

动态消费者社交网络中产品扩散研究

黄琦炜, 张玉林*

(东南大学经济管理学院, 江苏 南京 211189)

摘要: 考虑消费者社交网络的动态性和异质性, 利用复杂网络和微分方程的相关理论, 建立了不考虑广告或价格策略、考虑广告策略和同时考虑广告和价格策略的产品扩散模型, 分析了垄断厂商产品持续扩散的阈值条件. 研究表明: 不考虑广告或价格策略时, 产品持续扩散的阈值条件与网络特性和动态性有关. 厂商实施广告和撇脂定价策略时, 产品持续扩散与价格约束条件有关, 该条件与网络的特性无关. 其他策略情形下, 若潜在消费者中存在创新者, 产品将始终持续扩散.

关键词: 复杂网络; 消费者社交网络; 产品扩散; 营销策略

中图分类号: N945.12

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2019)04-0433-12

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2019.04.001

Product diffusion in dynamic consumer social networks

Huang Qiwei, Zhang Yulin*

(School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 211189, China)

Abstract: Considering the dynamics and the heterogeneity of consumer social networks, this paper establishes models to study the threshold of persistent diffusion of the monopolist's product by using the theories of the complex network and differential equation. Three strategies are studied in the paper, including strategies without considering advertising or pricing, with consideration of advertising and with consideration of both advertising and pricing. The results show that, without considering advertising or pricing strategies, the threshold of persistent diffusion of the product depends on the properties and the dynamics of consumer social networks. When the company implements advertising and skimming pricing strategies, the product can persistently diffuse, which is related to the constraint condition of the price. The condition is unrelated to the properties of networks. In the remaining strategy situations, the product can persistently diffuse if there exist innovators.

Key words: complex networks; consumer social networks; product diffusion; marketing strategy

1 引言

社交网络中伙伴关系影响用户的决策行为. 不少学者利用实证数据验证了这一结论. Centola^[1]在一个1 528人组成的健康社区网站中研究健康行为扩散. Ma等^[2]利用某亚洲移动运营商提供的370万个用户3个月内的历史通话记录生成社交网络, 研究网络中用户相互影响的购买来电铃声的行为. Godinho de

收稿日期: 2016-07-05; 修订日期: 2017-02-27.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71671036; 71171046); 江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(CXLX13-125).

*通信作者

Matos等^[3]利用某欧洲运营商提供的用户11个月内的历史通话记录生成大型社交网络,在网络中研究iPhone 3G手机的扩散.如今消费者购买一些产品越来越倚重社交网络,尤其是在购买一些高科技或体验性产品时,如手机、电影和旅游服务等.可能的原因有两方面,一是现代网络通信技术的进步使得消费者获取产品/服务相关信息的难度和成本降低;二是某些商品价格较高、技术参数复杂或消费者从广告等大众媒介获取的信息有限,但消费者购买决策需要量多质优的产品/服务信息^[4].同时,企业越来越意识到社交网络在产品推广中的重要性,有些企业开始借助社交网络进行销售.2013年小米公司利用QQ空间发布红米手机,并在QQ空间小米官方页面提供预约活动,通过QQ空间转发,半小时内预约用户数突破100万.

消费者利用线下的人际关系网络或线上的社交媒介网络获取产品信息形成消费者社交网络(consumer social networks). Smith等^[5]认为消费者利用社交网络传递产品信息会影响他人决策. Goldenberg等^[6]认为传统的产品扩散模型中消费者社会系统是小世界网络.周彦莉等^[7]认为随着决策目标的多元化和复杂化,决策呈现明显的网络效应.消费者的决策不再是完全独立的个体选择,而是“嵌入”到有特定交流群体制约和影响下的消费者决策网络中.网络结构会影响消费者的决策行为以及消费系统状态.

经典产品扩散研究多数假设消费者间的网络是相互连接的规则网络^[8].但是1998年Watts等^[9]提出的小世界网络和1999年Barabási等^[10]提出的无标度网络表明,社交网络并不都是规则网络,社交网络结构具有差异性.这被许多实证研究证实^[11].不少学者考虑了网络结构的异质性,研究产品在社交网络中的扩散,但大多数研究侧重分析网络结构异质性对产品扩散速度和峰值的影响,或优化企业的营销策略促进产品扩散. Kuandykov等^[12]利用ABM(agent-based model)建模比较随机网络和无标度网络中创新扩散速度,发现在相同市场潜量下随机网络中消费者完全采用所需时间比无标度网络中短. Rahmandad等^[13]利用ABM和微分方程分别建模研究传染病在全连接、晶格、随机、小世界和无标度网络中的扩散,研究发现高聚类系数的网络结构减缓扩散速度,而在小世界和晶格网络中,流行病的峰值较低且到达峰值所需时间更长. Bohlmann等^[14]认为消费者社交网络结构异质性和关系异质性是决定创新扩散的关键因素.段文奇等^[15]基于消费者社交网络结构的异质性,发现对节点度较高的Hub点采取赠样策略比随机赠样显著的提高了新产品市场份额,且网络异构程度中等时运用Hub赠样策略效果最好.黄玮强等^[16]运用基于智能体的仿真发现,无标度网络中随着网络平均度的增大,最优赠样方案下产品扩散的稳态采纳者数量逐渐增加,但网络异构程度与稳态采纳者数量不存在显著的相关关系.

以上文献研究消费者社交网络结构异质性影响产品扩散时,很少考虑消费者社交网络是动态变化的.只需消费者受内部影响的采用概率大于零,产品最终在市场潜量固定的消费者社交网络中能够完全扩散.实际的消费者社交网络是动态变化的,且如果负面影响重大,产品在消费者社交网络中不一定能完全扩散^[17].这是因为一方面消费者社会系统中不断涌入新的有购买需求的消费者,补充了潜在消费者人数;另一方面在论坛或电子商务网站等一些社交网络中,产品正面或负面口碑均能影响消费者购买决策^[6],特别是负面口碑比正面口碑影响更大^[18],消费者有可能失去购买欲望退出消费者社交网络.因此,已有不少学者考虑消费者社交网络的动态性研究产品扩散,但仍是基于Bass模型的假设进行扩展,侧重研究提高模型解释现实问题的精度,且多数假设消费者社交网络是规则网络,没有考虑消费者社交网络的异质性.例如, Mahajan等^[19]认为市场潜量是动态变化的,与社会经济条件、社会人口的增加或减少、政府行为和营销活动有关. Bottomley等^[20]认为市场潜量与价格有关. Horsky^[21]认为消费者成为潜在消费者与其收入和产品价格有关,从而影响市场潜量. Sharif等^[22]则认为市场潜量随人口增加而增加.

