

基于 Copula-GARCH 方法的交叉汇率期权套期保值模型

余 星^{1,2}, 张卫国¹, 刘勇军¹

(1. 华南理工大学工商管理学院, 广东 广州 510640;

2. 华中师范大学经济与工商管理学院, 湖北 武汉 430079).

摘要: 针对进出口贸易中汇率风险管理问题, 利用 Copula-GARCH 方法, 基于改进的下偏矩风险测度(LPM)提出交叉汇率期权套期保值模型. 首先, 用 Copula 函数刻画相关结构, 建立适用于任意边际分布的交叉汇率期权套期保值理论模型, 并推导出模型的积分形式. 然后, 对交叉汇率收益序列进行 GARCH 模型拟合, 给出基于边际收益率分布的最优模型算法步骤. 最后, 将模型应用于人民币外汇市场交叉汇率套期保值实证研究, 并分析敲定价格, 套期保值成本和风险厌恶程度等对 LPM 的影响. 研究表明, 将目标收益设置为收益的中位数而不是平均收益有利于投资者谨慎投资. 为了降低 LPM 风险, 建议预算较少的投资者选择平值看跌期权对冲, 而预算较高的投资者可以选择实值看跌期权, 但敲定价格不宜过大.

关键词: 交叉汇率; 下偏矩; 期权套期保值; Copula-GARCH 方法

中图分类号: F830.9

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2019)05-0656-16

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2019.05.008

Hedging model with cross-currency options based on Copula-GARCH method

Yu Xing^{1,2}, Zhang Weiguo¹, Liu Yongjun¹

(1. School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. School of Economics and Business Administration, Central China Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract: In view of the exchange rate risk in import and export trade, using Copula-GARCH method, this paper proposes a hedging model with cross-currency options based on improved lower partial moment (LPM). First, copula functions are used to describe the dependence structure. A theoretical hedging model, which is applicable in any marginal distributions, is established with cross-currency options, and integral forms of the hedging model are derived. Then GARCH models are fitted for the returns of the cross currencies, and steps of calculating the distribution of the marginal returns using the optimal model are presented. The proposed model is further validated using cross-currency hedging of RMB in the foreign exchange market. The effects on LPM caused by the strike price, hedging cost and the degree of risk aversion coefficient are also discussed. The results show that setting the median return rather than the expected return as the target return in LPM is good for prudent investment. To reduce the risk measured by LPM, investors with less budget should choose at-the-money put options hedging while those with higher budget can choose in-the-money put options. The latter shall consider an appropriate strike price which is comparatively lower than others.

Key words: cross-currency; lower partial moment; options hedging; Copula-GARCH method

收稿日期: 2016-12-02; 修订日期: 2017-04-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71501076); 广东省自然科学基金资助项目(2014A030310454); 华中师范大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(CCNU19A06043; CCNU19TD006).

1 引言

自 1973 年布雷顿森林体系崩溃以来,各主要工业国家货币的兑换价格不再维持固定,而是迈向全面浮动的汇率体制. 国际外汇市场朝逐步放宽外汇管制的自由化方向发展,汇率因此也呈现出多变性. 汇率的多变性使外汇市场的波动幅度日益加大,金融风险急剧增加,甚至于引发货币危机,使金融系统乃至整个社会经济受到重创. 众所周知,外贸企业业务一般都与汇率有关. 因此,汇率风险是进出口企业和有外汇交易的企业面对的重要风险之一. 如何在国际金融市场急剧变化、人民币汇制改革的形势下,加强外汇风险的管理,减少或避免外汇风险给企业利润造成损失已成为我国外贸企业风险管理的当务之急.

为了在货币折算或兑换过程中保障收益或锁定成本,通过交易金融衍生品规避汇率风险的做法叫套期保值. 可以被外贸企业用来套期保值的金融衍生品很多. 其中期货和期权是两种常用的套期保值金融衍生工具. Bodnar 等^[1]通过调查研究发现越来越多的外贸企业倾向于利用汇率期货或期权套期保值转移汇率风险. 马超群等^[2]指出使用外汇期货进行套期保值对于我国企业减少套期保值成本,从而规避外汇风险具有十分重要的研究意义. 尹力博等^[3]也表示人民币外汇期权将切实为需求者规避汇率风险服务,为强化外汇市场流动性和市场预期提供有效的操作工具. 目前,将汇率期货当作套期保值工具管理外汇风险的研究比较多. Adam-Müller^[4]假设可对冲的汇率风险和不可对冲的价格风险正交,建立了汇率期货套期保值模型. Wong^[5]将 Adam-Müller 的模型做了进一步的推广. 假设可对冲的汇率风险和不可对冲的价格风险负相关,研究了出口公司同时面临汇率风险和价格风险时最优套期保值决策问题. Wong^[6]在汇率期货和商品期货市场不同完整性情形下,建立期货套期保值模型对出口企业面临的汇率和价格风险. Kotkatvuori-örnberg^[7]建立 Copula DCC-EGARCH 模型研究了汇率期货套期保值的最优头寸问题. 唐韬等^[8]建立一个状态转换动态 Gaussian-Copula 套期保值模型来对外汇风险进行管理. 利用汇率期货套期保值的更多研究可以参考文献[9-11]. 既然期货和期权具有套期保值功能,学者们就两者在套期保值中的优劣问题展开了讨论. 比如, Lien 等^[12]在现货与期货的条件分布服从双变量正态分布的假设下对比研究了外汇期货与期权在对冲下偏矩风险方面的表现. Battermann 等^[13]研究了当货币期货和期权都存在时,为了对冲汇率风险,出口企业如何选择对冲工具问题. 这些文献研究结果都表明期货套期保值表现优于期权. 但这并不意味着期权就不适合用于套期保值. 主要原因是认为期货套期保值优于期权的这些文献中的风险是线性的,期货作为线性对冲工具更适合用于对冲线性风险. 而期权作为非线性对冲工具更适合用于对冲非线性风险. 很多学者都证实了这个观点. 如 Sakong 等^[14]指出线性(非线性)对冲工具对冲线性(非线性)风险方面具有优势. Wong^[15]通过研究指出利用期权对冲的主要原因是存在非线性风险. 文献[16-19]也表明了这一论断. 其次,利用期货套期保值可能带来额外风险,比如由于期货的逐日盯市制带来的追加保证金不足风险. 因此,为了对冲普遍存在的非线性风险和规避追加保证金风险,不同于已有的期货套期保值方法,本文选择买入看跌期权进行套期保值.

在汇率风险管理中存在的一个现实问题是本国货币与外国货币不能直接兑换,需要通过第三国货币折算进行间接兑换. 比如中国与印度进出口贸易随着丝绸之路的提出更加繁荣起来,但印度卢比不能与人民币进行直接兑换,需要通过欧元或美元换算汇兑. 若汇率 CNY/USD 或 CNY/EUR 存在期权市场,那么进出口企业可以选择本国与第三国货币衍生品进行套期保值降低汇率风险. 在外汇交易中还有可能出现如下问题:虽然欧元可以直接与人民币兑换,但若存在 USD/EUR 汇率期权市场而缺少 CNY/EUR 汇率期权市场,那么需要通过交叉汇率期权进行套期保值. 叶永刚等^[20]提出我国在外汇期货产品的发展中可以首先选择推出欧元兑美元、澳元兑美元两个交叉汇率期货产品. 谢赤等^[21]提出了一个竞争性出口企业利用无偏的交叉货币期货市场进行汇率套期保值模型. Wong^[22]考虑了三国汇率三角关系,在对称分布假设下基于二次效用函数建立期货和期权交叉套期保值模型间接对冲汇率风险. Álvarez-Díez 等^[23]建立多国货币交叉模型,发现利用多国货币交叉兑换可以对冲部分汇率风险. 本文在文献[23]的基础上进一步考虑利用汇率衍生品套期保值对冲汇率风险.

