达到相同的高度, 这说明分数阶具有滞后性, 且阶数越小, 滞后性则越强.

相对整数阶系统而言, 分数阶微积分系统具有强大的信息记忆功能. 在经济环境系统中, 存在很多具有长时间记忆性的变量, 比如储蓄率、利率、国内生产总值以及环境自净能力等, 这些变量的波动对经济的发展走势产生巨大的影响, 并且系统内部存在着复杂的非线性特征, 运用整数阶模型并不能反映系统运行的真实状况, 而采用分数阶模型可将此复杂的非线性系统刻画得更加逼真.

5 结束语

本文分析了带有环境净化的经济环境系统, 基于经典的Solow模型, 引入环境净化及分数阶项, 首次提出带有环境净化的分数阶Solow模型, 并采用离散化处理方法及非线性动力学方法, 通过数值模拟和参数分析, 研究了带有环境净化的分数阶Solow模型的动态行为.

研究表明: 模型对环境污染指数和污染治理强度具有很强的敏感性, 并在相应临界点处发生分岔, 出现极限环现象, 形成经济周期; 增大污染治理投资可避免经济衰退现象, 通过优化污染治理强度可达到改进经济环境系统的目的; 同时分数阶模型所具有的记忆性和滞后性, 为深入研究复杂非线性系统的动力学行为奠定了理论基础.

本文仅研究了分数阶Solow模型在分数阶形式下的确定性模型, 考虑到复杂的经济环境系统中含有大量随机因素, 未来将尝试对其分数阶随机性模型作进一步研究, 即同时引入分数阶项和随机参数, 建立分数阶随机性模型, 此模型可将复杂的非线性系统刻画的更加逼真.

参考文献:

- [1] Hritonenko N, Yatsenko Y. *Mathematical Modeling in Economics, Ecology and the Environment*. London: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [2] Stamova I M, Stamov A G. Impulsive control on the asymptotic stability of the solutions of a Solow model with endogenous labor growth. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(8): 2707–2716.
- [3] Georgios K. Land and population growth in the Solow growth model: Some empirical evidence. *Economics Letters*, 2010, 109(2): 66–68.
- [4] Luca G. The Solow-swan model with a bounded population growth rate. *Journal of Mathematical Economics*, 2006, 42(1): 14–21.
- [5] 唐斌兵. 基于变动人口的Solow模型. *数学理论与应用*, 2002, 22(1): 113–118.
Tang B B. Solow model with variable population. *Mathematical Theory and Applications*, 2002, 22(1): 113–118. (in Chinese)

- [6] 魏立桥, 赵晓娜, 景文宏. 基于环境污染的经济增长模型. 软科学, 2008, 22(2): 54–56.
Wei L Q, Zhao X N, Jing W H. Economic growth model based on environmental pollution. *Soft Science*, 2008, 22(2): 54–56. (in Chinese)
- [7] Angelo A, Paolo R, Serena S, et al. Industrialization and environmental externalities in a Solow-type model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2014, 47(6): 211–224.
- [8] 吴付科, 胡适耕. 连续随机Solow模型的渐近性质. 应用概率统计, 2009, 25(6): 571–577.
Wu F K, Hu S G. Some asymptotic properties of the continuous-time stochastic Solow model. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2009, 25(6): 571–577. (in Chinese)
- [9] Lei D X, Huang Y Z. Stationary distribution of stochastic Solow model. *Mathematica Application*, 2014, 27(4): 775–778.
- [10] 张屹山, 田 萍. 随机Solow-Swan模型的基本公式及相对稳定性. 数量经济技术经济研究, 2003, 20(10): 27–32.
Zhang Q S, Tian P. The basic formula and relative stability of stochastic Solow-Swan model. *Journal of Quantitative and Technical Economics*, 2003, 20(10): 27–32. (in Chinese)
- [11] 李俊瑞, 张艳霞. 带有环境净化的双随机参数Solow模型的稳定性. 统计与信息论坛, 2016, 31(6): 7–13.
Li J R, Zhang Y X. The stability of the Solow model with double random parameters based on environmental purification. *Statistics and Information Forum*, 2016, 31(6): 7–13. (in Chinese)
- [12] Wang Z, Huang X, Shi G D. Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, 62(3): 1531–1539.
- [13] 徐争辉, 刘友金, 谭 文, 等. 一个对称分数阶经济系统混沌特性研究. 系统工程理论与实践, 2014, 34(5): 1237–1242.
Xu Z H, Liu Y J, Tan W, et al. Chaotic dynamics in a commensurate fractional-order nonlinear economic system. *System Engineering: Theory and Practice*, 2014, 34(5): 1237–1242. (in Chinese)
- [14] 辛宝贵, 陈 通, 刘艳芹. 一类分数阶混沌金融系统的复杂性演化研究. 物理学报, 2011, 60(4): 797–802.
Xin B G, Chen T, Liu Y Q. Complexity evolution of a chaotic fractional-order financial system. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(4): 797–802. (in Chinese)
- [15] Deng W H, Li C P, Lü J H. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 48(4): 409–416.
- [16] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 含Caputo型分数阶导数的灰色预测模型. 系统工程理论与实践, 2015, 35(5): 1311–1316.
Wu L F, Liu S F, Yao L G. Grey model with caputo fractional order derivative. *System Engineering: Theory and Practice*, 2015, 35(5): 1311–1316. (in Chinese)
- [17] Li J R, Lin Z F, Li S. Stability and hopf bifurcation in a business cycle model with random parameter. *Information*, 2013, 16(2): 1083–1090.
- [18] 刘 峰, 李亚光, 王宏兴. 非线性需求下四寡头价格博弈模型及其复杂特性. 系统工程学报, 2016, 31(6):719–728.
Liu F, Li Y G, Wang H X. Four oligarchs price game model and its complex characteristics with nonlinear demand. *Journal of Systems Engineering*, 2016, 31(6):719–728. (in Chinese)
- [19] 李俊瑞, 昌 建. 确定和不确定策略框架下的古诺双寡头模型. 系统工程学报, 2015, 30(5): 594–600.
Li J R, Chang J. Cournot duopoly models based on certain and uncertain strategy. *Journal of Systems Engineering*, 2015, 30(5): 594–600. (in Chinese)
- [20] Pasche M. Technical progress, structural change and the environmental kuznets curve. *Ecological Economics*, 2002, 42(3): 381.
- [21] 陈六君, 毛 潭, 刘 为, 等. 环境恶化与经济衰退的动力学模型. 北京师范大学学报(自然科学版), 2004, 40(5): 617–622.
Chen L J, Mao T, Liu W, et al. A dynamic model on environmental degradation and economic recession. *Journal of Beijing Normal University (Natural Science)*, 2004, 40(5): 617–622. (in Chinese)
- [22] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1999.

作者简介:

李俊瑞 (1973—), 男, 陕西华县人, 博士, 教授, 研究方向: 非线性动力系统与数理统计, Email: jiaoruili@xaupe.edu.cn;
张艳霞 (1988—), 女, 河南民权人, 硕士, 研究方向: 非线性动力系统与数理统计, Email: zhangyanxia1314@126.com.