已有研究同时考虑消费者社交网络动态性和消费者社交网络结构异质性相对较少,尤其是产品在消费者社交网络中存在扩散失败隐患的情况下,垄断厂商需了解产品在动态消费者社交网络中扩散形态.目前已有学者研究了单产品持续扩散或多产品持续共存的条件.王德鲁等^[23]在因人口出生和死亡、人口迁移或流动使得市场潜量动态变化情形下,研究了两区域市场中可替代产品的扩散,利用正平衡点的局部渐进稳定条件,得出考虑正广告效用情况下两种产品持续共存的条件,和没有广告宣传情况下产品占有市场或被淘汰的阈值,但文献中没有考虑消费者社交网络的异质性. López-Pintado^[24]在市场潜量固定和消费者存在

重复购买情形下, 利用传染病模型得出产品在消费者社交网络中持续扩散的阈值, 且认为该阈值取决于网络中产品扩散机制和网络的度分布. 虽然文献 [24] 考虑了消费者社交网络结构的异质性, 但没有考虑消费者社交网络的动态性.

基于此, 本文同时考虑消费者社交网络的动态性和消费者网络结构的异质性, 研究垄断厂商产品扩散形态. 消费者社交网络的动态性主要是指不断有潜在消费者进入或退出网络和已购买者退出网络. 消费者社交网络结构的异质性指消费者沟通人数的差异, 即节点度的不同. 本文首先利用Liu等^[25]研究动态复杂网络中谣言扩散时处理网络动态性的方法, 构建不考虑广告或价格策略时产品扩散模型, 分析产品持续扩散的阈值条件. 然后将研究问题扩展至企业仅采取广告策略和同时采取广告和价格策略的情形. 最后利用数值仿真验证理论分析的正确性.

2 产品扩散模型

2.1 不考虑广告或价格策略的扩散模型

1) 动态消费者社交网络

依据文献 [25] 的方法, 在消费者社交网络中加入一部分空节点, 通过空节点数量的变化表示网络的动态性, 同时又能保持消费者社交网络的节点度和整体规模不变. 消费者社交网络的动态性描述如下.

假设网络的节点规模为 N , 节点之间用无向连线连接, 表示个体之间互动交换信息. 网络中一部分节点由潜在消费者和已购买产品的消费者占据, 每个消费者仅占据一个节点, 余下节点为空节点. 对每个节点分别赋予一个状态值, 用0、1和2表示, 分别对应三种状态: 0表示空节点, 1表示潜在消费者, 2表示已购买者.

在 t 时刻, 每个新增的潜在消费者进入网络将占据一个空节点, 空节点以概率 c 转变为潜在消费者占据的节点, 节点状态由状态0转变为状态1; 潜在消费者中一部分人由于受到如负面口碑或产品期望效用降低等原因影响失去购买兴趣以概率 μ 退出消费者社交网络, 今后将不再成为潜在消费者重新加入网络中, 节点状态由状态1转变为状态0, 同时潜在消费者中另外一部分人受到正面口碑影响以概率 a 购买产品, 节点状态由状态1转变为状态2; 已购买者由于不发布产品信息或发布无效信息等原因以概率 γ 退出消费者社交网络, 这部分退出消费者社交网络的已购买者也不会再加入网络, 该节点转变为空节点, 将有可能被新增的潜在消费者占据, 即节点状态由状态2转变为状态0. 消费者社交网络中节点状态变化如图1所示.

消费者社交网络的结构特征有许多, 本文仅用消费者社交网络的节点度分布作为关键特征, 消费者选择信息沟通的人数表示消费者的节点度, 节点度分布函数为 $p(k)$, 满足 $\sum_{k=1}^N p(k) = 1$, 即网络中任何节点至少有一个节点与其相连, 消费者节点度的差异表示消费者社交网络结构的异质性.

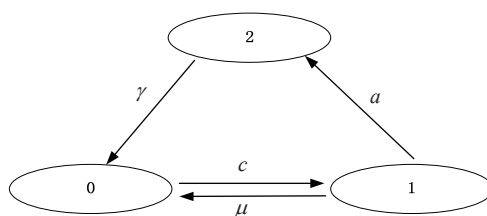


图1 消费者社交网络中节点状态变化图

Fig. 1 The state transition of nodes in consumer social networks

2) 产品扩散规则

假设垄断厂商仅生产一种产品. 每个消费者仅购买一个产品, 且不会重复购买. 潜在消费者可通过口碑相传获取信息, 也可从社交网络中学习获取信息, 例如论坛中产品评测帖子或电商产品评价页面. 由于消费者自身偏好、信息搜索能力和时间成本等因素限制, 潜在消费者与 k 个已购买者沟通获取产品信息.

潜在消费者受其中任一已购买者影响以概率 a 购买产品。 $x_k(t)$ 、 $y_k(t)$ 和 $z_k(t)$ 表示 t 时刻节点度为 k 的潜在消费者密度、已购买者密度和空节点密度,则 $x_k(t) + y_k(t) + z_k(t) = 1$ 。依据平均场理论的核心思想:将相互作用的总体效果等效成一个平均场,不去计算局部、处处不同的相互作用情况^[26]。一个节点度为 k 的潜在消费者同一个节点度为 k' 的已购买者节点连接的条件概率为 $p(k'|k)$,单位时间内单个消费者采用产品的概率为 $ka \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t)$ 。节点度为 k 的潜在消费者人数比例为 $x_k(t)$,单位时间内受已购买者影响购买产品的比例为 $ka x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t)$ 。因此, t 时刻消费者社交网络中总的潜在消费者人数比例为 $x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t)p(k)$,总的已购买者人数比例为 $y(t) = \sum_{k=1}^N y_k(t)p(k)$ 。

3) 产品扩散的基本模型

当企业不实施广告或价格策略时,单位时间内节点度为 k 的潜在消费者人数比例变化来自三部分:一是潜在消费者人数新增比例 $c(1 - x_k(t) - y_k(t))$;二是受已购买者影响购买产品的潜在消费者人数减少比例 $ka x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t)$;三是潜在消费者受负面口碑或产品的期望效用降低等原因影响失去购买欲望而退出网络的人数减少比例 $\mu x_k(t)$ 。单位时间内节点度为 k 的已购买者人数比例的变化来自两部分:一是由潜在消费者购买产品转变为已购买者的人数新增比例 $ka x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t)$;二是已购买者不发布信息或发布无效信息退出网络的人数减少比例 $\gamma y_k(t)$ 。因此,当企业不实施广告或价格策略时,垄断厂商产品在动态消费者社交网络中扩散的基本模型为

$$\begin{cases} \frac{dx_k(t)}{dt} = c(1 - x_k(t) - y_k(t)) - ka x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) - \mu x_k(t) \\ \frac{dy_k(t)}{dt} = ka x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) - \gamma y_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