套期保值模型中通常把最小方差比率作为套期保值目标. 但是最小方差方法度量的是双边风险, 把资产价格上涨和下跌都视作风险, 不能描述投资者规避资产贬值所形成的风险. 许启发等^[24]基于支持向量分位数回归模型, 给出了多期 VaR 风险测度方法. 为了克服方差风险测度的不足, Bawa 等^[25]提出了下偏矩风险测度(LPM). LPM 被认为是风险测度的一种较好的方法. 孔继红等^[26]指出了下偏矩测度的四个特点, 并利用沪深 300 指数及期货的日交易数据, 探讨下偏矩模型下的空头期货最优对冲比率问题. 在下偏矩测度的定义中, 目标收益是一个主观变量, 可根据投资者的目标任意取值. 人们较多地会将无风险收益率作为目标收益率或直接取 0 作为目标收益率^[27,28]. 另一方面, 从风险管理者的角度来说, 目标收益率可以取为负数, 因为套期保值者愿意承担一定的负收益率来规避或转移大的风险. 显然, 不同的目标收益投资者的决策和获得效用可能不同. 孙艳等^[29]使用香港恒生指数及期货数据, 认为下偏矩最优对冲比率随着目标收益的变大而减少. 还有些与下偏矩测度有关的研究中取目标收益为定值或收益的平均值. 若将目标收益取为定值缺乏合理性. 比如对两个不同投入的投资者而言, 投入较多的投资者其预期目标收益一般较高; 若将目标收益取为平均收益也存在着不足, 因为在这种情形下即使下偏矩测度较小, 但削弱了极端情况的影响. Kou 等^[30]详细讨论了风险管理中中位数相对于均值的优越性. 王力等^[31]通过数据分析发现期望损失和中位数损失均可以弥补风险价值的不足, 且中位数损失比期望损失更稳健. 由于中位数的大小与极端值无关, 它代表数据总体的中等情况, 所以将收益的中位数作为目标收益更具有合理性. 另外, 考虑到投资者一般对于收益的预期为正, 因此本文改进下偏矩测度, 取目标收益取为 $\max\{\text{收益的中位数}, 0\}$.

套期保值模型本质上是融入衍生品的投资组合模型, 而资产组合中需要考虑金融收益序列真实的边际分布和联合分布状况, 所以资产边际收益建模也是套期保值的关键问题之一. GARCH 族模型和 Copula 函数被广泛地用于解决金融序列边际分布和联合分布问题. Narayan 等^[32]利用 GARCH 和 EGARCH 模型研究原油价格和 Fiji/US 汇率收益率. Wang 等^[33]基于 GARCH-EVT-Copula 模型估计外汇组合的 VaR 和 CVaR 风险. Wu 等^[34]建立 Copula-GARCH 研究 WTI 原油价格和美元指数汇率期货组合问题. Chang 等^[35]利用动态多元 GARCH 方法研究了汇率期货套期保值问题. 文献[18]考虑基差和生产风险, 假设标的资产价格服从对数正态分布, 研究了期权套期保值问题. 黄友珀等^[36]构建了资产组合收益分位数预测的藤 Copula - 已实现 GARCH 模型预测资产组合收益分位数. 梁建峰等^[37]采用 Copula-GARCH 方法对即期与衍生品市场的资产收益序列进行拟合, 并将风险的下偏矩(LPM)模型应用于人民币外汇市场套期保值实证研究. 文献[37]将 Copula-GARCH 方法应用于汇率期货套期保值模型中. 相比较于期货的线性套期保值模型, 汇率期权套期保值模型由于其非线性使模型求解难度更大. 本文提出了 Copula-GARCH 方法应用于求解期权套期保值模型的新思路.

综上所述, 本文的研究主要基于以下四点考虑: 一是随着经济全球化发展, 各国之间贸易日益频繁, 如何利用金融衍生品管理汇率风险是一个现实问题. 由于汇率衍生品市场的发展相对滞后, 交叉汇率套期保值具有实际应用价值. 考虑到买入欧式看跌期权套期保值可以回避逐日盯市风险, 而且根据文献研究表明期权在对冲非线性风险方面表现优于期货. 又在汇率三角关系中不可避免地产生非线性风险. 因此, 本文建立交叉汇率期权套期保值模型对冲汇率风险. 二是相关文献研究中假设资产价格服从几何布朗运动, 没有考虑两个金融收益序列真实的联合分布情况. 本文考虑用 GARCH 和 GJR 模型预测交叉汇率收益率, 并利用 Copula-n, Copula-t, Copula-Frank, Copula-Clayton 和 Copula-Gumbel 等函数刻画交叉汇率相关结构. 三是考虑到下偏矩在风险度量方面比方差更具优势, 它仅将损失作为风险的计量因子, 反映投资者对风险的真实感受且不要求二次效用函数. 并且, 考虑到已有研究将下偏矩测度中目标收益取为定值或收益的平均值存在不足, 本文提出基于中位数的改进的下偏矩测度, 并基于改进的下偏矩建立交叉汇率期权套期保值模型. 四是现有关于 Copula-GARCH 的研究大部分基于蒙特卡罗模拟方法, 这种方法的计算量比较大. 本文从解析角度推导出套期保值组合收益的分布函数表达式, 并基于金融序列边际分布进一步推导出交叉汇率期权套期保值一般通用的解析模型. 最后, 结合实证分析最优敲定价格、预算和投资者风险厌恶程度等对下偏矩的影响, 为投资者提供投资决策建议.

2 交叉汇率期权套期保值模型

考虑 0 和 1 两时点, 一阶段套期保值问题. 在时刻 1, 某进口公司将从外国收到以外国币计的现金流量 H , 并假设时刻 0 的现金流量 H 已知. 假设本国货币与外国货币不能直接兑换, 需要经过第三国货币折算. 记第三国货币与本国货币汇率为 \tilde{S}_1 , 外国货币与第三国货币汇率为 \tilde{S}_2 , 则本国货币与外国货币汇率为 $\tilde{S} = \tilde{S}_1\tilde{S}_2$. 若本国与外国货币汇率不存在期权市场, 而第三国与本国货币存在汇率期权市场, 则为了对冲汇率风险, 公司可以买入 Z 份以 \tilde{S}_1 为标的的看跌期权进行套期保值. 因此, 公司在时刻 1 的收益函数可表示成

$$\Pi = \tilde{S}_1\tilde{S}_2H + \left((K - \tilde{S}_1)^+ - \varphi \right) Z, \tag{1}$$

其中 φ 为期权价格, 也就是公司买入每份看跌期权需要支付的期权金. 假设公司用于购买期权的预算为 $c = \varphi Z$. 下面分析下偏矩风险测度(LPM)在交叉汇率期权套期保值投资中的应用.

根据 Bawa^[25]和 Lien 等^[16]的定义, n 阶 LPM 可写成

$$L(\theta, n, \Pi) = E[\max(0, \theta - \Pi)]^n = \int_{-\infty}^{\theta} (\theta - u)^n dF_{\Pi}(u), \tag{2}$$

其中 θ 是目标收益, 可根据套期保值者的目标任意取值. Π 是实际收益, 它是随机的. $F_{\Pi}(u)$ 是 Π 的分布函数. n 是 LPM 的阶数, 且为非负整数, 它可以代表投资者的风险厌恶程度. $n < 1$ 表明投资者对风险偏好; $n > 1$ 意味着投资者对风险厌恶, n 越大表明投资者风险厌恶程度越大. 特别地, 令 $n = 0$, 则 LPM 相当于风险价值(VaR); 当 $n = 1$, LPM 类似于条件风险价值(CVaR); 当 $\theta = 0$ 且 $n = 2$, LPM 即相当于 Markowitz 的半方差.

基于 LPM 和预算约束, 建立期权最优套期保值模型

$$(P_1) \begin{cases} \text{Min } L(\theta, n, \Pi) = \int_{-\infty}^{\theta} (\theta - u)^n dF_{\Pi}(u) \\ \text{s.t. } c = \varphi Z. \end{cases}$$

求解模型(P₁)需要先确定资产组合随机收益分布函数. 在已有的研究中, 很多学者假设套期保值组合收益的联合分布服从多元正态分布, 这种假设与现实不符. 根据 Sklar 定理^[38], 资产组合的联合分布可以通过一个 Copula 函数将其边际分布连接得到. 以下将通过 Copula 连接函数对模型(P₁)进行进一步转化.

3 基于 Copula 函数的交叉汇率理论套期保值模型

在这一节中, 首先引入后文将要用到的相关符号, 然后基于 Copula 函数的性质给出相关定理, 最后推导出交叉汇率期权套期保值解析模型. 为此, 以二维 Copula 函数为例给出 Sklar 定理如下:

令 $F(x_1, x_2)$ 为具有边缘累积分布函数 $F_1(x_1)$ 和 $F_2(x_2)$ 的二维联合累积分布函数, 则存在一个 Copula 函数 $C(\cdot, \cdot)$ 将联合累积分布函数 $F(x_1, x_2)$ 与其边缘累积分布函数 $F_1(x_1)$ 和 $F_2(x_2)$ 连接起来, 即

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(u, v). \tag{3}$$

记 $D_1C(u, v) = \frac{\partial C}{\partial u}(u, v)$, $D_2C(u, v) = \frac{\partial C}{\partial v}(u, v)$, $D_{12}C(u, v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(u, v)$,

$$\bar{F}(a) = 1 - F(a), \quad D_1C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y)) = \Pr(Y \leq y | X = x).$$

根据 Copula 函数的相关性质, 可以推导出随机变量函数的 Copula 函数如引理 1 所示.

