

权重受限的超效率DEA模型及其投影分析

赵春英^{1,2}, 马占新^{1*}

(1. 内蒙古大学经济管理学院, 内蒙古 呼和浩特 010021;

2. 内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010021)

摘要: 传统 DEA 模型通过效率值和投影值对无效单元提供很多有用的管理信息, 但对有效单元能提供的信息比较少. 超效率 DEA 模型虽度量了有效单元的效率大小, 做到了从效率值的角度区分有效单元, 却没有考虑有效单元的投影问题. 本文首先给出有效单元投影的概念, 利用投影不仅可以对无效单元给出无效原因, 还可以给出有效单元存在的优势. 其次, 给出权重受限的综合超效率 DEA 模型及其投影概念, 并讨论本文模型与其它超效率模型的关系. 最后, 分析本文模型的最优目标函数值与单元有效性之间的关系.

关键词: 综合评价; 多目标决策; 超效率; DEA 投影

中图分类号: N94

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2019)01-0116-14

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2019.01.010

Weight restricted super efficiency DEA model and projection analysis

Zhao Chunying^{1,2}, Ma Zhanxin^{1*}

(1. School of Economics and Management, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China;

2. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: For ineffective decision making units, traditional DEA model can provide much useful management information through efficiency values and projections. While for effective decision making units, it can provide little information. Super efficiency DEA model overcomes this weakness of traditional DEA model, and further measures efficiency values of the effective decision making units. Although super efficiency DEA models can differentiate effective decision making units according to efficiency values, it does not consider the projection of effective decision making units. In this paper, firstly, projection of effective decision making units is proposed, which is superior in that the DEA projection not only gives the cause of the invalidity of ineffective decision making units, but also describes the advantages of effective decision making units relative to other decision making units. Secondly, weight-restricted comprehensive super efficiency model and projection concept are proposed, and the relationship between weight-restricted comprehensive super efficiency model and other super efficiency DEA models is discussed. Finally, the relationship between the efficiency value of the weight-restricted comprehensive super efficiency model and the effectiveness of decision making units is analyzed.

Key words: comprehensive evaluation; multi-objective decision; super efficiency; DEA projection

收稿日期: 2015-10-16; 修订日期: 2016-02-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71261017; 70961005; 71661025); 天津市教委社会科学重大资助项目(2012ZD35).

*通信作者

1 引言

数据包络分析方法 (data envelopment analysis, DEA) 是评价具有多输入和多输出的同类决策单元 (以下简称单元) 相对效率的方法, 是由 Charnes 等 1978 年提出的. 同时他们提出了第一个 DEA 模型—— C^2R 模型^[1]. 1984 年 Banker 等提出了 BC^2 模型^[2]. 同时 Fare 等提出了 FG 模型^[3]——满足规模收益非递增 DEA 模型. 1990 年, Seiford 等提出了 ST 模型^[4]——满足规模收益非递减的 DEA 模型. 这些 DEA 模型有一个共同特点: 能用效率值区分无效单元的有效程度, 而有效单元的效率值都相等, 其投影的改进值是 0, 因而对有效单元能够给出的信息较少. 为克服传统 DEA 方法无法区分有效单元这一不足, Andersen 等 1993 年提出了对有效单元效率值进一步度量的超效率模型^[5] (super efficiency model), 超效率模型的核心思想是把被评价的单元从评价参考集中剔除, 被评价单元的效率值是参考其余单元构成的前沿面得出的. 有效单元的效率值有时会超过 1, 因此可以对有效单元进行区分. 除此之外超效率模型还可用于 DEA 模型的稳定性和敏感性分析及发现异常数据. 但是在有效单元投影方面, 一直未见相关的研究文献发表, 因此, 本文给出有效单元投影的概念, 这样通过 DEA 投影不仅像传统 DEA 模型投影一样可以对无效单元给出无效原因, 并且还可以给出有效单元存在的优势.

