考虑资金借贷与资金约束的单产品批量问题

陈 震, 张人千*

(北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100191)

摘要: 考虑资金借贷与资金约束对企业生产计划的影响, 企业在各阶段的资金量必须大于等于零以避免破产, 并且企业的现有资金量必须大于等于该阶段的总生产成本时才能生产一定数量的产品, 否则需要借贷资金, 或者减少生产量. 以企业的期末收益最大作为决策目标, 构建包含初始借贷资金与资金约束的单产品批量问题模型. 通过对问题数学性质的分析, 将原问题转换为最长路径问题, 提出一个多项式时间的递推算法, 并用一个启发式方法对结果调整使其更接近最优解. 当各阶段单位可变生产成本相等时, 算法可以在多项式时间内得到最优解; 当各阶段单位生产成本不相等时, 该算法得到可行解, 数值实验显示其与最优解的误差较小; 当问题规模较大时, 本文算法与 CPLEX 12.6.2 相比具有计算效率优势.

关键词: 批量生产问题; 资金借贷; 资金约束; 收益最大模型

中图分类号: F57 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2019)02−0266−11

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2019.02.010

Single item lot sizing problem considering loaning and capital constraint

Chen Zhen, Zhang Renqian*

(School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 1000191, China)

Abstract: This paper investigates the influence of capital and loaning on an enterprise’s production planning. When an enterprise starts to produce a certain number of products, its capital should be no less than the total production cost and above zero to avoid bankruptcy. Otherwise the enterprise must borrow money, or decrease the production quantity. This paper formulates a profit maximization model considering both the initial loan and capital constraint for the single item lot sizing problem. This problem is converted into a travel salesman problem and a polynomial recursive algorithm and a heuristic adjustment are proposed to solve it. Our algorithm can get an optimal solution when the unit variable production costs are equal and get a feasible solution in other cases. Numerical analysis shows its deviation errors with optimal solutions are rather low and it has computation efficiency advantage compared with CPLEX 12.6.2 when the problem scale is large.

Key words: lot sizing problem; loan/borrow money; capital constraint; profit maximization problem

1 引 言

在现实生活中, 很多企业, 尤其是中小型企业往往面临资金不足的问题, “融资难”问题一直困扰很多企业的发展. 资金短缺使得企业达不到设计生产能力, 难以扩大生产规模或进行技术改造, 企业需要通过各种

收稿日期: 2016−03−17; 修订日期: 2016−09−27.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71271010); 航空科学基金资助项目(2014ZG51077).
∗ 通信作者

途径借贷资金来维持生产. 国家统计局抽样调查的 3.8 万家小型微型工业企业经营状况显示, 仅有 15.5 % 的小型微型企业能够获得银行贷款[1]. 另外一个关于民营建筑企业的调研显示, 向商业银行贷款是企业最为普遍的融资行为; 特级民企, 上市民企以及各地区由大中型国企改制的民营企业, 大部分银行授信度高, 相对容易获取银行贷款; 而中小型民企因为规模较小, 利润微薄, 一般都避免进行较高利率的银行贷款等融资活动, 转而通过内部员工融资, 民间借贷等途径解决资金问题[2]. 因此, 资金短缺与借贷是不少企业经常面临的问题.

企业在经营管理中, 往往根据未来多个阶段的需求数量制定生产计划, 例如年生产计划, 月生产计划, 周生产计划等, 这产生了批量生产问题(lot sizing problem). 对于无能力约束的批量生产问题(uncapacitated lot sizing problem), Wagner 等[3] 提出了著名的 Wagner-Whitin 算法求解, 该算法为动态规划算法, 计算复杂度为 $\mathrm{O}(n^2)$. 此后, 大量学者对该问题进行了拓展, 例如考虑生产能力约束[4,5], 多产品[4], 多层次[6], 随机需求[7]等. 各种数学方法被用来求解这些问题, 例如拉格朗日松弛法[4], 分支定界法[5], 分段线性拟合法[7], 启发式方法[6−8,10−13]等. 对批量问题的总结, 详见文献[14–17].

上述文献往往以总成本最小作为求解目标, 一些学者在批量生产问题中还引入产品价格, 构建了收益最大模型. Haugen 等[18]考虑价格与需求的负相关关系, 构建了利润最大化的有能力约束的批量生产问题, 该模型可以比较容易地得到可行解. Aksen 等[19]研究了允许缺货的单产品的无能力约束的批量生产问题, 作者证明若企业在某个阶段缺货, 则该阶段的所有需求量都要缺货, 并设计了一个逆推的动态规划算法求解. Aksen[20]考虑了信誉损失时的无能力约束批量问题, 若企业在一个阶段缺货, 则下个阶段的需求量会减少, 作者首先用动态规划算法求得一个初始解, 然后用一系列启发式调整的方法对结果进行修正. Absi 等[21]将该问题扩展到多产品, 首先利用拉格朗日松弛方法将问题分解为单产品子问题, 子问题用文献[20]中的算法求解, 然后用邻域搜索方法对结果调整.