引理 1 如果 α 是严格单调递增函数, β 是严格单调递减函数, 则有

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = u - C_{X,Y}(u, 1 - v). \tag{4}$$

证明 令 F_1, G_1, F_2, G_2 分别表示 $X, Y, \alpha(X), \beta(Y)$ 的分布函数. 由于 α 严格单调递增, β 严格单调递减, 故有

$$F_2(x) = \Pr(\alpha(X) \leq x) = \Pr(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_1(\alpha^{-1}(x)),$$

$$G_2(y) = \Pr(\beta(Y) \leq y) = \Pr(Y \geq \beta^{-1}(y)) = 1 - G_1(\beta^{-1}(y)).$$

令 $u = F_2(x), v = G_2(y)$, 则有 $u = \Pr(X \leq \alpha^{-1}(x)), v = \Pr(Y \geq \beta^{-1}(y))$. 进而可得

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X), \beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= \Pr(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) = \Pr(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)) \\ &= \Pr(X \leq \alpha^{-1}(x)) - \Pr(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= u - C_{X, Y}(u, 1 - v). \end{aligned}$$

从而引理 1 的结论成立.

证毕.

引理 2 假设 X 和 Y 是基于概率空间 (Ω, P) 上的两个实值随机变量, 它们的边际分布分别为 F_X 和 F_Y . 若用 Copula 函数 $C_{X, Y}$ 表示随机变量 X 和 Y 的相关结构, 则有

$$F_{X+Y}(t) = \int_0^1 D_1 C_{X, Y}(w, F_Y(t - F_X^{-1}(w))) dw, \quad (5)$$

$$C_{X, X+Y}(u, v) = \int_0^u D_1 C_{X, Y}(w, F_Y(F_{X+Y}^{-1}(v) - F_X^{-1}(w))) dw.$$

证明 由分布函数的定义和变量代换 $w = F_X(x)$ 可得

$$\begin{aligned} F_{X, X+Y}(s, t) &= \Pr(X \leq s, X + Y \leq t) = \int_{-\infty}^s \Pr(X + Y \leq t | X = x) dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^s \Pr(Y \leq t - x | X = x) dF_X(x) = \int_{-\infty}^s D_1 C_{X, Y}(F_X(x), F_Y(t - x)) dF_X(x) \\ &= \int_0^{F_X(s)} D_1 C_{X, Y}(w, F_Y(t - F_X^{-1}(w))) dw. \end{aligned}$$

令 $s \rightarrow +\infty$, 即可得到式(5). 从而, X 和 $X + Y$ 的 Copula 连接函数为

$$C_{X, X+Y}(u, v) = \int_0^u D_1 C_{X, Y}(w, F_Y(F_{X+Y}^{-1}(v) - F_X^{-1}(w))) dw. \quad (6)$$

证毕.

引理 3 假设 X 和 Y 是基于概率空间 (Ω, P) 上的两个实值随机变量, 且 X 为正值随机变量. 它们的边际分布分别记为 F_X 和 F_Y . 若用 Copula 函数 $C_{X, Y}$ 表示随机变量 X 和 Y 的相关结构, 则有

$$F_{XY}(s) = \int_0^1 D_1 C_{X, Y}\left(w, F_Y\left(\frac{s}{F_X^{-1}(w)}\right)\right) dw, \quad (6)$$

$$C_{XY, X}(u, v) = \int_0^v D_1 C_{X, Y}\left(w, F_Y\left(\frac{F_{XY}^{-1}(u)}{F_X^{-1}(w)}\right)\right) dw. \quad (7)$$

证明 已知 X 为正值随机变量, 由分布函数的定义和变量代换 $w = F_X(x)$ 可得

$$\begin{aligned} F_{XY, X}(s, t) &= \Pr(XY \leq s, X \leq t) = \int_0^t \Pr\left(Y \leq \frac{s}{x} | X = x\right) dF_X(x) \\ &= \int_0^t D_1 C_{X, Y}\left(F_X(x), F_Y\left(\frac{s}{x}\right)\right) dF_X(x) \\ &= \int_0^{F_X(t)} D_1 C_{X, Y}\left(w, F_Y\left(\frac{s}{F_X^{-1}(w)}\right)\right) dw. \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow +\infty$, 即可得到式(6). 从而, XY 和 X 的 Copula 连接函数为

$$C_{XY, X}(u, v) = \int_0^v D_1 C_{X, Y}\left(w, F_Y\left(\frac{F_{XY}^{-1}(u)}{F_X^{-1}(w)}\right)\right) dw. \quad (7)$$

证毕.

基于引理 1, 引理 2 和引理 3 可以推导出交叉汇率套期保值组合收益的分布函数如定理 1 所示.

定理 1 若到期日时期权为价内期权, 则由式(1)描述的套期保值组合收益 Π 的分布函数为

$$F_{\Pi}(u) = 1 - \int_0^1 D_1 C_{S_1 S_2, S_1}(w, F_{S_1}(K - W)) dw, \tag{8}$$

其中

$$W = (u - F_{S_1 S_2 H - \varphi Z}^{-1}(w)) / Z,$$

$$F_{S_1 S_2}(u) = \int_0^1 D_1 C_{S_1, S_2} \left(w, F_{S_2} \left(\frac{u}{F_{S_1}^{-1}(w)} \right) \right) dw,$$

$$C_{S_1 S_2, S_1}(u, v) = \int_0^v D_1 C_{S_1, S_2} \left(w, F_{S_2} \left(\frac{F_{S_1 S_2}^{-1}(u)}{F_{S_1}^{-1}(w)} \right) \right) dw.$$

若到期日时期权为价外期权, 则 Π 的分布函数可以表示为

$$F_{\Pi_T}(u) = \int_0^1 D_1 C_{S_1, S_2} \left(w, F_{S_2} \left(\frac{u + \varphi Z}{H F_{S_1}^{-1}(w)} \right) \right) dw. \tag{9}$$

证明 当到期日时期权为价内期权时, 先求出 $\tilde{S}_1 \tilde{S}_2 H - \varphi Z$ 的分布函数

$$F_{S_1 S_2 H - \varphi Z}(x) = \Pr \left(S_1 S_2 \leq \frac{x + \varphi Z}{H} \right) = F_{S_1 S_2} \left(\frac{x + \varphi Z}{H} \right).$$

根据式(6)可得

$$F_{S_1 S_2 H - \varphi Z}(x) = \int_0^1 D_1 C_{S_1, S_2} \left(w, F_{S_2} \left(\frac{x + \varphi Z}{H F_{S_1}^{-1}(w)} \right) \right) dw. \tag{10}$$

再求出 $(K - \tilde{S}_1)Z$ 的分布函数

$$F_{(K - S_1)Z}(t) = \Pr \left((K - S_1)Z \leq t \right) = \bar{F}_{S_1} \left(K - \frac{t}{Z} \right). \tag{11}$$

由式(5)可得 Π 分布函数为

$$\begin{aligned} F_{\Pi}(u) &= F_{S_1 S_2 H - \varphi Z + (K - S_1)Z}(u) \\ &= \int_0^1 D_1 C_{S_1 S_2 H - \varphi Z, (K - S_1)Z} \left(w, F_{(K - S_1)Z} \left(u - F_{S_1 S_2 H - \varphi Z}^{-1}(w) \right) \right) dw. \end{aligned} \tag{12}$$

因为 $S_1 S_2 H - \varphi Z$ 关于 $S_1 S_2$ 单调递增, $(K - S_1)Z$ 关于 S_1 单调递减, 则利用式(4)有

$$\begin{aligned} &C_{S_1 S_2 H - \varphi Z, (K - S_1)Z} \left(w, F_{(K - S_1)Z} \left(u - F_{S_1 S_2 H - \varphi Z}^{-1}(w) \right) \right) \\ &= w - C_{S_1 S_2, S_1} \left(w, F_{S_1}(K - W) \right). \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $W = (u - F_{S_1 S_2 H - \varphi Z}^{-1}(w)) / Z$.

将式(13)代入式(12)可得套期保值组合收益的分布函数如式(8)所示. 若到期日时期权为价外期权, 则 $\Pi = \tilde{S}_1 \tilde{S}_2 H - \varphi Z$, 此时其分布函数可以由式(9)表示. 证毕.

根据以上分析, 给出基于套期保值组合收益的目标函数积分形式的计算步骤:

情形 1 若到期日时期权为价外期权, 利用式(9)得到 Π 的分布函数 $F_{\Pi}(u)$. 进而得到其密度函数 $f_{\Pi}(u)$, 再基于密度函数将模型(P₁)表示成积分形式进行求解.