另外, 通常的 DEA 模型 (如 C^2R 等四个模型) 在评价单元有效性时, 输入输出指标的地位同等, 输入输出指标的权重系数无任何限制. 其实, 从提出第一个 DEA 模型以来, 研究多目标决策方面的专家就提出: 在 DEA 模型中未能体现出决策者的偏好. Yu 在 1974 年提出了多目标规划问题的非支配解 (non-dominated solution) 的概念, 把 Pareto 解的概念推广到非支配解, 对多目标问题的发展起到推动作用^[6]. 因此, 1989 年 Charnes, Cooper, Wei 和 Huang 等第一次把偏好锥概念引入到 DEA 模型中, 提出了在某种程度上能体现出决策者偏好的 DEA 模型——锥比率 DEA 模型 (cone ratio DEA model) C^2WH ^[7]. 这是与传统 DEA 方法的不同之处. 权重受限的综合 DEA 模型虽然考虑到决策者的偏好, 但该模型中有效单元的效率值都相等, 其投影的改进值是 0, 因而能给出的信息较少. 为解决权重受限的综合 DEA 模型无法从效率值角度对有效单元进行区分这一不足, 本文给出权重受限的综合超效率 DEA 模型及投影概念. 该模型中有效单元的效率值有时会超过 1, 从而可以对有效单元进行区分, 利用投影不仅可以对无效单元给出无效原因, 还可以给出有效单元存在的优势. 分析本文模型的最优目标函数值与单元有效性之间的关系, 并研究本文模型的相关性质及与其它超效率 DEA 模型的关系, 可以证明其它超效率 DEA 模型是本文模型的特殊情况.

2 超效率 DEA 模型及其投影概念

传统 DEA 模型通过效率值能区分无效单元的有效程度, 而有效单元的效率值都相等, 其投影的改进值是 0, 因而能够给出的信息较少. 为克服传统 DEA 对有效单元的效率大小无法区分这一不足, 1993 年 Andersen 等提出了超效率 DEA 模型 (super efficiency model)^[5], 进一步度量了有效单元的效率值. 超效率 DEA 模型从效率值角度可区分有效单元, 却没有考虑有效单元投影问题. 本节将提出有效单元投影概念, 分析有效单元相比于其它单元的优势.

2.1 基本 DEA 模型

假设共有 n 个单元 $(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, n$, 其中第 j_0 个单元的输入输出指标值为 (x_{j_0}, y_{j_0}) , 则面向输入的综合 DEA 模型及其对偶模型^[7]可以表示如下

$$(IG) \begin{cases} \text{Max } (\mu^T y_{j_0} + \delta_1 \mu_0) \\ \text{s.t. } \omega^T x_j - \mu^T y_j - \delta_1 \mu_0 \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \omega^T x_{j_0} = 1 \\ \omega \geq 0, \mu \geq 0 \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{cases}$$

$$(DG) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \lambda_j + \mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_{j_0} \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \lambda_j - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_{j_0} \\ \delta_1 \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j - \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1} \right) = \delta_1 \\ \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^+ \geq \mathbf{0}, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n+1. \end{array} \right.$$

- 1) 当 $\delta_1 = 0$ 时, (IG) 模型为 C^2R 模型.
- 2) 当 $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$ 时, (IG) 模型为 BC^2 模型.
- 3) 当 $\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \delta_3 = 1$ 时, (IG) 模型为 FG 模型.
- 4) 当 $\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$ 时, (IG) 模型为 ST 模型.

例 1 以下以 Andersen 等的 1993 年的例子为例, 设有五个单元, 每个单元均有双投入和单产出, 投入产出值如下表所示.

表1 单元数据
Table1 Data of decision making unit

	a	b	c	d	e
投入 1	2.0	2.0	5.0	10.0	10.0
投入 2	12.0	8.0	5.0	4.0	6.0
产出	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

各单元在模型 (DG) 中的效率值如表 2.

表2 各单元在 BC^2 模型中效率值
Table2 Efficiency value of decision making units in BC^2 model

单元	a	b	c	d	e
BC^2 模型效率值	1	1	1	1	0.75

从表 2 可以看出: 在 BC^2 模型中有效单元的效率值都相等, 传统 DEA 模型不能区分有效单元.