近年来也有不少学者在供应链管理问题中引入资金约束和金融行为. 例如, Buzacott 等[22]首先将基于资产的融资考虑到生产决策中, 用报童模型建模, 证明了将生产和融资决策综合考虑对创业型企业的重要性. Raghavan 等[23] 研究了银行贷款时制造商与零售商的联合决策问题, 并与单独决策时的效果进行对比. 程永文等[24]以批发价格合约, 回购合约为模型基础, 考虑存在金融对冲的情况下供应链的优化问题, 模型分析表明金融避险工具的使用降低了决策者风险, 并导致采用批发价格合约的零售商提高订购量. 占济舟等[25]在供应商生产资金约束的供应链中, 考虑了提前支付融资与银行借贷融资, 建立了供应商的最优融资和生产决策模型, 分析了融资对供应链系统的价值. 上述文献都是以单周期报童模型为手段, 分析供应链金融行为对企业决策的的影响.

可以看出, 过去关于批量问题的研究, 较少考虑企业的现有资金对生产计划的影响, 更没有考虑资金借贷的情况, 而对于资金约束与供应链金融行为的研究, 大多针对单周期问题, 较少考虑多周期的情况. 由于 “融资难” 问题在企业中非常普遍, 因此企业在制定多周期的生产计划时有必要考虑自有资金不能支撑足够生产能力的情况. 本文尝试将资金借贷情况与资金约束加入到批量生产问题中, 并探讨资金量对生产计划的影响. 本文的创新之处主要体现在两方面. 首先, 本文构建了包含初始借贷资金与资金约束的单产品批量问题的数学模型; 其次, 本文通过对该问题数学性质的分析, 提出了一个多项式时间的递推算法, 大量数例实验显示该算法在计算结果与计算效率上都具有较好的表现.

2　包含资金借贷与资金约束的批量生产模型

本文研究的问题用到以下假设:

1) 企业的初始库存为 0.

2) 企业的现有资金量必须大于等于总生产成本才能生产, 第 t 阶段的总生产成本等于 第 t 阶段的固定生产成本 s_t 与该阶段的变动生产成本 c_ty_t 之和.

3) 企业在各阶段的资金量必须大于 0, 以避免企业破产.

4) 企业可以根据生产需要决定本阶段的缺货数量, 但需支付一定的惩罚成本.

5) $p_t > c_t$, 即产品的价格高于其单位可变生产成本.

6) 企业可以在第 1 阶段期初借贷一定数量的资金, 还款日期到来时一次性还本付息.

本文用到的参数与求解变量在表 1 中所示.

表 1 本文用到的参数与求解变量

Table 1 Notations and decision variables in this paper

参数	含义
t	生产阶段, $t = 1, 2, \ldots, T$
d_t	第 t 阶段的需求量
p_t	第 t 阶段的销售价格
h_t	第 t 阶段的单位库存成本
s_t	第 t 阶段的固定生产成本
c_t	第 t 阶段的单位可变生产成本
π_t	第 t 阶段的单位缺货量的惩罚成本
I_t	第 t 阶段期末的库存水平
B_{c}	企业在第 1 阶段期初的自有资金量
B_{L}	企业在第 1 阶段期初的贷款资金量
B_t	第 t 阶段期末的资金量, B_0 表示企业在第 1 阶段期初的资金量, 没有借贷资金时, $B_0 = B_{\mathrm{c}}$
T_{L}	贷款时长 ($T_{\mathrm{L}} \leqslant T$)
r	贷款利率
求解变量	**含义**
x_t	第 t 阶段是否生产
y_t	第 t 阶段的生产量
w_t	第 t 阶段的缺货量
v_t	第 t 阶段企业实际满足的需求量

过去不少关于批量生产问题的研究文献, 未考虑生产启动资金约束导致求解结果存在两个问题: 若某阶段企业的资金量小于 0, 企业会破产; 若某阶段企业的资金量过小, 不能按计划生产足够多的产品来满足需求. 因此, 在生产计划中考虑资金是非常必要的, 本文据此构建问题 P1 数学模型

$$\operatorname*{Max}_{x_t, y_t, w_t} B_T = B_{\mathrm{c}} + B_{\mathrm{L}} + \sum_{t=1}^{T} \left(p_t(d_t - w_t) - (h_t I_t + s_t x_t + c_t y_t + \pi_t w_t)\right) - B_{\mathrm{L}}(1+r)^{T_{\mathrm{L}}}, \tag{1}$$

s.t.

$$y_t \leqslant \sum_{k=t}^{T} d_k x_k, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{2}$$

$$c_t y_t + s_t x_t \leqslant B_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{3}$$

$$w_t \leqslant d_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{4}$$

$$I_t = I_{t-1} + y_t - d_t + w_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{5}$$

$$B_t = \begin{cases} B_{\mathrm{c}} + B_{\mathrm{L}}, & t = 0 \\ B_{t-1} + p_t(d_t - w_t) - h_t I_t - s_t x_t - c_t y_t - \pi_t w_t, & t \neq 0, t \neq T_{\mathrm{L}} \\ B_{t-1} + p_t(d_t - w_t) - h_t I_t - s_t x_t - c_t y_t - \pi_t w_t - B_{\mathrm{L}}(1+r)^{T_{\mathrm{L}}}, & t \neq 0, t = T_{\mathrm{L}}, \end{cases} \tag{6}$$

$$I_0 = 0, \tag{7}$$

$$w_t \geqslant 0, y_t \geqslant 0, \tag{8}$$

$$x_t \in \{0, 1\}, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{9}$$

若 $B_{\mathrm{L}} = 0$, 该模型表示无初始借贷资金的批量生产问题, 若 $B_{\mathrm{L}} > 0$, 该模型表示有初始借贷资金的批量生产问题, 可见前者是后者的特殊情况. 优化模型(1) 中, $d_t - w_t$ 为第 t 阶段真实满足的需求, $p_t(d_t - w_t)$ 表示第 t 阶段企业的销售收益, $h_t I_t + s_t x_t + c_t y_t + \pi_t w_t$ 表示 t 阶段企业的各项生产相关成本之