情形 2 若到期日时期权为价内期权, 则根据式(10)求出 $\tilde{S}_1 \tilde{S}_2 H - \varphi Z$ 的分布函数, 从而得到分布函数的逆函数 $F_{S_1 S_2 H - \varphi Z}^{-1}(w)$. 再将其代入式(8)得到套期保值组合收益的分布函数. 然后基于分布函数求得组合收益的密度函数 $f_{\Pi}(u)$, 再基于密度函数将模型(P₁)表示成积分形式.

当到期日时期权为价内期权时, 由定理 1 可以求出 Π 的密度函数为

$$f_{\Pi}(u) = - \int_0^1 D_{12} C_{S_1 S_2, S_1} \left(w, F_{S_1}(K - W) \right) \frac{\partial F_{S_1}(K - W)}{\partial u} dw$$

$$= \frac{1}{Z} \int_0^1 D_{12} C_{S_1, S_2, S_1}(w, F_{S_1}(K - W)) f_{S_1}(K - W) dw. \quad (14)$$

当到期日期权为价外期权时, 由定理 1 可以求出 Π 的密度函数为

$$f_{\Pi}(u) = \int_0^1 D_{12} C_{S_1, S_2} \left(w, F_{S_2} \left(\frac{u + \varphi Z}{HF_{S_1}^{-1}(w)} \right) \right) \frac{1}{HF_{S_1}^{-1}(w)} f_{S_2} \left(\frac{u + \varphi Z}{HF_{S_1}^{-1}(w)} \right) dw. \quad (15)$$

由式(15)可将价内期权情形下的目标函数表示成

$$L(\theta, n, \Pi) = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\theta} (\theta - u)^n \int_0^1 D_{12} C_{S_1, S_2, S_2}(w, F_{S_1}(K - W)) f_{S_1}(K - W) dw du. \quad (16)$$

一般地, 在实际计算中通常针对收益率而不是资产本身价格建模. 以下以价内期权为例给出基于收益率边际分布将模型(P₁)转化成积分形式的算法步骤.

步骤 1 拟合两个交叉汇率边际收益率的分布函数 $F_1(r_1), F_2(r_2)$, 再求得它们的密度函数 $f_1(r_1), f_2(r_2)$;

步骤 2 利用 $S_1 = S_0^1(1 + r_1)$ 和 $S_2 = S_0^2(1 + r_2)$ 计算 F_{S_1} 和 F_{S_2} 的分布函数

$$F_{S_1}(l) = F_{r_1} \left(\frac{l}{S_0^1} - 1 \right), \quad F_{S_2} \left(\frac{x + \varphi Z}{Hl} \right) = F_{r_2} \left(\frac{x + \varphi Z}{Hl S_0^2} - 1 \right);$$

步骤 3 选取合适的交叉汇率收益率相关结构 Copula 函数 $C_{r_1, r_2}(u, v)$, 根据式(11)代入第 2 步中的两个分布函数得到 $\tilde{S}_1 \tilde{S}_2 H - \varphi Z$ 的分布函数, 进而得到其逆函数, 并将逆函数代入式(17)中;

步骤 4 求出 $D_{12} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$, 并求得 $D_{12} C_{S_2, S_1}(u, v) = D_{12} C_{r_2, r_1}(u, v)$. 由式(9)再求得 $C_{S_1, S_2, S_1}(u, v)$;

步骤 5 由期权市场的无偏性, 计算期权价格

$$\varphi = \varphi(K) = E[(K - S_0^1(1 + r_1))^+] = \int_{-\infty}^{\frac{K}{S_0^1} - 1} f_1(r_1) dr_1,$$

进而有 $Z = c/\varphi(K)$, 其中 c 是套期保值者给定的成本预算;

步骤 6 将步骤 5 计算结果代入式(17)即可得到模型(P₁)的解析形式;

步骤 7 基于步骤 6 结果求解最优套期保值模型, 并对参数进行灵敏度分析.

为了解决步骤 1 和步骤 3 中边际分布和相关结构问题, 在下一节中分别检验边际分布 GARCH 和 GJR 模型和 Copula-n, Copula-t, Copula-Frank, Copula-Clayton 以及 Copula-Gumbel 相关结构函数. 本文建立的模型具有一般适用性, 即可以类似地推广应用到其他边际分布和相关结构的情形.

4 边际分布及相关结构函数

4.1 边际分布

由于 GARCH 族模型能够较好地刻画收益的动态变化特征, 捕捉金融市场的聚集性效应与非对称特征, 所以各类 GARCH 模型被广泛地应用于预测资产收益率的波动率. 在这里, 给出常用的 GARCH 族模型, 包括 GARCH-n, GARCH-t, GJR-n 和 GJR-t 模型, 并利用这些模型说明本文所提出的模型求解过程.

1) GARCH 模型

假设收益率序列为 r_t , 建立如下 GARCH-n/GARCH-t 模型:

$$\begin{cases} r_t = \mu + a_t \\ a_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2 \\ \varepsilon_t \sim N(0, 1) \text{ 或 } \varepsilon_t \sim T_d, \end{cases} \quad (17)$$

其中 $N(0, 1)$ 表示标准正态分布, T_d 表示自由度为 d 的 t 分布. $\mu = E[r_t] = E[E[r_t | \Omega_{t-1}]]$ 表示序列收益

率的期望值, Ω_{t-1} 是 $t-1$ 时刻的信息集. $\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \Omega_{t-1})$ 是条件方差. α_0, α_1 和 α_2 均为模型参数.

由式(17)可以得到 $t+1$ 时刻收益率的分布函数为

$$\begin{aligned} \Pr(r_{t+1} \leq r) &= \Pr(a_{t+1} \leq r - \mu) = \Pr\left(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{r - \mu}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \alpha_2 \sigma_t^2}}\right) \\ &= \begin{cases} \Phi\left(\frac{r - \mu}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \alpha_2 \sigma_t^2}}\right), & \text{当 } \varepsilon_t \sim N(0, 1) \\ T_d\left(\frac{r - \mu}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \alpha_2 \sigma_t^2}}\right), & \text{当 } \varepsilon_t \sim T_d, \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 Φ 为标准正态分布函数.

2) GJR模型

为衡量收益率波动的非对称性, GJR 模型在条件方差中加入负冲击的杠杆效应. 令 $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, 则条件方差表示为

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2 + \gamma s_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2.$$

于是可得边际收益的分布函数为

$$\begin{aligned} \Pr(r_{t+1} \leq r) &= \Pr(a_{t+1} \leq r - \mu) = \Pr\left(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{r - \mu}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \alpha_2 \sigma_t^2 + \gamma s_t \varepsilon_t^2}}\right) \\ &= \begin{cases} \Phi\left(\frac{r - \mu}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \alpha_2 \sigma_t^2 + \gamma s_t \varepsilon_t^2}}\right), & \text{当 } \varepsilon_t \sim N(0, 1) \\ T_d\left(\frac{r - \mu}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \alpha_2 \sigma_t^2 + \gamma s_t \varepsilon_t^2}}\right), & \text{当 } \varepsilon_t \sim T_d, \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

其中 s_t 是一个虚拟变量, γ 是非对称项.

4.2 相关结构 Copula 函数及参数估计方法

本文将利用 Copula-n, Copula-t, Copula-Frank, Copula-Clayton 和 Copula-Gumbel 相关结构函数刻画交叉汇率的相关关系. 以下介绍这五个常用的 Copula 函数的分布函数和密度函数:

1) 二维 Copula-n 函数的分布函数和密度函数分别为

$$C(u_1, u_2; \theta) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\theta x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\theta^2)}\right) dx_1 dx_2,$$

$$D(u_1, u_2; \theta) = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 \theta^2 - 2\theta \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 \theta^2}{2(1-\theta^2)}\right),$$

其中 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为一维标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 的逆函数; $\xi_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ 和 $\xi_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ 分别为标准正态分布变量; $\theta \in [-1, 1]$ 为 Copula-n 函数的相关参数.

2) 二维 Copula-t 函数的分布函数和密度函数分别为

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2; \theta) &= \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 - 2\theta x_1 x_2 + x_2^2}{\nu(1-\theta^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dx_1 dx_2, \\ D(u_1, u_2; \theta) &= \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left(1 + \frac{\xi_1^2 - 2\theta \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2}{\nu(1-\theta^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\left(\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\right)^2 \prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{\xi_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}, \end{aligned}$$

其中 $T_\nu^{-1}(\cdot)$ 表示自由度为 ν 的一维 t 分布 $T_\nu(\cdot)$ 的逆函数; $\xi_1 = T_\nu^{-1}(u_1)$ 和 $\xi_2 = T_\nu^{-1}(u_2)$ 分别为自由度为 ν 的 t 分布变量; $\theta \in [-1, 1]$ 为 Copula-t 函数的相关参数.