2.2 超效率DEA模型

为了进一步讨论有效单元, 1993 年 Andersen 等提出了超效率模型 (super efficiency model), 该模型的核心是将被评价的单元从参考集中剔除, 被评价单元的效率值是参考其余单元构成的前沿面得出的. 面向输入的超效率模型^[5]如下

$$(D_{SEM}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } (\theta - \varepsilon(\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{s}^- + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^+)) \\ \text{s.t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \mathbf{x}_j \lambda_j + \mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_{j_0} \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \mathbf{y}_j \lambda_j - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_{j_0} \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \lambda_j = 1 \\ \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^+ \geq \mathbf{0}, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, j \neq j_0. \end{array} \right.$$

例1中各单元在模型 (D_{SEM}) 中效率值如表 3^[5].

表3 各单元在超效率 BC² 模型中效率值Table3 Efficiency value of decision making units in super efficiency BC² model

单元	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
超效率 BC ² 模型效率值	1	1.316	1.2	1.25	0.75

从表 3 可以看出: 在 BC² 模型下, 单元 *b*, *c* 和 *d* 的效率值都相等, 不能区分 3 个单元中哪个单元的有效程度更好, 而超效率 BC² 模型可以将它们的效率进行排序, 因此超效率 DEA 模型在一定程度上能区分有效单元的有效程度. 但从另一方面也可以看出, 超效率 DEA 模型不能给出有效单元的效率较好的原因.

2.3 超效率DEA模型投影

超效率 DEA 模型能够区分有效单元的效率值, 为进一步讨论有效单元相对于其它单元所存在的优势, 本小节将给出投影概念.

定义 1 设模型 (D_{SEM}) 有最优解 θ^* , s^{-*} , s^{+*} , λ_j^* , $j = 1, 2, \dots, n$, $j \neq j_0$, 则称

$$(\hat{x}_{j_0}, \hat{y}_{j_0}) = (\theta^* x_{j_0} - s^{-*}, y_{j_0} + s^{+*})$$

是 (x_{j_0}, y_{j_0}) 的超效率投影.

第 j_0 个单元的改进值记为

$$(\Delta x_{j_0}, \Delta y_{j_0}) = (x_{j_0} - \hat{x}_{j_0}, \hat{y}_{j_0} - y_{j_0}) = ((\Delta x_{1j_0}, \Delta x_{2j_0}, \dots, \Delta x_{mj_0}), (\Delta y_{1j_0}, \Delta y_{2j_0}, \dots, \Delta y_{sj_0})).$$

其具体含义解释如下:

1) 当 $\Delta x_{ij_0} = 0$ 时, 表示单元 j_0 与有效单元 $(\hat{x}_{j_0}, \hat{y}_{j_0})$ 相比它的第 i 个投入同样有效. 同样地, 当 $\Delta y_{rj_0} = 0$ 时, 表示它的第 r 个产出同样有效.

2) 当 $\Delta x_{ij_0} > 0$ 时, 表示单元 j_0 与有效单元 $(\hat{x}_{j_0}, \hat{y}_{j_0})$ 相比它的第 i 个投入多投入 Δx_{ij_0} . 同样地, 当 $\Delta y_{rj_0} > 0$ 时, 表示它的第 r 个产出少产出 Δy_{rj_0} . 它反映了该指标相对于有效单元的不足.

3) 当 $\Delta x_{ij_0} < 0$ 时, 表示单元 j_0 与有效单元 $(\hat{x}_{j_0}, \hat{y}_{j_0})$ 相比它的第 i 个投入少投入 Δx_{ij_0} . 它反映了该指标相对于有效单元的优势.

例 2 例 1 中各单元在传统 BC² 及超效率 BC² 模型中的效率值和与其投影的相差值如表 4.