和, $B_{\mathrm{L}}(1+r)^{T_{\mathrm{L}}}$ 表示企业的还款量. 式(2)表示 t 阶段的生产量与该阶段是否启动生产的关系, 即: 若 $y_t=0$, 则 $x_t=0$; 若 $y_t>0$, 则 $x_t=1$. 式(3)表示若 t 阶段启动生产, 则该阶段初期的资金量必须大于总生产成本, 若第 t 阶段不生产, 该阶段的资金量也必须大于等于 0, 以避免破产; 式(4)表示各阶段的缺货量不高于本阶段的需求量; 式(5)表示前后阶段库存水平的变化关系; 式(6)表示初始资金量以及前后阶段期末资金量的变化关系; 式(7)表示期初的库存水平为 0; 式(8)与式(9)表示变量的非负约束与 0-1 约束.

3　初始资金与最优解的性质分析

根据动态规划理论, 以期初库存 I_{t-1}, 期初资金 B_{t-1} 作为 t 阶段的状态变量, 决策变量为 x_t, y_t, w_t. 状态转移方程与问题 P1 中的式(5)与式(6)相同.

定义阶段指标函数 ΔB_t, 表示 t 阶段企业的资金增量, 即

$$\Delta B_t = B_t - B_{t-1}. \tag{10}$$

定义最优指标函数 $f_t(I_{t-1}, B_{t-1})$, 表示当 t 阶段期初库存 I_{t-1}, 期初资金为 B_{t-1} 时, 企业从第 t 阶段期初到第 T 阶段期末的最大资金增量. 用 Ω 表示满足约束条件式(2)~式(9)的可行域, 问题 P1 可以用逆序动态规划模型表示为

$$\begin{cases} f_t(I_{t-1}, B_{t-1}) = \underset{x_t, y_t, w_t \in \Omega}{\mathrm{Max}} \{\Delta B_t + f_{t+1}(I_t, B_t)\}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \\ f_{T+1}(I_T, B_T) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

引理 1　当 I_{t-1} 固定时, $f_t(I_{t-1}, B_{t-1})$ 是关于 B_{t-1} 的增函数, 即当初始库存水平不变时, 初始资金越大, 期末资金的增量越大.

证明　若提高 t 阶段的初始资金 B_{t-1}, 则相对于之前的初始资金所做出的生产安排, 问题 P1 的约束条件式(2)~式(9)仍然得到满足, 由资金流约束表达式(3), 当 B_{t-1}并不充足时, B_{t-1} 越大, 企业在 t 阶段能够生产的产品数量越多, 能够满足的需求数量越多; 企业的缺货量将减少, 销量将增加; 又因 $p_t > c_t$, 企业的收益将增加, 付出的缺货成本将减少, 则 $f_t(I_{t-1}, B_{t-1})$ 将增加. 当 B_{t-1}充足时, B_{t-1} 的增加不影响企业在 t 阶段的生产数量, $f_t(I_{t-1}, B_{t-1})$ 保持不变. 综合以上两种情况, 当 I_{t-1} 不变时, $f_t(I_{t-1}, B_{t-1})$ 是关于 B_{t-1} 的增函数.　　证毕.

引理 2　在单位可变生产成本相同时, 即 $c_t = c$, $\forall t$, 问题 P1 具有 “零库存” 性质, 一定存在一个最优解满足 $I_{t-1}^* x_t^* = 0$, $\forall t$, 即当企业启动新的生产时, 此阶段的期初库存为 0.

证明　反证法: 若问题 P1 存在一个解不满足引理 2, 即$I_{t-1} > 0$ 且 $x_t = 1$, 设 t 阶段的上一个启动生产的阶段为 k $(1 \leqslant k \leqslant t-1)$, 而 t 阶段的生产持续到第 m 阶段, 如图 1 所示.

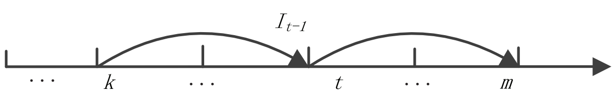

图 1　生产安排示意图

Fig. 1　Sketch of the production arrangement

根据资金的变化关系式(6), $t-1$ 阶段与 m 阶段的期末资金量分别为

$$B_{t-1} = \begin{cases} B_{k-1} + \sum\limits_{i=k}^{t-1} p_i(d_i - w_i) - s_k - c_k y_k - \sum\limits_{i=k}^{t-1} (h_i I_i + \pi_i w_w), & t-1 \neq T_{\mathrm{L}} \\ B_{k-1} + \sum\limits_{i=k}^{t-1} p_i(d_i - w_i) - s_k - c_k y_k - \sum\limits_{i=k}^{t-1} (h_i I_i + \pi_i w_w) - B_{\mathrm{L}}(1+r)^{T_{\mathrm{L}}}, & t-1 = T_{\mathrm{L}}, \end{cases} \tag{12}$$

$$B_m=\begin{cases}B_{t-1}+\sum\limits_{i=t}^{m}p_i(d_i-w_i)-s_t-c_ty_t-\sum\limits_{i=t}^{m}(h_iI_i+\pi_iw_w), & m\neq T_{\mathrm{L}}\\ B_{t-1}+\sum\limits_{i=t}^{t-1}p_i(d_i-w_i)-s_t-c_ty_t-\sum\limits_{i=t}^{m}(h_iI_i+\pi_iw_w)-B_{\mathrm{L}}(1+r)^{T_{\mathrm{L}}}, & m=T_{\mathrm{L}}.\end{cases}\tag{13}$$