当网络的度不相关时,可得^[27]

$$\theta = \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) = \frac{\sum_{k'=1}^M k' p(k')y_{k'}(t)}{\langle k \rangle}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

其中 $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^N kp(k)$,表示消费者社交网络的平均度。

2.2 考虑广告策略的扩散模型

经典扩散理论定义仅受广告等大众传媒影响购买产品的消费者为创新者^[28]。当企业实施广告策略时,假设潜在消费者以概率 b 受广告影响购买产品,与不考虑广告或价格策略的产品扩散基本模型相比,变化的是单位时间内节点度为 k 的潜在消费者受大众传媒影响转变为已购买者的人数减少比例为 $bx_k(t)$,其余三部分形式与基本模型中相同,不再详述。而已购买者新增对应的人数比例为 $bx_k(t)$,其余两部分形式与不考虑广告或价格策略的扩散模型中相同,亦不再详述。企业采取广告策略进行产品推广的扩散模型如下

$$\begin{cases} \frac{dx_k(t)}{dt} = c(1 - x_k(t) - y_k(t)) - ka x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) - bx_k(t) - \mu x_k(t) \\ \frac{dy_k(t)}{dt} = ka x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) + bx_k(t) - \gamma y_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3)$$

2.3 考虑广告和价格策略的扩散模型

Robinson等^[29]指出价格影响产品的扩散率。Parker^[30]则认为价格影响产品扩散率和市场潜量。同样Horsky^[21]也认为价格影响市场潜量。胡知能等^[31]指出实际的市场营销活动中,渗透定价策略或撇脂

定价策略是应用较为广泛和被普遍接受的价格策略. 设产品的价格反应函数为 $g_i = (w_i/w_0)^{-\eta}$ [32], 其中 $i \in \{H, L\}$, w_H, w_L 分别表示企业实施撇脂定价和渗透定价时的价格, w_0 表示产品的基准价格, $\eta > 1$. 若企业仅实施价格策略, 通过参数换元法, 或在后述的同时考虑广告和价格策略的模型中令广告影响参数为0, 结论类似, 故仅考虑企业实施价格策略的扩散模型本文不再详述. 下面提出同时考虑广告和价格策略的扩散模型.

当企业实施渗透定价时, 低价格影响产品扩散率 [29], 即同时影响受外部广告影响的概率 b 和受内部口碑影响的概率 a . 因此, 单位时间内节点度为 k 的潜在消费者人数受广告和内部口碑影响变化的比例为 $g_L[kax_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) + bx_k(t)]$, 其余的变化机理与不考虑广告或价格策略的扩散模型相同, 不再详述. 因此, 企业采取广告和渗透定价策略时, 产品扩散模型如下

$$\begin{cases} \frac{dx_k(t)}{dt} = c(1 - x_k(t) - y_k(t)) - g_L[kax_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) + bx_k(t)] - \mu x_k(t) \\ \frac{dy_k(t)}{dt} = g_L[kax_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) + bx_k(t)] - \gamma y_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (4)$$

当企业实施撇脂定价时, 高价格影响消费者社交网络的市场潜量 [21], 即市场潜量、新增潜在消费者和原有潜在消费者人数均受撇脂定价策略的影响. 因此, 节点度为 k 的市场潜量变为 $g_H(x_k(t) + y_k(t))$. 单位时间内节点度为 k 的潜在消费者人数比例变化来自三部分: 一是潜在消费者人数新增比例 $cg_H[1 - g_H(x_k(t) + y_k(t))]$; 二是受广告和内部口碑影响购买产品的潜在消费者人数减少比例 $g_H[kax_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) + bx_k(t)]$; 三是受负面口碑或产品的期望效用降低等原因影响失去购买欲望而退出网络的潜在消费者人数减少比例 $\mu g_H x_k(t)$. 单位时间内节点度为 k 的已购买者人数比例变化来自两部分: 一是由潜在消费者转变为已购买者人数新增比例 $g_H[kax_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) + bx_k(t)]$; 二是已购买者不发布信息或发布无效信息退出网络的人数减少比例 $\gamma y_k(t)$. 企业采取广告和撇脂定价策略时, 产品扩散模型如下

$$\begin{cases} \frac{dx_k(t)}{dt} = cg_H[1 - g_H(x_k(t) + y_k(t))] - kag_H x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) - bg_H x_k(t) - \mu g_H x_k(t) \\ \frac{dy_k(t)}{dt} = kag_H x_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) + bg_H x_k(t) - \gamma y_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (5)$$

3 模型分析

根据微分方程分析平衡点性质的理论和方法, 本节分析前述企业实施三种策略时构建的微分方程系统中平衡点性质, 研究垄断厂商产品扩散形态, 重点分析三种策略下消费者社会网络系统中产品持续扩散的阈值条件.

3.1 不考虑广告或价格策略的扩散模型分析

命题 1 当动态消费者社交网络中潜在消费者受内部影响购买产品的采用概率 $a > \frac{\gamma(c+\mu)\langle k \rangle}{c\langle k^2 \rangle}$ 时, 式(1)的系统中始终存在一个正的平衡点.

证明 令式(1)右侧等于0, 则有

$$\begin{cases} c(1 - x_k(t) - y_k(t)) - kax_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) - \mu x_k(t) = 0 \\ kax_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) - \gamma y_k(t) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

可得方程组(6)的两个平衡解

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} \frac{c}{c+\mu} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_k^* = \begin{pmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \end{pmatrix} = \frac{c}{c+\mu+\frac{c+\gamma}{\gamma}ka\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ka\theta}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

将 $\mathbf{E}_k^*$ 中 $y_k(t)$ 代入式(2), 可得 θ 的自洽方程 $\theta = \frac{ca}{\gamma\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M \frac{(k')^2 \theta p(k')}{c+\mu+\frac{c+\gamma}{\gamma}k'a\theta}$.