表4 各单元在传统 BC² 及超效率 BC² 模型中效率值和与其投影的相差值Table4 The efficiency values of each decision making unit and the difference between its projection in BC² model and super efficiency BC² model

单元	BC ² 模型效率值	Δx_1	Δx_2	Δy_1	超效率BC ² 模型效率值	Δx_1	Δx_2	Δy_1
<i>a</i>	1	0	4	0	1	0	4	0
<i>b</i>	1	0	0	0	1.316	-0.632	-2.528	0
<i>c</i>	1	0	0	0	1.2	-1	-1	0
<i>d</i>	1	0	0	0	1.25	-2.5	-1	0
<i>e</i>	0.75	2.5	1.5	0	0.75	2.5	1.5	0

从表 4 可以看出: 对无效单元, 两个模型的效率值相同, 如单元 *a*, *e*. 对有效单元, 单元与其投影的相差值揭示了该单元相对于有效单元的优势, 如 $b(2, 8, 1)$ 在超效率 BC² 模型中的投影值为 $f(2.632, 10.528, 1)$. 由此可知单元 *b* 较其投影 *f* 在第一个投入指标上少投入 0.632, 在第二个投入指标上少投入 2.528. 而有效单元投影问题在以往的超效率模型中从未提及.

例 1 中各单元在传统 BC² 及超效率 BC² 模型中的生产可能集见图 1.

在传统 BC² 及超效率 BC² 模型中的各单元对应的生产前沿面见表 5.

表5 传统BC²及超效率 BC² 模型的生产前沿面对比Table5 The production frontiers of BC² model and super efficiency BC² model

模型	传统与超效率模型中各单元的生产前沿面				
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
传统BC ² 模型	图1中mbcdl	图1中mbcdl	图1中mbcdl	图1中mbcdl	图1中mbcdl
超效率 BC ² 模型	图1中mbcdl	图1中macdl	图1中mbdl	图1中mbcn	图1中mbcdl

定义 2^[8] 如果模型 (P_{WRCM}) 存在最优解 ω_0, μ_0, μ_0 , 使 $V_P = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$, 则称单元 j_0 为弱 DEA 有效 (WRCM).

定义 3^[8] 如果模型 (P_{WRCM}) 存在最优解 ω_0, μ_0, μ_0 , 使 $V_P = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$ 且 $\omega_0 \in \text{int}V, \mu_0 \in \text{int}U$, 则称单元 j_0 为 DEA 有效 (WRCM). 因为有效单元的效率值都相等, 所以上述模型无法将有效单元进行区分. 为此, 下面提出权重受限的综合超效率模型.

$X_0 = (x_1, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \dots, x_n)$ 是剔除第 j_0 个单元, 由其余的 $n-1$ 个单元的输入构成的 $m \times (n-1)$ 矩阵, $Y_0 = (y_1, \dots, y_{j_0-1}, y_{j_0+1}, \dots, y_n)$ 是剔除第 j_0 个单元, 由其余的 $n-1$ 个单元的输入构成的 $s \times (n-1)$ 矩阵.

权重受限的综合 DEA 模型虽然考虑到决策者的偏好, 但该模型对于有效单元由于效率值都相等, 其投影的改进值是 0, 因而能提供的信息较少. 为克服权重受限的综合 DEA 模型对有效单元的效率大小无法区分这一不足, 给出如下面向输入的权重受限的综合超效率 DEA 模型

$$(P_{SWRCM}) \begin{cases} \text{Max } (\mu^T y_0 + \delta_1 \mu_0) = V_{SP} \\ \text{s.t. } \omega^T X_0 - \mu^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} \geq 0 \\ \omega^T x_0 = 1 \\ \omega \in V, \mu \in U \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{cases}$$

其对偶模型为

$$(D_{SWRCM}) \begin{cases} \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } X_0 \bar{\lambda} - \theta x_0 \in V^* \\ -Y_0 \bar{\lambda} + y_0 \in U^* \\ \delta_1 (\bar{e}^T \bar{\lambda} - \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1}) = \delta_1 \\ \bar{\lambda} \geq 0, \lambda_{n+1} \geq 0, \end{cases}$$

其中 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 为取值为 0 或 1 的参数, 而 $\bar{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^{n-1}$.