若企业在第 k 阶段减少 I_{t-1} 的生产量, 并在第 t 阶段增加 I_{t-1} 的生产量, 则 $t-1$ 阶段与第 m 阶段的资金量分别变为

$$B'_{t-1}=B_{t-1}+c_kI_{t-1}+\sum_{i=k}^{t-1}h_iI_{t-1},\tag{14}$$

$$B'_m=B_m+c_kI_{t-1}+\sum_{i=k}^{t-1}h_iI_{t-1}-c_tI_{t-1}=B_m+\sum_{i=k}^{t-1}h_iI_{t-1}.\tag{15}$$

显然 $B'_m>B_m$, 故 m 阶段的期末资金量增加, 同时各项约束条件也能满足, 因此 $I_{t-1}>0$ 且 $x_t=1$ 的生产安排不是最优解. 证毕.

4 问题转化与求解算法

4.1 最长路径问题

根据最优指标函数式(11) 以及引理 1 与引理 2 , 可以将问题 P1 转化为一个最长路径问题. 若 $T=4$, 该最长路径问题如图 2 所示, 其中 $\mathrm{BB}_{m,n}(n\geqslant m)$ 表示在第 m 阶段的初始资金为 B_{m-1}, 初始库存为 0 时, 从 m 阶段启动生产, 产量维持到第 n 阶段, 企业在第 n 阶段期末相对于初始资金 B_{m-1} 的最大资金增量.

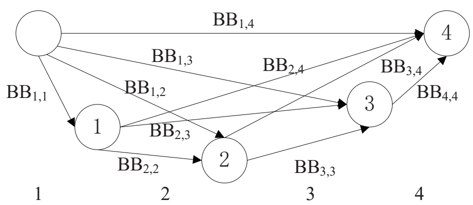

图 2 问题 P1 转化为的最长路径问题示意图

Fig. 2 Sketch of the longest path problem changed from problem P1

$\mathrm{BB}_{m,n}$ 的生产安排示意图如图 3 所示.

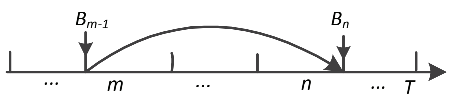

图 3 $\mathrm{BB}_{m,n}$ 的生产安排示意图

Fig. 3 Production arrangement sketch of $\mathrm{BB}_{m,n}$

求解 $\mathrm{BB}_{m,n}$ 转化为线性规划子问题 P2: 如何分配从 m 到 n 各阶段满足顾客需求的数量 v_t, $t=m,m+1,\ldots,n$, 使得 $\mathrm{BB}_{m,n}$ 最大. v_t 与生产量 y_m, 缺货量 w_t 的关系式为

$$y_m=\sum_{t=m}^{n}v_t,\tag{16}$$

$$w_t=d_t-v_t,\quad t=m,m+1,\ldots,n.\tag{17}$$

子问题 P2 的数学模型可以表示为

$$\operatorname*{Max}_{v_t}\ \mathrm{BB}_{m,n}=\sum_{t=m}^{n}\left[(p_t+\pi_t)v_t-(h_tI_t+c_mv_t+\pi_td_t)\right]-s_m, \tag{18}$$

s.t.

$$c_m\sum_{t=m}^{n}v_t+s_m\leqslant B_{m-1}, \tag{19}$$

$$B_t\geqslant 0,\quad t=m,m+1,\dots,n, \tag{20}$$

$$I_t=\sum_{t+1}^{n}v_t,\quad t=m,m+1,\dots,n, \tag{21}$$

$$B_t=\begin{cases}B_{t-1}+(p_t+\pi_t)v_t-(h_tI_t+s_m+c_m\sum\limits_{t=m}^{n}v_t+\pi_td_t), & t=m,t\neq T_{\mathrm{L}}\\ B_{t-1}+(p_t+\pi_t)v_t-(h_tI_t+s_m+c_m\sum\limits_{t=m}^{n}v_t+\pi_td_t)-B_{\mathrm{L}}(1+r)^{T_{\mathrm{L}}}, & t=m,t=T_{\mathrm{L}},\end{cases} \tag{22}$$

$$B_t=\begin{cases}B_{t-1}+(p_t+\pi_t)v_t-(h_tI_t+\pi_td_t), & t=m+1,\dots,n,t\neq T_{\mathrm{L}}\\ B_{t-1}+(p_t+\pi_t)v_t-(h_tI_t+\pi_td_t)-B_{\mathrm{L}}(1+r)^{T_{\mathrm{L}}}, & t=m+1,\dots,n,t=T_{\mathrm{L}},\end{cases} \tag{23}$$

$$I_{m-1}=0,I_n=0, \tag{24}$$

$$0\leqslant v_t\leqslant d_t,\quad t=m,m+1,\dots,n. \tag{25}$$

子问题 P2 中, 约束条件(19) 为生产启动资金约束, 约束条件(20)表示企业在各阶段的资金量不能小于 0, 以避免企业破产; 约束条件(21)为库存变化的表达式; 约束条件(22)与约束条件(23)为资金变化的表达式; 约束条件(24)表示问题 P2 的初始库存和期末库存都为零; 约束条件(25)表示求解变量的上下界.