3) Copula-Frank 函数和密度函数分别为

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right),$$

$$D_{12}(u, v) = \frac{-\theta(e^{-\theta} - 1)e^{-\theta(u+v)}}{(e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1))^2},$$

其中 $\theta \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$, 为 Copula-Frank 函数的相关参数.

4) Copula-Clayton 函数和密度函数分别为

$$C(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}},$$

$$D(u_1, u_2) = (1 + \theta) (u_1 u_2)^{-\theta-1} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-2-\frac{1}{\theta}},$$

其中 $\theta \in (0, \infty)$, 为 Copula-Clayton 函数的相关参数.

5) Copula-Gumbel 函数和密度函数分别为

$$C(u_1, u_2; \theta) = \exp \left(-(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$D(u_1, u_2) = \frac{\exp(-S^{\frac{1}{\theta}})(\ln u_1 \ln u_2)^{-\theta-1}(S^{\frac{1}{\theta}} + \theta - 1)}{u_1 u_2 S^{2-\frac{1}{\theta}}},$$

其中 $S = (-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta$, $\theta \in [1, \infty)$, 为 Copula-Gumbel 函数的相关参数.

本文采用 Patton^[39]提出的两阶段极大似然法来估计 Copula 模型的参数. 具体做法如下:

首先, 由式(19)和式(20)的分布函数可得样本的似然函数为

$$H(\alpha) = \prod_{i=2}^n D_{12}[F_1(x_i, \alpha), F_2(y_i, \alpha)] f_1(x_i, \alpha) f_2(y_i, \alpha).$$

于是得对数似然函数

$$\ln H(\alpha) = \sum_{i=1}^n \ln D_{12}[F_1(x_i, \alpha), F_2(y_i, \alpha)] + \sum_{i=1}^n \ln f_1(x_i, \alpha) + \sum_{i=1}^n \ln f_2(y_i, \alpha),$$

然后求解对数似然函数的最大点, 即可得到 Copula 函数中未知参数 α 的最大似然估计值.

5 实证分析

本节通过选取中国外汇市场数据进行实证分析. 首先, 选择 USD/EUR 汇率和 CNY/USD 汇率的收益率边际分布、交叉汇率间的相关结构 Copula 函数. 然后, 基于交叉汇率期权套期保值模型分析最优敲定价格、预算和投资者风险厌恶程度的影响.

5.1 收益率分布函数及交叉汇率相关结构分析

假设一年后某公司获得 1 单位欧元收入. 若不存在 CNY/EUR 汇率期权市场, 而存在 CNY/USD 汇率的期权市场, 则公司可以选择买入 CNY/USD 汇率欧式看跌期权进行套期保值. 假设期权到期日与收入欧元时刻一致. 本文实证分析所采用的数据是境内从 2009-11-02~2014-10-16 的人民币汇率的即期, 数据来源于 WIND 数据库, 并假设当前时刻为 2014-10-16. 数据选取的目的在于套期保值期间的数据正处于下跌趋势期, 更能体现期权套期保值作用. 交叉汇率收益率采用自然对数收益率形式, 即

$$r_{it} = 100 \ln \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right), \quad i = 1, 2,$$

其中 $i = 1$ 表示美元兑人民币; $i = 2$ 表示欧元兑美元. $p_{i,t}$ 为各汇率每日收盘价; $p_{i,t-1}$ 为前一日收盘价. 图 1 和图 2 分别表示 CNY/USD 汇率对数收益率和绝对收益率图; 图 3 和图 4 分别为 USD/EUR 汇率对数收益率和绝对收益率图.

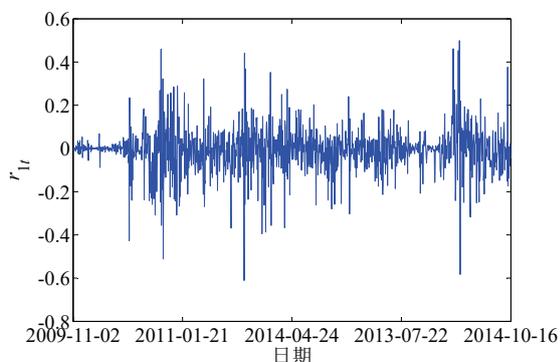


图 1 美元兑人民币收益率

Fig. 1 Return from the conversion of USD into RMB

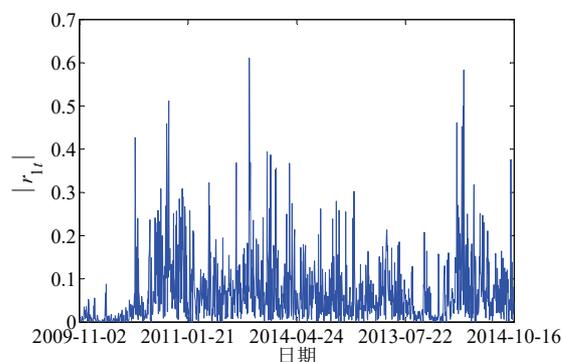


图 2 美元兑人民币绝对收益率

Fig. 2 Absolute return from the conversion of USD into RMB

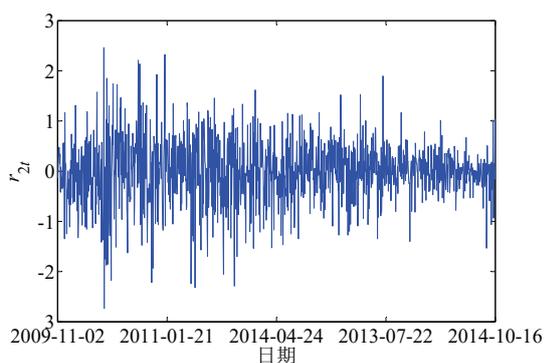


图 3 欧元兑美元收益率

Fig. 3 Return from the conversion of EUR into USD

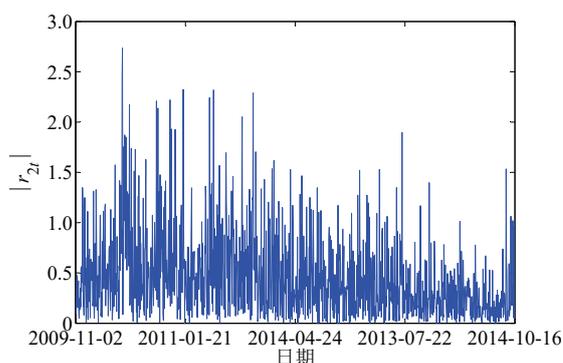


图 4 欧元兑美元绝对收益率

Fig. 4 Absolute return from the conversion of EUR into USD

从图 1~图 4 中可以发现, 交叉汇率收益率存在从集性效应(即一次大的波动后往往伴随着大的波动, 一次小的波动后往往伴随着小的波动). 进一步检验 ARCH 效应如表 1 所示.

表 1 样本数据的统计描述
Table 1 Statistical description of the sample data

统计量	均值	中位数	最大值	最小值	标准差	偏度	峰度	J-B统计量	p-值
CNY/USD	-0.000 1	-0.000 0	0.005 0	-0.006 1	0.001 0	-0.228 6	7.846 8	118 4	0.001
USD/EUR	-0.000 1	-0.000 1	0.024 6	-0.027 4	0.006 2	-0.224 5	4.562 3	132.011	0.001

表 1 给出了交叉汇率收益率关于 ARCH 效应的统计描述. 不难发现, CNY/USD 汇率和 USD/EUR 汇率具有负偏度(-0.228 6 和 -0.224 5)和尖峰厚尾性. 还通过 LM 统计量发现交叉汇率的收益都具有 ARCH 效应(经检验前 20 阶检验结果都显著, 为了节约篇幅, 此处省略具体数值表示). 因此, 考虑利用 4.1 节所建立的 GARCH 模型和 GJR 模型拟合两个汇率收益时间序列, 分别如表 2 和表 3 所示. 其中表 2 是用 GARCH-n 和 GARCH-t 模型拟合边际分布得到的参数估计值及误差; 表 3 给出了用 GJR-n 和 GJR-t 模型拟合边际分布得到的参数估计值及误差.

从表 2 和表 3 可以发现, 利用 Ljung-Box 检验和 Engle-检验显示 GARCH-n, GARCH-t, GJR-n 和 GJR-t 拟合的残差在置信度 5% 下不能拒绝原假设. 通过最大似然估计出的模型参数是显著的. 从表 2 和表 3 还可以看出 GARCH-t 模型预测 CNY/USD 和 USD/EUR 收益率.