对应的生产可能集为

$$T_{SWRCM} = \{(x, y) | X_0 \bar{\lambda} - x \in V^*, -Y_0 \bar{\lambda} + y \in U^*, \delta_1 (\bar{e}^T \bar{\lambda} - \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1}) = \delta_1, \bar{\lambda} \geq 0, \lambda_{n+1} \geq 0\}.$$

3.2 权重受限的综合超效率 DEA 模型与其他超效率模型的关系

在模型 (P_{SWRCM}) 和 (D_{SWRCM}) 中的参数 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 取不同值, 以及锥 V, U 取一些特殊情况, 可以得到几个基本的超效率 DEA 模型如下

情况 1 当 $\delta_1 = 0, V = R_+^m, U = R_+^s$ 时, (P_{SWRCM}) 和 (D_{SWRCM}) 是超效率 C^2R 模型^[9]

$$(P_{C^2R}^I) \begin{cases} \text{Max } \mu^T y_0 \\ \text{s.t. } \omega^T X_0 - \mu^T Y_0 \geq 0 \\ \omega^T x_0 = 1 \\ \omega \geq 0, \mu \geq 0, \end{cases}$$

$$(D_{C^2R}^I) \begin{cases} \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } X_0 \bar{\lambda} + s^- = \theta x_0 \\ Y_0 \bar{\lambda} - s^+ = y_0 \\ \bar{\lambda} \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0; \end{cases}$$

情况 2 当 $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, V = R_+^m, U = R_+^s$ 时, (P_{SWRCM}) 和 (D_{SWRCM}) 是 Andersen 等在 1993 年提出的超效率 BC^2 模型^[5]

$$(P_{\text{BC}^2}^I) \begin{cases} \text{Max } (\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_0 + \mu_0) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{X}_0 - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Y}_0 - \mu_0 \bar{\mathbf{e}} \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}_0 = 1 \\ \boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$(D_{\text{BC}^2}^I) \begin{cases} \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \mathbf{X}_0 \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{Y}_0 \bar{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_0 \\ \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} = 1 \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^+ \geq \mathbf{0}; \end{cases}$$

情况 3 当 $\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0, V = R_+^m, U = R_+^s$ 时, (P_{SWRCM}) 和 (D_{SWRCM}) 是超效率 FG 模型^[9]

$$(P_{\text{FG}}^I) \begin{cases} \text{Max } (\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_0 + \mu_0) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{X}_0 - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Y}_0 - \mu_0 \bar{\mathbf{e}} \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}_0 = 1 \\ \boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \mu_0 \geq 0, \end{cases}$$

$$(D_{\text{FG}}^I) \begin{cases} \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \mathbf{X}_0 \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{Y}_0 \bar{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_0 \\ \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} \leq 1 \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^+ \geq \mathbf{0}; \end{cases}$$

情况 4 当 $\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \delta_3 = 1, V = R_+^m, U = R_+^s$ 时, (P_{SWRCM}) 和 (D_{SWRCM}) 是超效率 ST 模型^[9]

$$(P_{\text{ST}}^I) \begin{cases} \text{Max } (\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_0 + \mu_0) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{X}_0 - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Y}_0 - \mu_0 \bar{\mathbf{e}} \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}_0 = 1 \\ \boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \mu_0 \leq 0, \end{cases}$$

$$(D_{\text{ST}}^I) \begin{cases} \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \mathbf{X}_0 \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{Y}_0 \bar{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_0 \\ \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq 1 \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^+ \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

3.3 权重受限的综合超效率 DEA 模型的性质

定理 1 模型 (P_{SWRCM}) 总有可行解.

证明 已知 $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(-V^*)$, 取 $\boldsymbol{\omega}_0 \in V$ 且 $\boldsymbol{\omega}_0 \neq \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{x}_0 > 0$, 取 $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{x}_0} \in V, \bar{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0} \in U, \bar{\mu}_0 = 0$,

则

$$\begin{cases} \bar{\omega}^T X_0 - \bar{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0 \bar{e} \geq 0 \\ \bar{\omega}^T x_0 = 1 \\ \bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \bar{\mu}_0 \geq 0, \end{cases}$$

即 $\bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U, \bar{\mu}_0$ 是模型 (P_{SWRCM}) 的可行解.

证毕.