子问题 P2 为线性规划模型, 求解变量为 $v_t, t=m,m+1,\dots,n$, 可以用一些线性规划算法, 例如单纯形法, 内点法等来求解. 若问题 P2 没有可行解, 则表示从 m 阶段启动生产持续到第 n 阶段不可行, 此时令 $\mathrm{BB}_{m,n}=-\sum\limits_{t=m}^{n}\pi_td_t$, 表示从 m 阶段到 n 阶段的生产方案为: 不生产, 全部缺货.

基于最长路径问题的动态规划求解方法与以上分析, 本文提出如下的顺序递推公式

$$B_t^*=\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant m\leqslant t}\left[B_{m-1}^*+\mathrm{BB}_{m,t}\right], & t=1,2,\dots T\\ B_0, & t=0.\end{cases} \tag{26}$$

定理 1　在单位可变生产成本相同时, 即 $c_t=c, \forall t$ 时, B_T^* 是问题 P1 的最优值, 求解 B_T^* 得到问题 P1 的最优解; 在单位可变生产成本不同时, 求解 B_T^* 可以得到问题 P1 的一个可行解.

证明　在单位可变生产成本相同时, 由引理 2 知, 最优解满足“零库存”性质, $\mathrm{BB}_{m,n}$ 可以用子问题 P2 求解; 由引理 1 知, 初始资金越大, 最终资金越大; 根据式(26), 在计算过程中, 每次选取最大的初始资金求解 $\mathrm{BB}_{m,n}$, 则该递推过程一定能够得到最大的期末资金, 因此 B_T^* 是问题 P1 的最优值. 计算子问题 P2 的过程中, 通过式(16) 与式(17) 得到 y_t 与 w_t; 根据得到的 B_T^* 逆推, 得到 x_t, 因此, 求解B_T^* 得到的 x_t, y_t, w_t 即是问题 P1 的最优解.

在 B_T^* 的计算过程中, 每个子问题 P2 的解都满足问题 P1 的各项约束条件, 因此, 求解B_T^* 得到的 x_t, y_t, w_t 一定是满足约束条件的可行解.　证毕.

推论 1　对于问题 P1 的任一可行解, 假设该可行解为 x_t, y_t, $w_t, \forall t$, 对于该可行解的任意两个相邻的生产起始过程, 假设第一个生产起始过程在 t_1 阶段开始, 第二个生产起始过程在 t_2 阶段开始,

若 $B_{t_1-1}-s_{t_1}-c_{t_1}y_{t_1}>0,\ B_{t_2-1}-s_{t_2}-c_{t_2}y_{t_2}>0, c_{t_1}+\sum\limits_{i=t_1}^{t_2-1}h_i<c_{t_2}$, 则可以转移 t_2 阶段一部分生产量到 t_1 阶段, 以使得期末资金量更大.

该推论为一个启发式调整过程, 最大转移生产量可以由式(27)计算得出, 即

$$\Delta y_{t_2}=\frac{B_{t_1-1}-s_{t_1}}{c_{t_1}}-y_{t_1}. \tag{27}$$

启发式调整过程如图 4 所示.

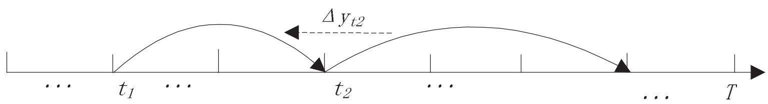

图 4 启发式调整过程

Fig. 4 Process of heuristic adjustment

4.2 求解算法

基于定理 1 与推论 1 , 本文提出了一个递推算法 RA 求解问题 P1.

递推算法 RA

步骤 1 初始化. $x_t^*\leftarrow 0, t=1,2,\ldots,T$; $i\leftarrow 1$, 调用子问题 P2, 计算所有 $\mathrm{BB}_{i,t}, t=i,i+1,\ldots,T$.

步骤 2 根据式(26), 得到 B_i^*.

步骤 3 $i\leftarrow i+1$, 调用子问题 P2 , 计算所有 $\mathrm{BB}_{i,t}, t=i,i+1,\ldots,T$.

步骤 4 当 $i\leqslant T$ 时, 重复步骤 2 与步骤 3, 得到 B_T^*.

步骤 5 根据得到的 B_T^* 逆推得到 x_t^*: 若 $B_T^*=\mathrm{BB}_{j,t}$, $j=1,2,\ldots,T$, 则 $x_j^*\leftarrow 1$, 若 $B_j^*=\mathrm{BB}_{k,t}$, $k=1,2,\ldots,j$, 则 $x_k^*\leftarrow 1$; 重复这一过程, 直到得到 x_1^* 为止. 根据得到的所有 $x_t^*, t=1,2,\ldots,T$, 再次调用子问题 P2, 计算 v_t^*, 根据式(16)和式(17), 得到 x_t^* 与 $w_t^*, t=1,2,\ldots,T$.

步骤 6 对于得到的可行解, 从后向前检查是否满足推论 1 的条件, 若满足, 则根据启发式调整式(24) 调整生产量, 最后根据求解到的 x_t^*, y_t^* 与 w_t^* , 代入资金表达式(6)得到期末资金.