令 $F(\theta) = \frac{ca}{\gamma\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M \frac{(k')^2 \theta p(k')}{c+\mu+\frac{c+\gamma}{\gamma}k'a\theta} - \theta$. 显然 $\theta = 0$ 时, $F(0) = 0$. 又

$$\frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} = \frac{-2}{\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M \frac{ca^2 \gamma (c+\mu)(c+\gamma)(k')^3 p(k')}{[\gamma(c+\mu) + (c+\gamma)k'a\theta]^3},$$

其中 θ 在 $[0, 1]$ 变化, a, c, μ 和 γ 的取值范围均为 $(0, 1)$, 故 $\frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} < 0$, $F(\theta)$ 在 $0 \leq \theta \leq 1$ 上是凹函数. 同时有

$$F(1) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M \frac{k' p(k') c k' a}{\gamma(c+\mu) + (c+\gamma)k'a} - 1 < 0, \quad (7)$$

故式(1)存在唯一正解的充分必要条件为 $\frac{dF(\theta)}{d\theta}|_{\theta=0} > 0$, 即 $\frac{dF(\theta)}{d\theta}|_{\theta=0} = \frac{ca\langle k^2 \rangle}{\gamma(c+\mu)\langle k \rangle} - 1 > 0$, 其中 $\langle k^2 \rangle = \sum_{k=1}^N \langle k^2 \rangle p(k)$, 表示消费者社交网络节点度的二阶矩. 因此, 当 $a > \frac{\gamma(c+\mu)\langle k \rangle}{c\langle k^2 \rangle}$, 系统(1)中始终存在一个正的平衡点. 证毕.

下面证明命题1中平衡解的稳定性, 分析产品持续扩散的阈值条件. 为此引入引理1和引理2.

引理1 ^[33] 考虑系统

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{N}(\mathbf{y}), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 的矩阵, 在 $D \subset R^n$ 内 $\mathbf{N}(\mathbf{y})$ 连续可微. 假设系统同时满足:

- 1) 紧凸集 $S \subset D$ 是系统(8)的正不变集, 且 $\mathbf{0} \in S$;
- 2) $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{N}(\mathbf{y})\|/\|\mathbf{y}\| = 0$;
- 3) 对于所有的 $\mathbf{y} \in S$, 存在 $r > 0$ 和 $\mathbf{A}^T$ 的一个实特征向量 $\boldsymbol{\omega}$, 使得 $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \geq r\|\mathbf{y}\|$ 成立;
- 4) 对于所有的 $\mathbf{y} \in S$, $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{N}(\mathbf{y}) \leq 0$;
- 5) 在集合 $H = \{\mathbf{y} \in S | \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{N}(\mathbf{y}) = 0\}$ 中, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 是系统(8)的最大的正不变集.

则要么 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 在集合 S 中是全局渐进稳定的; 要么对于任意的 $\mathbf{y}_0 \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$, 系统(8)的解 $\phi(t, \mathbf{y}_0)$ 满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, \mathbf{y}_0)\| \geq m$, 其中 m 与 $\mathbf{y}_0$ 无关. 且系统(8)存在一个常数解 $\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^* \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$.

引理2 ^[34] 系统满足引理1所述, 令 $R_0 = \frac{ca\langle k^2 \rangle}{\gamma(c+\mu)\langle k \rangle}$,

1) 当 $R_0 < 1$ 时, 系统的平衡点 $\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} \frac{c}{c+\mu} \\ 0 \end{pmatrix}$ 是全局渐进稳定.

2) 当 $R_0 > 1$ 时, 系统中存在唯一的正平衡点使得该系统中产品长期持续扩散, 即在 $x_k(0) > 0, y_k(0) > 0$ 条件下, 对于系统(2.1)任意解 $(x_k(t), y_k(t))$, 存在实数 $\varepsilon > 0$, 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \{x_k(t), y_k(t)\}_{k=1}^N > \varepsilon$ 成立.

命题2 当 $R_0 = \frac{ca\langle k^2 \rangle}{\gamma(c+\mu)\langle k \rangle} > 1$, 式(1)的社会系统中存在唯一的正平衡点使得该系统中产品长期持续扩散.

证明 由于现实环境中消费者几乎不可能同网络中所有的已购买者沟通获取信息. 因此, 假设潜在消费

者最大的接触数量为 Z . 当 $k > Z, p(k) = 0$.

对于系统(1)的子空间 $\Omega = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_Z, y_Z)^T \in R^{2Z} | x_k \geq 0, y_k \geq 0, x_k + y_k \leq 1, 1 \leq k \leq Z\}$, 很容易验证出空间 Ω 是正的不变集, 且是紧凸集.

则系统(1)在平衡点 $(\frac{c}{c+\mu}, 0)^T$ 处的雅可比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} -c-\mu & -c-b_1 & \cdots & 0 & -b_{1j} & \cdots & 0 & -b_{1Z} \\ 0 & b_1-\gamma & \cdots & 0 & b_{1j} & \cdots & 0 & b_{1Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -b_{i1} & \cdots & -c-\mu & -c-b_j & \cdots & 0 & -b_{iZ} \\ 0 & b_{i1} & \cdots & 0 & b_j-\gamma & \cdots & 0 & b_{iZ} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -b_{Z1} & \cdots & 0 & -b_{Zj} & \cdots & -c-\mu & -c-b_Z \\ 0 & b_{Z1} & \cdots & 0 & b_{Zj} & \cdots & 0 & b_Z-\gamma \end{pmatrix} \in R^{2Z \times 2Z}, \quad (9)$$

$$\text{其中 } b_j = \frac{ac}{c+\mu} \frac{j \times jp(j)}{\langle k \rangle}, b_{ij} = \frac{ac}{c+\mu} \frac{i \times jp(j)}{\langle k \rangle}.$$

由式(9)的特征多项式可得

$$(\lambda + c + \mu)^Z (\lambda + \gamma)^{Z-1} (\lambda + \gamma - \sum_{j=1}^Z b_j) = (\lambda + c + \mu)^Z (\lambda + \gamma)^{Z-1} (\lambda - \gamma (\frac{ca\langle k^2 \rangle}{\gamma(c+\mu)\langle k \rangle} - 1)). \quad (10)$$

因此, 当 $R_0 = \frac{ca\langle k^2 \rangle}{\gamma(c+\mu)\langle k \rangle} > 1$ 时, 系统(1)在平衡点 $(\frac{c}{c+\mu}, 0)^T$ 处的雅可比矩阵存在唯一的正特征值. 依据Perron-Frobenius 原理, 当 $R_0 > 1$ 时, 雅可比矩阵的所有特征值中实部最大的为正数. 因此, 由引理2知命题2成立. 证毕.

命题1和命题2表明, 当潜在消费者购买产品决策仅受已购买者影响时, 潜在消费者受消费者社交网络内部影响购买产品的采用概率至少要高于一个临界值, 才能保证垄断厂商的产品在动态消费者社交网络中持续扩散; 当采用概率低于该临界值时, 垄断厂商的产品无法持续扩散而扩散失败. 该临界值与动态消费者社交网络的网络特性(节点度分布和网络规模)和消费者社交网络的动态性(新增潜在消费者的比例、潜在消费者失去购买欲望的概率和已购买者不发布信息或发布无效信息的概率)有关.