表 2 边际分布 GARCH-n/GARCH-t 模型

Table 2 Models of GARCH-n/GARCH-t of the marginal distributions

模型 对象	GARCH-n				GARCH-t			
	CNY/USD		USD/EUR		CNY/USD		USD/EUR	
参数	估计值	标准差	估计值	标准差	估计值	标准差	估计值	标准差
C	-6.075e-5	2.179e-5	-1.239e-4	1.529e-4	-3.238e-5	1.840e-5	-5.808e-5	1.466e-4
K	1.075e-7	1.047e-8	2.000e-7	5.844e-8	1.072e-7	2.540e-8	2.000e-7	1.162e-7
GARCH	0.573	0.022	0.957	0.008	0.561	0.049	0.952	0.013
ARCH	0.421	0.036	0.038	0.008	0.440	0.091	0.044	0.013
AR					-0.029	0.030	-0.027	0.029
d					3.371	0.390	7.055	1.602
LLF	6.721e+3		4.495e+3		6.827e+3		4.514e+3	
AIC	-1.343e+4		-8.982e+3		-1.364e+4		-9.016e+3	
BIC	-1.341e+4		-8.963e+3		-1.361e+4		-8.987e+3	

注: 表格中数值 $ab \pm c$ 表示 $a \times b^{\pm c}$, 下同.

表 3 边际分布 GJR-n/GJR-t 模型

Table 3 Models of GJR-n/GJR-t of the marginal distributions

模型 对象	GJR-n				GJR-t			
	CNY/USD		USD/EUR		CNY/USD		USD/EUR	
参数	估计值	标准差	估计值	标准差	估计值	标准差	估计值	标准差
C	-0.5414e-5	2.510e-5	-1.590e-4	1.522 3e-4	-1.797e-5	1.002-5	-6.955e-5	1.245e-4
MA	-0.015	0.034	-0.040	0.030 7	-0.470	0.013	-0.158	0.015
K	1.075e-7	1.041e-8	2.000e-7	6.848 1e-8	1.128e-7	2.227e-8	2.000e-7	1.162e-7
GARCH	0.574	0.022	0.960	0.009	0.553	0.050	0.955	0.013
ARCH	0.472	0.055	0.026	0.010	0.470	0.097	0.031	0.016
Leverage	-0.091	0.066	0.017	0.010	-0.047	0.109	0.019	0.016
AR					0.431	0.013	0.131	0.015
d					3.357	0.018	7.093	1.276e-5
LLF	6.722e+3		4.497e+3		6.826e+3		4.514e+3	
AIC	-1.343e+4		-8.982e+3		6.826e+3		4.514e+3	
BIC	-1.340e+4		-8.953e+3		-1.360e+4		-8.974e+3	

以下给出 CNY/USD 汇率收益率 GARCH-t 模型:

$$\begin{cases} r_t = -3.238 \times 10^{-5} - 0.027 - 0.029r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t z_t, z(t) \sim t(4) \\ \sigma_t^2 = 1.072 \times 10^{-4} - 0.027 + 0.561\sigma_{t-1}^2 + 0.440\varepsilon_{t-1}^2. \end{cases} \quad (20)$$

因此, CNY/USD 汇率的收益率边际分布函数可表示为

$$F_1(r_1) = t_4 \left(\frac{r_1 + 3.238 \times 10^{-5} - 0.027 + 0.029r_{t-1}}{\sqrt{1.072 \times 10^{-4} - 0.027 + 0.561\sigma_{t-1}^2 + 0.440\varepsilon_{t-1}^2}} \right).$$

同样地, USD/EUR 汇率收益率 GARCH-t 模型表示为

$$\begin{cases} r_t = -5.808 \times 10^{-5} - 0.027r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t z_t, z(t) \sim t(7) \\ \sigma_t^2 = 2.000 \times 10^{-7} - 0.027 + 0.952\sigma_{t-1}^2 + 0.044\varepsilon_{t-1}^2. \end{cases} \quad (21)$$

故 USD/EUR 汇率的收益率边际分布函数为

$$F_2(r_2) = t_7 \left(\frac{r_2 + 5.808 \times 10^{-5} - 0.027 + 0.027r_{t-1}}{\sqrt{2.000 \times 10^{-7} - 0.027 + 0.952\sigma_{t-1}^2 + 0.044\varepsilon_{t-1}^2}} \right).$$

已知交叉汇率的历史数据, 如何选取拟合数据间相关结构最优的 Copula 函数是建立 GARCH-Copula

模型的一个关键问题. 最优 Copula 函数的识别方法很多, 鉴于 AIC 准则和 BIC 准则常用于定量评判不同 Copula 函数的拟合能力, 本文利用 AIC 和 BIC 准则识别最优的 Copula 函数. 在应用这两种准则进行最优 Copula 函数识别时, AIC 或 BIC 越小对应的 Copula 函数被认为是最优的. 其中 AIC 值定义为变量原始观测数据点处 Copula 密度函数值对数和的负 2 倍与 2 倍 Copula 函数相关参数数目之和, 其计算表达式为

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln D(u_{1i}, u_{2i}) + 2k_2, \tag{22}$$

其中 k_2 为 Copula 函数相关参数的数目. 对于二维 Copula 函数来说, $k_2 = 1$; (u_{1i}, u_{2i}) 为原始观测数据 (x_{1i}, x_{2i}) 的经验分布值, $i = 1, 2, \dots, N$. 此外,

$$\begin{cases} u_{1i} = \text{rank}(x_{1i}) / (N + 1) \\ u_{2i} = \text{rank}(x_{2i}) / (N + 1), \end{cases}$$

其中 $\text{rank}(x_{1i})$ 和 $\text{rank}(x_{2i})$ 分别表示按升序排列时实测值 x_{1i} 和 x_{2i} 在整列观测数据 $\hat{X}_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1N}\}$ 和 $\hat{X}_2 = \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2N}\}$ 中的秩次.

同理, BIC 值定义为变量原始观察数据点处 Copula 密度函数值对数和的负 2 倍与 $\ln N$ 倍 Copula 函数相关参数数目之和, 即

$$BIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln D(u_{1i}, u_{2i}) + k_2 \ln N. \tag{23}$$

综上, 已知交叉汇率的历史数据, 可以采用式(23)和式(24)计算备选 Copula 函数的 AIC 和 BIC 值, 从而识别出拟合历史数据相关结构最优的 Copula 函数. 本文中所提到的五种不同 Copula 函数下交叉汇率相关结构拟合效果如表 4 所示.

表 4 不同 Copulas 函数的 AIC, BIC
Table 4 AIC, BIC values of different functions

Coplua函数	Copula -n	Copula -t	Copula -Frank	Copula -Clayton	Copula -Gumbel
AIC	-169.568 1	-176.749 5	-181.559 1	2.000 9	2.001 6
BIC	-164.478 9	-171.660 3	-176.469 8	7.090 2	7.090 8

根据 Copula 函数识别的 AIC 和 BIC 准则, 从表 4 可以看出用 Copula-Frank 函数刻画交叉汇率间相关结构较好.

在不失一般性的情况下, 本文只针对风险厌恶型投资者展开讨论. 选取目标收益为样本间即期汇率的期望值(平均值), 偏距阶次分别取为 2 和 3. 利用 MATLAB 2012 b 软件求解模型(P₁)可得最优敲定价格以及 LPM 值如图 5 和图 6 所示.