记线性规划算法的计算复杂度为 ψ, 显然算法 RA 的计算复杂性为 $\mathrm{O}(n^2\psi)$. 若线性规划算法为内点法, 初始值为可行解时, 内点法的算法复杂度为 $\mathrm{O}(nL)$, 初始值为不可行解时, 内点法的算法复杂度为 $\mathrm{O}(n^2L)$, 其中 L 为内点法中设置的最大迭代次数, 是一个初始确定值. 因此, 算法 RA 的计算复杂度为 $\mathrm{O}(n^3L)$ 或 $\mathrm{O}(n^4L)$, 是一个多项式时间算法.

4.3 本文问题与传统批量生产问题的不同

本文的数学模型与传统批量生产问题的最大区别在于约束条件(3)与资金量表达式(6). 式(3)的存在限制了企业的生产能力, 企业在生产过程中不能超出其生产能力; 式(6)的存在使得该问题与传统带能力约束的批量生产问题不同, 企业的生产能力(资金量)的变动跟企业的销售价格, 顾客需求量以及生产启动成本, 可变生产成本等成本参数的取值有关; 企业的生产能力在生产过程中可能增加, 也可能减少.

传统无能力约束的单产品批量生产问题也可转化为最短路径问题, Wagner-Whitin 算法[3]也与递推公式(26)类似. 本文的不同之处在于计算各节点之间的路径距离 $\mathrm{BB}_{m,n}$ 时, 调用线性规划子问题 P2 求解, 该子问题包含资金约束式(19)与式(20), 得到的解满足 $v_t\leqslant d_t$; 而 Wagner-Whitin 算法在计算各节点之间的路径距离时, 相当于调用了不包含式(19)与式(20) 的子问题 P2, 此时子问题 P2 的解为 $v_t=d_t$.

对于传统无能力约束的单产品批量生产问题, 其“零库存”性质并不受单位可变生产成本影响, 而对于本文考虑的资金约束问题, 当各阶段单位可变生产成本相等时,“ 零库存”性质才成立. 因此在求解算法中, 当“零库存”性质不成立时, 需要用启发式手段对结果进行调整.

5 数值分析

5.1 算例求解

本文使用 文献[20]中的数例, 对本文的算法进行验证, 其中在求解子问题 P2 时使用了 MATLAB 2014a 内置的内点法[26].

在生产计划期 $T = 8$ 时, 单位可变生产成本相同时, 各参数的取值如表 2 所示.

表 2 $T = 8$ 时的各参数取值 1

Table 2 Parameter values 1 when $T = 8$

p_t	30	22	42	14	30	12	12	40
c_t	10	10	10	10	10	10	10	10
h_t	5	5	5	5	5	5	5	5
s_t	100	100	100	100	100	100	100	100
d_t	9	12	9	25	9	20	20	25
w_t	2	2	2	2	2	2	2	2

在考虑资金约束时, 过去很多批量生产问题的算法, 例如 Wagner-Whitin 算法[3]或 Aksen[19]中的算法所求出的解由于可能不满足生产启动约束或某阶段资金小于 0, 不一定能够得到可行解. 根据本文的算法, 当初始资金为 180, 没有初始借贷资金时, 计算结果如表 3 所示, 得到的最优期末资金为 1 040.

表 3 $T = 8$ 时的求解结果 1

Table 3 Computation results 1 when $T = 8$

x_t	1	1	1	1	0	0	0	1
y_t	8.00	12.00	9.00	34.00	0.00	0.00	0.00	25.00
w_t	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	0.00
I_t	0.00	0.00	0.00	9.00	0.00	0.00	0.00	0.00
B_t	238.00	282.00	470.00	335.00	470.00	430.00	390.00	1 040.00

生产安排如图 5 所示.

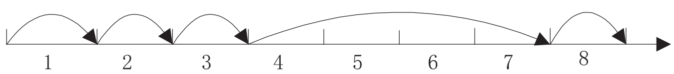

图 5 $T = 8$ 时的最优生产安排示意图 1

Fig. 5 Optimal production arrangement 1 when $T = 8$

当初始资金为 180, 初始借贷资金 50, 借贷期限为 5 个阶段, 贷款利率为 1 %时, 根据本文的算法, 计算结果如表 4 所示, 得到的最优期末资金为 1 064.45.

表 4 $T = 8$ 时的求解结果 2

Table 4 Computation results 2 when $T = 8$

x_t	1	1	0	1	0	0	0	1
y_t	9.00	21.00	0.00	34.00	0.00	0.00	0.00	25.00
w_t	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00	20.00	0.00
I_t	0.00	9.00	0.00	9.00	0.00	0.00	0.00	0.00
B_t	260.00	169.00	547.00	412.00	494.45	454.45	414.45	1 064.45

有初始借贷资金的生产安排如图 6 所示, 图 5 与图 6 也说明了企业在生产计划期开始时的资金量的大小能够影响企业的最优生产安排.

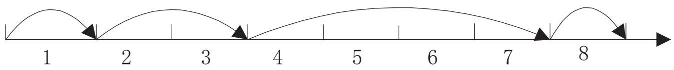

图 6 $T = 8$ 时的最优生产安排示意图 2

Fig. 6 Optimal production arrangement 2 when $T = 8$

5.2 与最优解偏差

在单位可变生产成本不相等时, 例如设第 4 阶段的单位可变生产成本为 25, 其他参数取值与表 2 相同. 当初始资金为 200, 没有初始借贷资金时, 根据本文算法求解, 得到最优期末资金 1 473.8, 生产结果见表 5.