3.2 考虑广告策略的扩散模型分析

命题3 当潜在消费者中存在创新者($b > 0$), 且企业实施广告策略, 产品在动态消费者社交网络中始终持续扩散.

证明 令式(3)右侧等于0得到方程的正平衡解为

$$\begin{pmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \end{pmatrix} = \frac{c}{c+\mu+\frac{c+\gamma}{\gamma}(b+ka\theta)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b+ka\theta}{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

将式(11)中 $y_k(t)$ 代入式(2), 可得 θ 的自治方程

$$\theta = \frac{c}{\gamma\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M k'p(k') \frac{b+ak'\theta}{c+\mu+\frac{c+\gamma}{\gamma}(b+k'a\theta)}. \quad (12)$$

令 $F(\theta) = \frac{c}{\gamma\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M k'p(k') \frac{b+ak'\theta}{c+\mu+\frac{c+\gamma}{\gamma}(b+ak'\theta)} - \theta$. 由于 $\theta \in [0, 1]$, a, b, c, μ 和 γ 的取值范围均为 $(0, 1)$, 因而有

$$F(0) = \frac{cb}{\gamma(c+\mu)+b(c+\gamma)} > 0, F(1) = \frac{\sum_{k'=1}^M k'p(k') \frac{c(b+ak')}{\gamma(c+\mu)+(c+\gamma)(b+ak')}}{\langle k \rangle} - 1 < 0, \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} < 0,$$

即 $F(\theta)$ 在 $0 \leq \theta \leq 1$ 上恒有一正解. 故潜在消费者中存在创新者时, 企业实施广告策略使得产品在动态消费者社交网络中可持续扩散. 证毕.

命题3表明, 如果在产品扩散周期内潜在消费者中存在创新者($b > 0$), 即部分消费者由于对产品品牌有偏好或喜欢试用新产品等原因购买产品. 企业采取广告策略后, 产品在动态消费者社交网络中将始终持续扩散, 不存在约束条件.

另外, 当不考虑消费者社交网络中有新的潜在消费者进入, 潜在消费者也不会退出, 已购买者都会发布正面信息, 消费者社交网络是规则网络, 则模型(3)可退化为经典的Bass模型.

3.3 考虑广告和价格策略的扩散模型分析

命题4 当企业实施广告和渗透定价策略时, 产品在动态消费者社交网络中持续扩散不存在约束条件, 且单位时间内新增的已购买者人数比例大于仅实施广告策略时的情形.

证明 令式(4)右侧等于0得到方程组的正平衡解

$$\begin{pmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \end{pmatrix} = \frac{c}{(c + \mu) + (c + \gamma) \frac{g_L(ak\theta + b)}{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g_L(ak\theta + b)}{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

设 $ag_L = a'$, $bg_L = b'$, 式(4)与式(3)的正平衡解形式上相似. 因此, 同时考虑广告和渗透定价策略情形下的结论与仅考虑广告策略情形下的结论相似, 即产品在动态消费者社交网络中持续扩散不存在限制条件.

企业采取广告策略的系统(3)中节点度为 k 的已购买者人数比例 $y_k(t)$ 随时间逐渐增加并最终达到稳定状态. 因 $g_L > 1$, $ag_L = a' > a$, $bg_L = b' > b$, 单位时间内系统(4)中受广告和内部影响新增的已购买者人数比例大于仅实施广告策略的情形, 且影响已购买者退出系统的比例系数未发生变化. 因此, 单位时间内系统(4)新增的已购买者人数比例大于系统(3). 证毕.

命题4表明, 当企业同时实施广告和渗透定价策略时, 产品在动态消费者社交网络中始终持续扩散, 类似企业仅实施广告策略的情形. 但渗透定价放大了广告和消费者之间相互沟通的影响效果, 使得产品扩散的速度变快.

命题5 在网络的度分布服从幂律分布的动态消费者社交网络中, 当企业同时实施广告和撇脂定价策略时, $\frac{\gamma}{c} \geq \frac{1}{4}$ 或 $\frac{\gamma}{c} < \frac{1}{4}$ 且 $w_H < w_1$ 使得产品持续扩散.

证明 令式(5)右侧等于0得到方程组的正平衡解

$$\begin{pmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \end{pmatrix} = \frac{cg_H}{(cg_H + \mu)g_H + (cg_H^2 + \gamma) \frac{g_H}{\gamma}(ak\theta + b)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g_H}{\gamma}(ak\theta + b) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

将式(14)中 $y_k(t)$ 代入式(2)中有

$$\theta = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M k' p(k') \frac{cg_H(ak'\theta + b)}{\gamma(cg_H + \mu) + (cg_H^2 + \gamma)(b + ak'\theta)}. \quad (15)$$

令

$$F(\theta) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M k' p(k') \frac{cg_H(ak'\theta + b)}{\gamma(cg_H + \mu) + (cg_H^2 + \gamma)(b + ak'\theta)} - \theta.$$

由于 $F(0) = \frac{cbg_H}{\gamma(cg_H + \mu) + b(cg_H^2 + \gamma)} > 0$, $\frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} < 0$, 其中 a, b, c, μ 和 γ 的取值范围均为 $(0, 1)$, $g_H > 0$, 则 $F(\theta) = 0$ 在 $\theta \in [0, 1]$ 有唯一正解的充要条件为

$$F(1) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'=1}^M \frac{k' p(k') cg_H(ak' + b)}{\gamma(cg_H + \mu) + (cg_H^2 + \gamma)(ak' + b)} - 1 \leq 0. \quad (16)$$

对于网络的度分布服从幂律分布的动态消费者社交网络, 由式(16)可得

$$g_H^2 - g_H + \frac{\gamma}{c} \geq 0. \quad (17)$$

当 $\frac{\gamma}{c} \geq \frac{1}{4}$ 时, 式(17)恒成立. 此时企业实施撇脂定价策略的价格变化范围仅需保证新增已购买者比例不要过小即可.