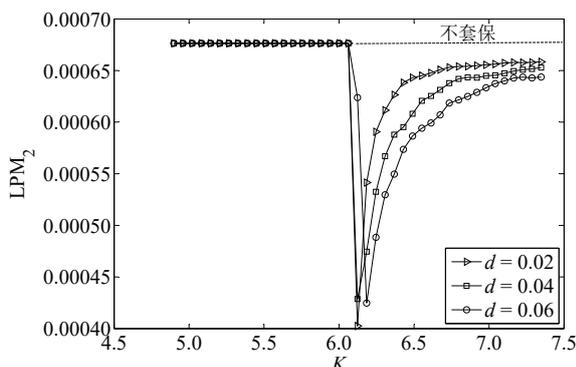


图 5 敲定价格与 2 阶下偏矩

Fig. 5 Relation between the strike price and LPM2

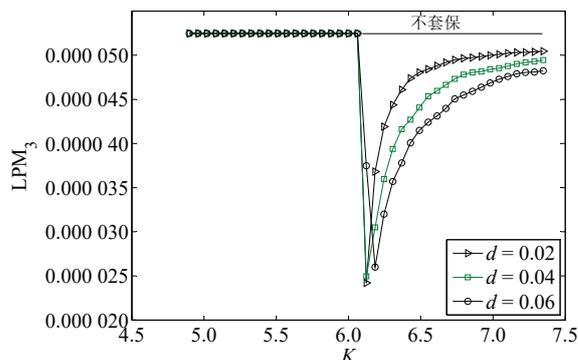


图 6 敲定价格与 3 阶下偏矩

Fig. 6 Relation between the strike price and LPM3

因为价格接近的 0 的期权可能处于深度虚值状态, 其流动性较差, 所以在求解模型时限定投资者不买入价格为 0 的期权. 而当看跌期权敲定价格较小时, 意味着期权内在价值很小. 此时, 投资者选择不买入期权. 因此, 在图 5 和图 6 中较小敲定价格对应的 LPM 为直线段. 这条直线段同时也意味着不采取套期保值所对应的 LPM. 从图 5 和图 6 不难发现, 不套期保值的 LPM 大于套期保值的 LPM. 这说明利用交叉汇率期权套期保值有利于降低下偏矩风险. 从图 5 和图 6 还可以发现, 对于风险厌恶的投资者而言, 当选择的敲定价格过小时, 欧式看跌期权可能处于深度虚值状态, 期权价格很低, 导致目标函数基本上不受敲定价格的影响. 随着敲定价格的增加, 下偏矩先降后升. 当预算较小时, 最优敲定价格等于标的资产当前值(即选择 at-the-money 看跌期权最优), 而当预算较大时, 最优敲定价格大于标的汇率当前值(即选择 in-the-money 看跌期权最优). 敲定价格大的期权若预算小则套期保值 LPM 较大; 反之, 敲定价格大的期权预算大则 LPM 较小. 这与实际是相符合的. 对于买入欧式看跌期权套期保值的投资者而言, 期权敲定价格越大越有利. 一般而言, 敲定价格越大的看跌期权其期权金越高, 一旦期权预算较小, 那么购买的期权份数较少. 从而导致套期保值效果不明显. 在其他参数不变的条件下, 风险厌恶程度越大, LPM 越小.

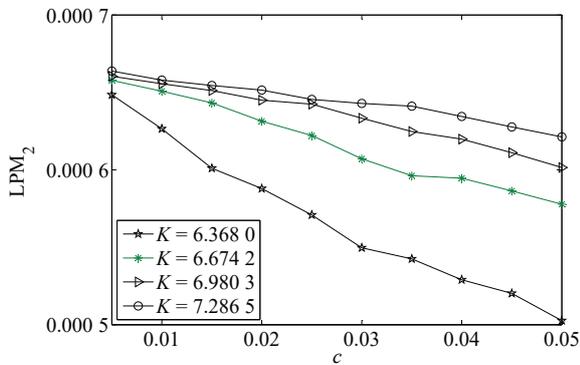


图 7 预算与 2 阶下偏矩

Fig. 7 Relation between the budget and LPM2

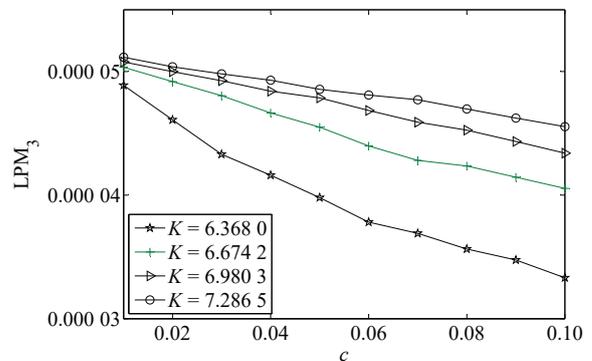


图 8 预算与 3 阶下偏矩

Fig. 8 Relation between the budget and LPM3

从图 7 和图 8 可以看出, 对于风险厌恶的投资者, 预算越大 LPM 越小. 风险厌恶程度越大, LPM 越小. 在同样的预算下, 敲定价格越大, LPM 越大. 这说明对于风险厌恶的投资者而言, 应该要增加敲定价格小的期权预算. 另外, 还可以发现不套期保值(预算等于 0)时的 LPM 值大于套期保值时的 LPM 值, 说明利用交叉汇率期权套期保值能降低下偏矩风险.

以下将对对比研究将目标收益设置为 $\max\{\text{收益的中位数}, 0\}$ 与均值时最优决策与下偏矩风险的关系. 分析结果如图 9 和图 10 所示.

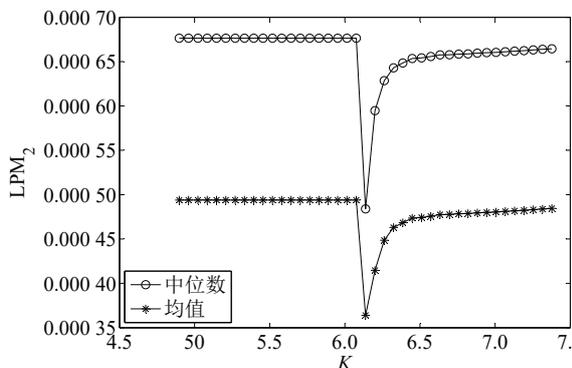


图 9 不同目标收益下敲定价格与 LPM2 关系
Fig. 9 Relation between the strike price and LPM2
with different aims for a return

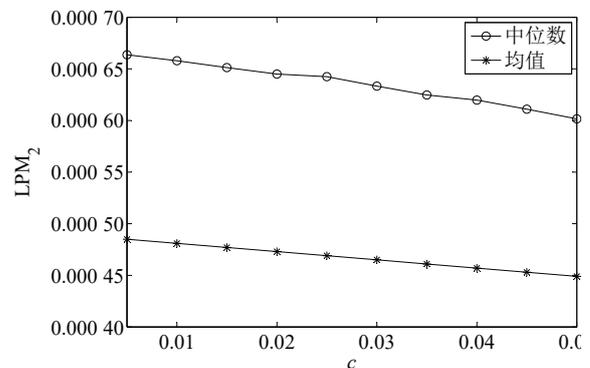


图 10 不同目标收益下预算与 LPM2 关系
Fig. 10 Relation between the budget and LPM2
with different aims for a return

从图 9 和图 10 不难发现,目标收益设置为 $\max\{\text{收益的中位数}, 0\}$ 时得到的下偏矩风险测度显著地大于目标收益取为平均收益的情形. 这说明若将目标收益取为平均收益,套期保值组合的下偏矩风险将会被低估. 这不利于投资者谨慎投资. 而目标收益在两种不同设置下,套期保值决策对下偏矩风险的影响是不变的. 即,最优敲定价格相同,并且随着预算的增加下偏矩风险降低.

6 结束语

考虑到外贸公司面临着复杂多变的汇率风险,本文提出基于 Copula-GARCH 方法的交叉汇率期权套期保值模型,用以对冲汇率下偏矩风险,解决了本国货币与外国货币汇率不存在期权市场而投资者又打算利用汇率期权套期保值的现实问题. 首先,在交叉汇率任意边际分布情形下,利用 Copula 函数构建套期保值组合收益分布函数,进而将交叉期权最优套期保值模型表示成积分解析形式. 然后,利用 GARCH 族模型拟合交叉汇率收益率边际分布,并将最优套期保值模型转化为基于边际分布的积分形式. 最后,通过实证分析了风险厌恶型投资者对欧式看跌期权敲定价格和购买期权预算决策问题. 研究结果表明:

1) 如果本国货币与外国货币汇率不存在期权市场,而与第三国货币存在汇率市场时,外贸公司可以通过交叉汇率期权套期保值对冲汇率风险.

2) 考虑到汇率收益率呈现出尖峰厚尾和聚集性,可以用 GARCH-t 模型预测 CNY/USD 和 USD/EUR 汇率波动率.

3) 由于传统的线性相关性具有局限性,而 Copula 方法不仅可以有效地描述变量之间的相关程度,还能够反映它们之间的相关模式,描述它们的联合分布函数. 因此,利用 Copula 函数可以有效地建立边际分布与联合分布的关系. 通过实证分析发现用 Copula-Frank 函数描述交叉汇率 CNY/USD 和 USD/EUR 的相关结构较合理.

4) 利用期权套期保值的效果要比不利用期权套期保值的效果好. 看跌期权最优敲定价格不受投资者风险厌恶程度的影响,但它随着预算的增加而增大,下偏矩风险随着预算的增加而减少. 为了降低下偏矩风险,建议预算较低的投资者选择平值看跌期权对冲,而预算较高的投资者可以选择实值看跌期权,但敲定价格不宜过大. 对于风险厌恶的投资者而言,应该要增加敲定价格小的期权预算. 将目标收益设置为收益的中位数有利于投资者谨慎投资.

本文所建立的模型具有一般适用性,比如更多 GARCH 族模型拟合时只需要替换模型中的边际分布. 研究所得到的结果可以为外贸公司对冲汇率风险提供参考. 但本文由于只考虑风险厌恶的投资者利用交叉期权套期保值的最优决策问题,也只考虑了购买期权预算成本约束,没有考虑期权交易成本的影响,故未来研究将会进一步考虑不同风险类型投资的决策问题和交易成本因素.