表 5 $T = 8$ 时的求解结果 3

Table 5 Computation results 3 when $T = 8$

x_t	1	1	1	0	1	0	0	1
y_t	9.00	12.00	22.40	0.00	9.00	0.00	0	25.00
w_t	0.00	0.00	0.00	11.60	0.00	20.00	20.00	0.00
I_t	0.00	0.00	13.4.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
B_t	280.00	324.00	311.00	823.80	903.80	863.80	823.80	1 473.80

根据 CPLEX 求解, 得到最优期末资金 1 517.28, 生产结果如表 6 所示.

表 6 $T = 8$ 时的求解结果4

Table 6 Computation results 4 when $T = 8$

x_t	1	1	1	1	1	0	0	1
y_t	9.00	12.00	22.40	8.44	9.00	0.00	0.00	25.00
w_t	0.00	0.00	0.00	3.16	0.00	20.00	20.00	0.00
I_t	0.00	0.00	13.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
B_t	280.00	324.00	311.00	867.28	947.28	907.28	867.28	1 517.28

从表 5 与表 6 可以看出, 在单位生产成本不同时, 本文算法的计算结果与最优解可能具有一定的偏差. 最优解中, 在启动生产的第 4 阶段期初库存不为 0, 不满足 "零库存" 性质.

为了测试本文算法的求解结果与最优解的偏差程度, 本文将各参数分为高低两个区间, 在每个区间内各参数服从均匀分布, 如表 7 所示.

表 7 各参数取值

Table 7 Parameter values

	B_0	p_t	c_t	s_t	h_t	s_t
low	(600 2 000)	(6 12)	(4 6)	(80 120)	(4 6)	(4 6)
high	(2 000 4 000)	(12 24)	(8 12)	(320 480)	(8 12)	(8 12)

本文分有无启发式调整两种情况分别做算例测试. 初始借贷资金统一取值为 500, 借贷期限为 5 个阶段, 贷款利率为 1 %, 各阶段需求数量取自 文献[19]中的数例. 对每一组参数组合, 生成 20 个算例, 因此, 对于每一个固定的生产计划期, 一共有 $2^6 \times 20 = 1\ 280$ 个算例实验. 实验结果由表 8 与表 9 给出.

表 8 没有启发式调整时的计算误差

Table 8 Computation error without heuristic adjustment

T	非最优解数量	最优解比例	最大误差	平均误差
8	0	100 %	0 %	0 %
12	1	99.92 %	1.77 %	0.001 %
24	0	100 %	0 %	0 %
24	0	100 %	0 %	0 %
60	7	99.45 %	0.15 %	0.000 4 %

表 9　有启发式调整时的计算误差

Table 9　Computation error with heuristic adjustment

T	非最优解数量	最优解比例	最大误差	平均误差
8	0	100 %	0 %	0 %
12	1	99.92 %	1.77 %	0.001 %
24	0	100 %	0 %	0 %
24	0	100 %	0 %	0 %
60	4	99.45 %	0.15 %	0.000 3 %

从上面两个表可以看出, 本文的算法在算例测试中表现不错, 与最优解的最大偏差小于 2 %, 带有启发式调整时, 算法与最优解的偏差更小.

5.3　与CPLEX计算效率对比

本文的算法与商业软件 IBM CPLEX 12.6.2 在计算效率上做了对比, 用 MATLAB 2014a 编程, 在处理器为 Intel(R) Core(TM) i5-2430M, 2.40 GHz, 物理内存为 3G, 操作系统为 32 位 Windows 7 的笔记本电脑上运行, 计算结果如表 10 所示, 其中计算时间为程序运行 5 次的平均时间. 由于有无初始借贷资金对计算效率没有影响, 下面的算例中没有包括初始借贷资金.

表 10　本文算法与 CPLEX 计算效率对比

Table 10　Computation efficiency comparison between our algorithm and CPLEX

计划期	初始资金	最优值	本文算法 运行时间(s)	CPLEX 运行时间(s)
16	200	1 067.84	1.55	0.13
24	4 000	14 162.63	3.56	0.62
36	4 000	24 856.82	8.25	1.35
60	4 000	45 848.90	29.77	75.62
96	4 000	57 637.69	92.67	>1 973
120	4 000	57 223.00	180.03	>1 824
150	4 000	76 765.96	340.67	>2 135

从上表可以看出, 在问题规模较小时, 本文算法的计算时间比 CPLEX 稍长, 这是由于 CPLEX 中使用的分支定界法在问题规模小时, 分支次数少, 相比本文算法具有优势; 然而当问题规模较大时, 本文算法的效率优势逐渐显现, 而 CPLEX 计算需要耗费大量时间, 并且在问题规模为 96 个周期以上时, CPLEX 储存矩阵占用大量内存, 出现了内存不足的现象(out of memory), 导致计算中止. 总体上, 本文的算法能够在较快的时间里得到考虑初始借贷资金与资金约束的单产品批量问题的最优解.