当 $\frac{\gamma}{c} < \frac{1}{4}$ 时, $w_H < w_1$ 或 $w_H > w_2$ 使得式(17)恒成立, 其中 $w_1 = w_0(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4\gamma}{c}})^{-\frac{1}{\eta}}$, $w_2 = w_0[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4\gamma}{c}}]^{-\frac{1}{\eta}}$. 但当 $w_H > w_2$ 时, 依据模型的假设, w_H 足够大时, 单位时间内新增的节点度为 k 的潜在消费者人数比例 $cg_H[1 - g_H(x_k(t) + y_k(t))]$, 和单位时间内节点度为 k 的潜在消费者转变为已购买者的人数比例 $g_H[kax_k(t) \sum_{k'=1}^M p(k'|k)y_{k'}(t) + bx_k(t)]$ 均非常小, 与实际背景不吻合. 因此, 当 $\frac{\gamma}{c} < \frac{1}{4}$ 时, $w_H < w_1$, 表示产品价格满足一定的约束条件, 才能保证产品持续扩散. 证毕.

命题5表明, 当企业同时实施广告和撇脂定价策略时, 要保证企业的产品在网络的度分布服从幂律分布的动态消费者社交网络中持续扩散, 产品价格存在约束条件. 该价格约束条件与动态消费者社交网络的网络特征无关, 仅与动态消费者社交网络新增潜在消费者的比例和已购买产品的消费者不发布信息或发布无效信息的概率有关.

4 仿真

本节利用Matlab编程仿真, 首先对比分析企业不同策略下产品在动态消费者社交网络中的扩散形态. 然后验证企业不采取任何策略和企业同时采取广告和撇脂定价时, 持续扩散或扩散失败临界条件的存在性. 最后验证动态消费者社交网络特征变化对产品扩散的影响. 模型的参数设置: 网络的节点规模数为 $N = 200$, 消费者社交网络节点度服从幂律分布 $p(k) = mk^{-r}$, 且 $\sum_{k=1}^N mk^{-r} = 1$. 在扩散形式分析和阈值条件验证中假设 $r = 3$, 在网络特征影响的对比分析中假设 $r_1 = 3, r_2 = 2$. 新增潜在消费者比例系数 $c = 0.01$, 内部影响系数 $a = 0.01$, 广告影响系数 $b = 0.005$, 潜在消费者者失去购买欲望退出消费者社会系统的比例 $\mu = 0.003$, 已购买者退出网络的比例 $\gamma = 0.005$, 渗透定价时 $w_L/w_0 = 0.75$, 撇脂定价时 $w_H/w_0 = 4/3$, 价格影响系数 $\eta = 1.2$. 为了便于比较分析, 选取仿真时期数相同.

首先, 不考虑广告或价格策略、仅考虑广告策略、同时考虑广告和渗透定价策略及同时考虑广告和撇脂定价策略的扩散模型仿真图如图2、图3、图4和图5所示.