参考文献:

- [1] Bodnar G M, Gebhardt G. Derivatives usage by US non-financial firms: A comparative survey. *Journal of International Financial Management and Accounting*, 1999, 10(3): 153-187.
- [2] 马超群, 王宝兵. 基于 Copula-GARCH 模型的外汇期货套期保值比率研究. *统计与决策*, 2011(12): 124-128.
Ma C Q, Wang B B. Study on the hedging ratio with foreign currency futures based on Copula-GARCH models. *Statistics and Decision*, 1999, 10(3): 153-187. (in Chinese)
- [3] 尹力博, 韩立岩. 人民币外汇期权套保策略: 基于随机规划模型. *管理科学学报*, 2012, 15(11): 31-44.
Yin L B, Han L Y. The hedging value and strategy of RMB foreign currency options: From the perspective of stochastic programming. *Journal of Management Sciences in China*, 2012, 15(11): 31-44. (in Chinese)
- [4] Adam-Müller, A F A. Export and hedging decisions under revenue and exchange rate risk: A note. *European Economic Review*, 1997, 41(7): 1421-1426.
- [5] Wong K P. Export flexibility and currency hedging. *International Economic Review*, 2003, 44(4): 1295-1312.

- [6] Wong K P. International trade and hedging under joint price and exchange rate uncertainty. *International Review of Economics and Finance*, 2013, 27(2): 160–170.
- [7] Kotkatvuori-örnberg J. Dynamic conditional copula correlation and optimal hedge ratios with currency futures. *International Review of Financial Analysis*, 2016, 47(12): 60–69.
- [8] 唐 韬, 谢 赤. 基于状态转换动态 Copula 模型的外汇套期保值研究. *中南大学学报(社会科学版)*, 2015(1): 104–110.
Tang T, Xie C. Hedging foreign exchange through regime-switching dynamic Copula model. *Journal of Central South University (Social Science Edition)*, 2015(1): 104–110. (in Chinese)
- [9] Wong K P. The effects of abandonment options on operating leverage and forward hedging. *International Review of Economics and Finance*, 2006, 15(1): 72–86.
- [10] Wong K P. Operational and financial hedging for exporting firms. *International Review of Economics and Finance*, 2007, 16(4): 459–470.
- [11] 尹力博, 韩立岩. 国际投资汇率风险的综合套保策略研究. *中国管理科学*, 2014, 22(2), 1–6.
Yin L B, Han L Y. Comprehensive strategy for currency risk hedging in global investment. *Chinese Journal of Management Science*, 2014, 22(2): 1–6. (in Chinese)
- [12] Lien D, Tse Y K. Hedging downside risk: futures vs. options. *International Review of Economics and Finance*, 2001, 10(2): 159–169.
- [13] Battermann H L, Brulke M, Broll U. The preferred hedge instrument. *Economics Letters*, 2000, 66(1): 85–91.
- [14] Sakong Y, Hayes D J, Hallam A. Hedging production risk with options. *American Journal of Agricultural Economics*, 1993, 75(2): 408–415.
- [15] Wong K P. Hedging and the competitive firm under correlated price and background risk. *Decisions in Economics and Finance*, 2014, 37(2): 329–340.
- [16] Chang E C, Wong K P. Cross hedging with currency options and futures. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2003, 38(3): 555–574.
- [17] Wong K P. Production decisions in the presence of options: A note. *International Review of Economics and Finance*, 2002, 11(1): 17–25.
- [18] Bajo E, Barbi M, Romagnoli S. Optimal corporate hedging using options with basis and production risk. *North American Journal of Economics and Finance*, 2014, 30: 56–71.
- [19] Bajo E, Barbi M, Romagnoli S. A generalized approach to optimal hedging with option contracts. *The European Journal of Finance*, 2015, 21(9): 713–733.
- [20] 叶永刚, 周子瑜. 我国外汇期货市场发展路径. *中国金融*, 2014(24): 47–48.
Ye Y G, Zhou Z Y. China's foreign exchange futures market development path. *China Finance*, 2014(24): 47–48. (in Chinese)
- [21] 谢 赤, 吴 晓. 无偏的交叉货币期货市场与汇率风险. *数量经济技术经济研究*, 2001, 18(1): 75–78.
Xie C, Wu X. The futures market of unbiased cross-currency and the risks of foreign exchange rate. *Quantitative and Technical Economics*, 2001, 18(1): 75–78. (in Chinese)
- [22] Wong K P. Currency hedging with options and futures. *European Economic Review*, 2003, 47(5): 833–839.
- [23] Álvarez-Díez S, Alfaro-Cid E, Fernández-Blanco M O. Hedging foreign exchange rate risk: Multi-currency diversification. *European Journal of Management and Business Economics*, 2016, 25(1): 2–7.
- [24] 许启发, 张金秀, 蒋翠侠. 基于支持向量分位数回归多期VaR测度. *系统工程学报*, 2014, 29(2): 202–214.
Xu Q F, Zhang J X, Jiang C X. Evaluating multiperiod VaR via support vector quantile regression. *Journal of Systems Engineering*, 2014, 29(2): 202–214. (in Chinese)
- [25] Bawa V S, Linderberg E. Capital market equilibrium in a mean lower partial moment frame work. *Journal of Financial Economics*, 1997, 5(2): 189–200.
- [26] 孔继红, 易志高. 基于下偏矩的期货对冲模型及实证研究. *系统工程*, 2015(11): 32–37.
Kong J H, Yi Z G. The futures hedging model based on LPM and empirical research. *Systems Engine*, 2015(11): 32–37. (in Chinese)
- [27] Lee W Y, Rao R. Mean lower partial moment valuation and lognormally distributed returns. *Management Science*, 1988, 34(34): 446–453.
- [28] Mao J. Models of capital budgeting, E-V vs. E-S. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1970, 4(5): 657–675.
- [29] 孙 艳, 何建敏. 基于LPM的多尺度最优套期保值比率. *系统工程*, 2012, 30(6): 53–58.
Sun Y, He J M. The multi-scale hedge ratios based on LPM. *Systems Engine*, 2012, 30(6): 53–58. (in Chinese)
- [30] Kou S, Peng X, Heyde C C. External risk measures and basel accords. *Mathematics of Operations Research*, 2013, 38(3): 393–417.

- [31] 王 力, 徐美萍. 基于多元t分布和均值-方差模型的投资组合风险分析. 鲁东大学学报(自然科学版), 2016, 32(2): 129-134.
Wang L, Xu M P. Risk analysis of a portfolio based on multivariate t distribution and Mean-Variance model. Ludong University Journal(Natural Science Edition), 2016, 32(2): 129-134. (in Chinese)
- [32] Narayan P K, Narayan S, Prasad A. Understanding the oil price-exchange rate nexus for the Fiji islands. Energy Economics, 2008, 30(5): 2686-2696.
- [33] Wang Z R, Chen X H, Jin Y B, et al. Estimating risk of foreign exchange portfolio: using VaR and CVaR based on GARCH-EVT-Copula model. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2010, 389(21): 4918-4928.
- [34] Wu C C, Chung H, Chang Y H. The economic value of co-movement between oil price and exchange rate using Copula based GARCH models. Energy Economics, 2012, 34(1): 270-282.
- [35] Chang C L, González-Serrano L, Jimenez-Martin J A. Currency hedging strategies using dynamic multivariate GARCH. Mathematics and Computers in Simulation, 2013, 94(8): 164-182.
- [36] 黄友珀, 唐振鹏, 唐 勇. 基于藤 Copula-已实现 GARCH 的组合收益分位数预测. 系统工程学报, 2016, 31(1): 45-54.
Huang Y B, Tang Z P, Tang Y. Portfolio quantile forecasts based on vine copula and realized GARCH. Journal of Systems Engineering, 2016, 31(1): 45-54. (in Chinese)
- [37] 梁建峰, 陈健平, 刘京军. 基于 Copula-GARCH 方法的 LPM 套期保值研究. 系统工程学报, 2011, 26(5): 636-641.
Liang J F, Chen J P, Liu J J. Hedging with LPM based on Copula-GARCH method. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(5): 636-641. (in Chinese)
- [38] Huang J J, Lee K J, Liang H M, et al. Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45(3): 315-324.
- [39] Patton A J. Copula-based Models for financial time series // Handbook of Financial Time Series. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

作者简介:

余 星(1981—), 女, 湖北咸宁人, 博士, 副教授, 研究方向: 套期保值与风险管理, Email: bmyuxing2015@mail.scut.edu.cn;
张卫国(1963—), 男, 陕西安康人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融工程与风险管理, Email: wgzhang@scut.edu.cn;
刘勇军(1981—), 男, 湖南邵阳人, 博士, 教授, 研究方向: 投资组合与风险管理, Email: yjlgx0202@126.com.