6　结束语

资金的控制与管理在企业的日常经营活动中非常重要, 本文考虑了存在初始借贷资金与资金约束的单产品批量问题, 并结合资金的变化, 构造数学模型, 设计了一个多项式时间的递推算法进行求解. 算例结果表明, 当各阶段的单位可变生产成本相等时, 本文的算法能够较快地得到最优解, 并且对于大规模问题, 与 CPLEX 相比, 具有明显的效率优势. 当各阶段的单位可变生产成本不相等时, 本文的算法能够得到可行解, 并且与最优解的误差不大. 本文的模型跟算法不仅适用于批量生产问题, 也可以用于批量采购问题.

未来的拓展方向可从几个方面入手, 考虑企业缺货造成顾客流失的情况; 将资金约束扩展到多产品的批量问题, 多层次的批量问题中; 考虑企业的一些供应链金融行为, 例如赊销, 应收账款融资, 存货融资等.

参考文献:

[1] 吕劲松. 关于中小企业融资难、融资贵问题的思考. 金融研究, 2015(11): 115–123.

Lü J S. Reflection about financing difficulites and financing costliness of small and medium enterprises. Journal of Financial Research, 2015(11): 115–123. (in Chinese)

[2] 汪士和, 徐金保. 民企 "融资难" 窘境不断加深. 施工企业管理, 2017(3): 29–30.
Wang S H, Xu J B. Increasing finiancing difficulties of private enterprises. Construction Enterprise Management, 2017(3): 29–30. (in Chinese)

[3] Wagner H M, Whitin T M. Dynamic version of the economic lot size model. Management Science, 1958, 5(1): 89–96.

[4] Diaby M, Bahl HC, Karwan MH, Zionts S. Capacitated lot-sizing and scheduling by Lagrangean relaxation. European Journal of Operational Research, 1992, 59(3): 444–58.

[5] Lotfi V, Yoon Y. An algorithm for the single-item capacitated lot sizing problem with concave production and holding costs. Journal of the Operational Research Society, 1994, 45(8): 934–41.

[6] Xiao Y, Zhang R, Zhao Q, et al. A variable neighborhood search with an effective local search for uncapacitated multilevel lot-sizing problems. European Journal of Operational Research, 2014, 235(1): 102–114.

[7] Rossi R, Kilic O A, Tarim S A. Piecewise linear approximations for the static-dynamic uncertainty strategy in stochastic lot-sizing. Omega, 2015, 50: 126–140.

[8] Xie J, Dong J. Heuristic genetic algorithms for general capacitated lot-sizing problems. Computers & Mathematics with Applications, 2002, 44(1): 263–276.

[9] Gopalakrishnan M, Ding K, Bourjolly J M, et al. A tabu-search heuristic for the capacitated lot-sizing problem with set-up carryover. Management Science, 2001, 47(6): 851–863.

[10] Mirabi M. A hybrid simulated annealing for the single-machine capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup times and costs and dynamic release of jobs. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011, 54(9-12): 1109–1119.

[11] 韩 毅, 唐加福, 牟立峰, 等. 粒子群算法求解无能力约束生产批量计划问题. 管理科学学报, 2008, 11(5): 33–40.
Han Y, Tang J F, Mou L F, et al. A particle swarm optimization algorithm to solve uncapacitated lot sizing problem. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(5): 33–40. (in Chinese)

[12] 蓝伯雄, 姜 楠, 郑 燕. 求解大规模生产批量问题的启发式算法. 中国管理科学, 2010, 18(2): 81–88.
Lan B X, Jiang N, Zheng Y. Heuristics to solve large size lot sizing problems. Chinese Journal of Management Science, 2010, 18(2): 81–88. (in Chinese)

[13] 郑明月, 刘 林, 阚 方, 等. 结合批量问题的多目标矩形件优化排样. 计算机工程与应用, 2014, 50(22): 260–264.
Zheng M Y, Liu L, Kan F, et al. Multi-objective rectangle packing problem combined with lot-sizing problem. Computer Engineering and Applications, 2014, 50(22): 260–264. (in Chinese)

[14] Maes J, Van Wassenhove L. Multi-item single-level capacitated dynamic lot-sizing heuristics: A general review. Journal of the Operational Research Society, 1988, 39(11): 991–1004.

[15] Karimi B, Fatemi Ghomi S M T, Wilson J M. The capacitated lot sizing problem: A review of models and algorithms. Omega, 2003, 31(5): 365–378.

[16] Buschkühl L, Sahling F, Helber S, et al. Dynamic capacitated lot-sizing problems: A classification and review of solution approaches. Or Spectrum, 2010, 32(2): 231–261.

[17] Jans R, Degraeve Z. Meta-heuristics for dynamic lot sizing: A review and comparison of solution approaches. European Journal of Operational Research, 2007, 177(3): 1855–1875.

[18] Haugen K K, Olstad A, Pettersen B I. The profit maximizing capacitated lot-size (PCLSP) problem. European Journal of Operational Research, 2007, 176(1): 165–176.

[19] Aksen D, Altinkemer K, Chand S. The single-item lot-sizing problem with immediate lost sales. European Journal of Operational Research, 2003, 147(3): 558–566.

[20] Aksen D. Loss of customer goodwill in the uncapacitated lot-sizing problem. Computers & Operations Research, 2007, 34(9): 2805–2823.

[21] Absi N, Detienne B, Dauzére-Pérès S. Heuristics for the multi-item capacitated lot-sizing problem with lost sales. Computers & Operations Research, 2013, 40(1): 264–272.

[22] Buzacott J A, Zhang R Q. Inventory management with asset-based financing. Management Science, 2004, 50(9): 1274–1292.

(下转第 288 页)