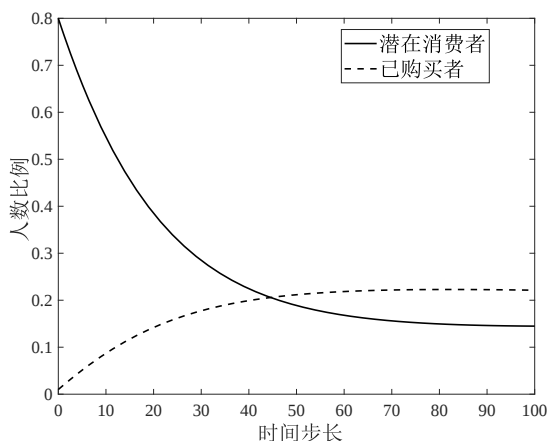


图2 不考虑广告或价格策略

Fig. 2 Without considering advertising or pricing strategies

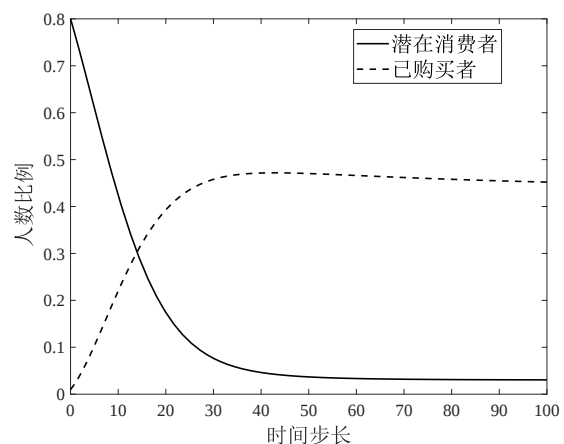


图3 考虑广告策略

Fig. 3 With considering advertising strategy

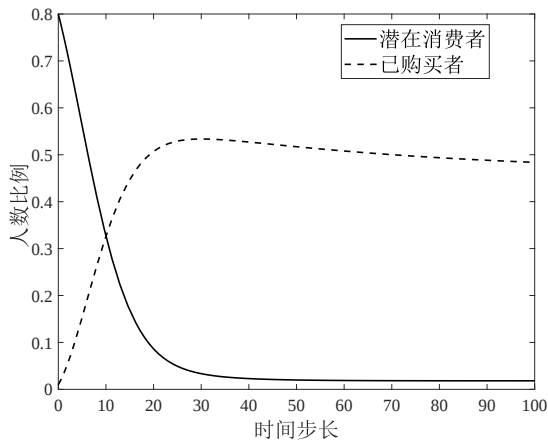


图4 广告和渗透定价策略

Fig. 4 Advertising and penetration pricing strategies

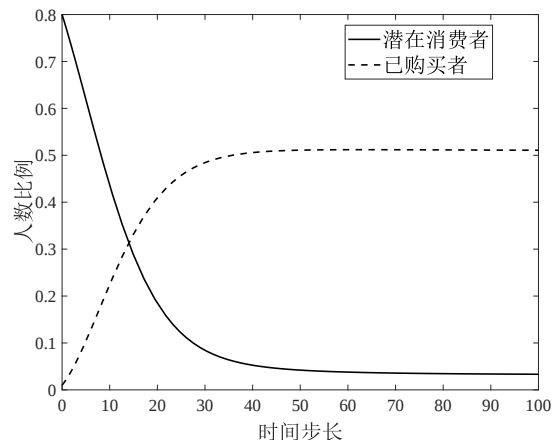


图5 广告和撇脂定价策略

Fig. 5 Advertising and skimming pricing strategies

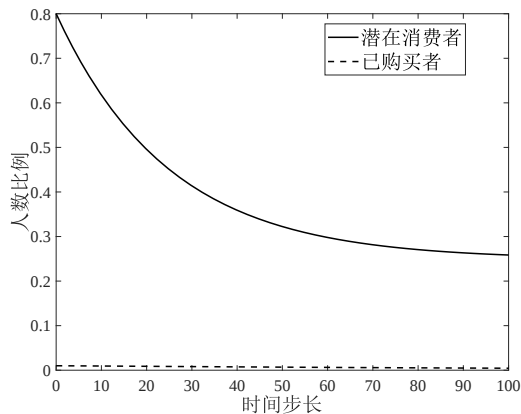


图6 不考虑广告或价格策略时扩散失败

Fig. 6 Diffusion failure without considering advertising or pricing strategies

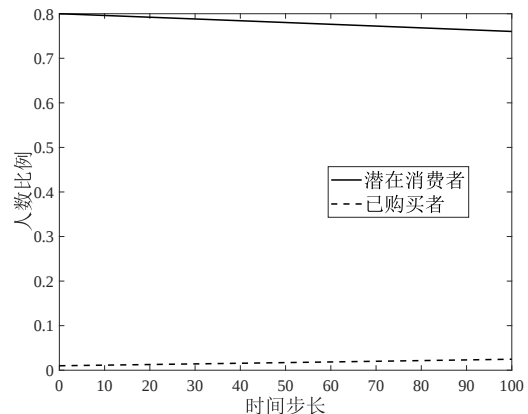


图7 考虑广告和撇脂定价策略时扩散失败

Fig. 7 Diffusion failure with considering advertising and skimming pricing strategies

可以发现上述四种情形下产品扩散形式具有共同点: 动态消费者社交网络中潜在消费者的人数比例均在持续下降, 已购买者人数比例均在持续上升, 但变化趋势逐渐变缓, 并最终达到稳定状态. 与经典的Bass模型不同的是, Bass模型中所有潜在消费者最终将完全采用产品, 即最终潜在消费者人数比例等于0.

因参数取值相同, 仅比较前三种情形下产品扩散形式的不同点: 企业不实施广告或价格策略与实施广告策略的扩散形式相比, 即图2和图3对比, 可以发现后者策略下扩散到达稳定状态所需时间缩短, 同时稳定状态时已购买者人数比例也相对高些. 而比较图3和图4曲线的斜率变化可以发现, 企业仅实施广告策略与同时实施广告和渗透定价策略相比, 后者策略下单位时间内产品扩散的速度更快.

然后, 验证仅受内部影响时采用概率的临界条件和同时考虑广告和撇脂定价策略时价格存在约束条件的存在性. 通过仿真取参数 $a = 0.0001$ 得到不考虑广告或价格策略的基本模型中产品无法持续扩散(失败)图6, 以及取 $w_H/w_0 = 10$ 时企业定价过高使得产品在消费者社交网络中无法持续扩散(失败)图7. 图6表明, 已购买者人数比例由于扩散系数过小而逐渐减小趋于零, 潜在消费者人数比例由于消费者失去购买欲望退出社会系统而减小, 验证了不考虑广告或价格策略的基本模型中采用概率存在临界条件. 图7表明, 已购买者人数比例增长缓慢, 验证了企业同时实施广告和撇脂定价策略时, 产品价格存在约束条件. 而在保持相同参数取值一致的前提下, 仅考虑广告和同时考虑广告和渗透定价策略两种情形下的产品存在持续扩散的稳定状态, 即不存在扩散系数和价格约束条件. 扩散形式与图2和图3类似, 不再列出.

最后, 验证消费者社交网络中节点度分布函数的参数变化对于产品扩散的影响. 图8和图9显示: 当网络的节点度分布函数的参数 r 变小时, 产品扩散达到稳定状态所需的时间缩短, 且稳定状态时已购买者人数比例变大.

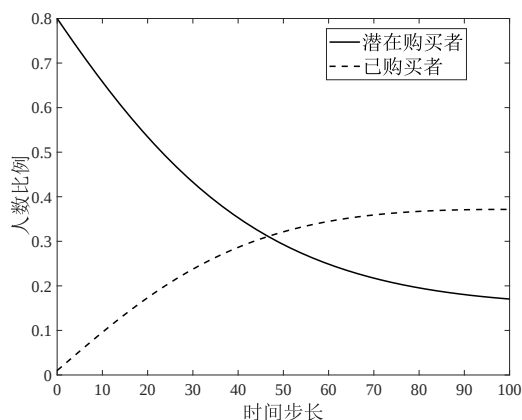


图8 幂律分布参数 $r_1 = 3$

Fig. 8 The parameter of power law distribution $r_1 = 3$

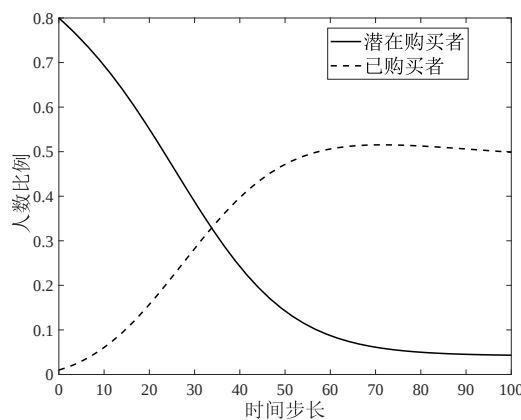


图9 幂律分布参数 $r_2 = 2$

Fig. 9 The parameter of power law distribution $r_2 = 2$

5 结束语

本文同时考虑消费者社交网络的动态性和消费者社交网络结构的异质性, 构建了垄断厂商产品扩散的微分方程模型, 研究不考虑广告或价格策略、仅考虑广告策略和同时考虑广告和价格策略时, 产品扩散形态和持续扩散阈值条件. 研究发现: 不考虑广告或价格策略时, 产品持续扩散的阈值条件与消费者社交网络的网络特性和消费者社交网络的动态性有关; 仅考虑广告策略和企业同时实施广告和渗透定价策略时, 若网络中存在创新者, 产品始终持续扩散, 但后者产品扩散的速度更快; 企业同时实施广告和撇脂定价时, 产品持续扩散与价格约束条件有关: 该条件与动态消费者社交网络的网络特性无关, 而与新增潜在消费者的比例, 以及已购买者不发布信息或发布无效信息的概率有关.

本文模型仅假设消费者网络结构的异质性, 后续研究可进一步考虑消费者在其他方面的异质性, 研究产品在消费者社交网络中扩散.

参考文献:

- [1] Centola D. The spread of behavior in an online social network experiment. *Science*, 2010, 329(5996): 1194–1197.
- [2] Ma L Y, Krishnan R, Montgomery A L. Latent homophily or social influence: An empirical analysis of purchase within a social network. *Management Science*, 2015, 61(2): 454–473.
- [3] Godinho de Matos M, Ferreira P, Krackhardt D. Peer influence in the diffusion of iPhone 3G over a large social network. *MIS Quarterly*, 2014, 38(4): 1103–1133.
- [4] 官振中, 任建标. 不确定性需求下的易逝性高科技产品定价策略研究. *系统工程学报*, 2011, 26(1): 113–120.
Guan Z Z, Ren J B. Optimal pricing policy research for perishable hi-tech products with uncertain demand. *Journal of Systems Engineering*, 2011, 26(1): 113–120. (in Chinese)
- [5] Smith T, Coyle J R, Lightfoot E, et al. Reconsidering models of influence: The relationship between consumer social networks and word-of-mouth effectiveness. *Journal of Advertising Research*, 2007, 47(4): 387–397.
- [6] Goldenberg J, Libai B, Moldovan S, et al. The NPV of bad news. *International Journal of Research in Marketing*, 2007, 24(3): 186–200.
- [7] 周彦莉, 赵炳新. 消费者决策关联关系及个体网络研究. *中国管理科学*, 2013, 21(4): 171–177.
Zhou Y L, Zhao B X. Research on consumer decision-making relationships and individual network. *Chineses Journal of Management Science*, 2013, 21(4): 171–177. (in Chinese)

- [8] Peres R, Muller E, Mahajan V. Innovation diffusion and new product growth models: A critical review and research directions. *International Journal of Research in Marketing*, 2010, 27(2): 91–106.
- [9] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 1998, 393(6684): 440–442.
- [10] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286(5439): 509–512.
- [11] Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74(1): 47–97.
- [12] Kuandikov L, Sokolov M. Impact of social neighborhood on diffusion of innovation S-curve. *Decision Support Systems*, 2010, 48(4): 531–535.
- [13] Rahmandad H, Sterman J. Heterogeneity and network structure in the dynamics of diffusion: Comparing agent-based and differential equation models. *Management Science*, 2008, 54(5): 998–1014.
- [14] Bohlmann J D, Calantone R J, Zhao M. The effects of market network heterogeneity on innovation diffusion: An agent-based modeling approach. *Journal of Production Innovation Management*, 2010, 27(5): 741–760.
- [15] 段文奇, 陈忠, 陈晓荣. 基于复杂网络的新产品赠样目标优化策略. *系统工程理论与实践*, 2006, 26(9): 77–82.
Duan W Q, Chen Z, Chen X R. Strategies of optimizing sampling targets for new product based on complex networks. *Systems Engineering: Theory and Practice*, 2006, 26(9): 77–82. (in Chinese)
- [16] 黄玮强, 庄新田, 姚爽. 网络外部性条件下新产品扩散的赠样策略研究. *管理科学学报*, 2009, 12(4): 51–63.
Huang W Q, Zhuang X T, Yao S. Sampling Strategies for diffusion of new products with network externality. *Journal of Management Sciences in China*, 2009, 12(4): 51–63. (in Chinese)
- [17] Campbell A. Word-of-mouth communication and percolation in social networks. *The American Economic Review*, 2013, 103(6): 2466–2498.
- [18] Chen Y B, Wang Q, Xie J H. Online social interactions: A nature experiment on word of mouth versus observational learning. *Journal of Marketing Research*, 2011, 48(4): 238–254.
- [19] Mahajan V, Peterson R A. Innovation diffusion in a dynamic potential adopter population. *Management Science*, 1978, 24(15): 1589–1597.
- [20] Bottomley P A, Fildes R. The role of prices in models of innovation diffusion. *Journal of Forecasting*, 1998, 17(7): 539–555.
- [21] Horsky D. A diffusion model incorporating product benefits, price, income and information. *Marketing Science*, 1990, 9(4): 342–365.
- [22] Sharif M N, Ramanathan K. Binomial innovation diffusion models with dynamic potential adopter population. *Technological Forecasting and Social Change*, 1981, 20(1): 63–87.
- [23] 王德鲁, 刘芸, 宋学峰. 基于两区域市场的可替代产品扩散模型及其稳定性. *系统工程理论与实践*, 2012, 32(8): 1692–1703.
Wang D L, Liu Y, Song X F. Substitute products diffusion model and stability in two regional markets. *Systems Engineering: Theory and Practice*, 2012, 32(8): 1692–1703. (in Chinese)
- [24] López-Pintado D. Diffusion in complex social networks. *Games and Economic Behavior*, 2008, 62(2): 573–590.
- [25] Liu J Z, Tang Y F, Yang Z R. The spread of disease with birth and death on networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2004, P08008.
- [26] 何大韧, 刘宗华, 汪秉宏. 复杂网络研究的一些统计物理学方法及其背景. *力学进展*, 2008, 38(6): 692–701.
He D R, Liu Z H, Wang B H. Some statistical physics methods for investigations of complex networks and their background. *Advances in Mechanics*, 2008, 38(6): 692–701. (in Chinese)
- [27] Nekovee M, Moreno Y, Bianconi G, et al. Theory of rumor spreading in complex social networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, 374(1): 457–470.
- [28] Bass F M. A new product growth for model consumer durables. *Management Science*, 1969, 15(5): 215–227.
- [29] Robinson B, Lakhani C. Dynamic price models for new-product planning. *Management Science*, 1975, 21(10): 1113–1122.
- [30] Parker P M. Price elasticity dynamics over the adoption life cycle. *Journal of Marketing Research*, 1992, 29(3): 358–367.
- [31] 胡知能, 裴玉蓉. 价格策略下商品赠送对多代产品扩散的影响. *系统工程学报*, 2013, 28(3): 316–326.
Hu Z N, Pei Y R. Impact of product sampling on the diffusion of multi-generation products based on the pricing strategy. *Journal of Systems Engineering*, 2013, 28(3): 316–326. (in Chinese)
- [32] Mesak H I. Incorporating price, advertising and distribution in diffusion models of innovation: Some theoretical and empirical results. *Computers and Operations Research*, 1996, 23(10): 1007–1023.
- [33] Lajmanovich A, Yorke J A. A deterministic model for gonorrhea in nonhomogenous population. *Mathematical Biosciences*, 1976, 28(3–4): 221–236.
- [34] Zhu G H, Fu X C, Chen G R. Spreading dynamics and global stability of a generalized epidemic model on complex heterogeneous networks. *Applied Mathematical Modeling*, 2012, 36(12): 5808–5817.

作者简介:

黄琦炜 (1982—), 男, 湖北汉川人, 博士生, 讲师, 研究方向: 复杂网络与创新扩散, Email: huangqiwei@outlook.com;

张玉林 (1964—), 男, 江苏兴化人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 管理信息系统, 收益管理等, Email: zhangyl@seu.edu.cn.