定理 2 第 j_0 个单元为弱 DEA 有效 (WRCM) 等价于模型 (P_{SWRCM}) 有可行解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$, 满足 $V_{SP} = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 \geq 1$.

证明 充分性: 设第 j_0 个单元为弱 DEA 有效 (WRCM), 由定义 2, 模型 (P_{WRCM}) 存在可行解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$, 使 $V_P = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$, 显然 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$ 也是模型 (P_{SWRCM}) 的可行解, 又 $\mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$, 由此可知模型 (P_{SWRCM}) 有可行解使得 $V_{SP} \geq 1$.

必要性: 设模型 (P_{SWRCM}) 有可行解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$, 使 $V_{SP} = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 \geq 1$, 即以下三种情况恰有其中一个成立: ① 模型 (P_{SWRCM}) 有最优解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$, 使 $\mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$; ② 模型 (P_{SWRCM}) 有最优解 $\hat{\omega} \in V, \hat{\mu} \in U, \hat{\mu}_0$, 使 $V_{SP} = \hat{\mu}^T y_0 + \delta_1 \hat{\mu}_0 > 1$; ③ 模型 (P_{SWRCM}) 有无界解. 下面逐一证明以上三种情况下, 第 j_0 个单元均为弱 DEA 有效 (WRCM):

① 设模型 (P_{SWRCM}) 有最优解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$, 使 $\mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$, 则 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$ 满足

$$\begin{cases} \omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} \geq 0 \\ \omega_0^T x_0 - \mu_0^T y_0 - \delta_1 \mu_0 = 0 \\ \omega_0^T x_0 = 1 \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{cases}$$

模型 (P_{WRCM}) 存在可行解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$, 有 $V_P = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$, 由此可知第 j_0 个单元为弱 DEA 有效 (WRCM).

② 设模型 (P_{SWRCM}) 有最优解 $\hat{\omega} \in V, \hat{\mu} \in U, \hat{\mu}_0$, 使 $V_{SP} = \hat{\mu}^T y_0 + \delta_1 \hat{\mu}_0 > 1$, 则

$$\hat{\omega}^T x_0 - \hat{\mu}^T y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 < 0.$$

设模型 (P_{WRCM}) 存在可行解 $\bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U, \bar{\mu}_0$, 显然 $\bar{\mu}^T y_0 + \delta_1 \bar{\mu}_0 \leq 1$, 如果 $\bar{\mu}^T y_0 + \delta_1 \bar{\mu}_0 = 1$, 则 $\bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U, \bar{\mu}_0$ 就是模型 (P_{WRCM}) 的最优解, 第 j_0 个单元为弱 DEA 有效 (WRCM), 结论成立; 如果 $\bar{\mu}^T y_0 + \delta_1 \bar{\mu}_0 < 1$, 则 $\bar{\omega}^T x_0 - \bar{\mu}^T y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0 > 0$. 又 $\hat{\omega}^T x_0 - \hat{\mu}^T y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 < 0$, 一定存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\alpha(\bar{\omega}^T x_0 - \bar{\mu}^T y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0) + \hat{\omega}^T x_0 - \hat{\mu}^T y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 = 0,$$

于是

$$\frac{\alpha(\bar{\omega}^T x_0 - \bar{\mu}^T y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0) + \hat{\omega}^T x_0 - \hat{\mu}^T y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} = 0.$$

取

$$\omega_0 = \frac{\alpha \bar{\omega} + \hat{\omega}}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} \in V, \mu_0 = \frac{\alpha \bar{\mu} + \hat{\mu}}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} \in U, \mu_0 = \frac{\alpha \bar{\mu}_0 + \hat{\mu}_0}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0},$$

显然 $\omega_0^T x_0 = 1, \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$,

$$\begin{aligned} \omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} &= \frac{(\alpha \bar{\omega} + \hat{\omega})^T}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} X_0 - \frac{(\alpha \bar{\mu} + \hat{\mu})^T}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} Y_0 - \delta_1 \frac{\alpha \bar{\mu}_0 + \hat{\mu}_0}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} \bar{e} \\ &= \frac{1}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} (\alpha(\bar{\omega}^T X_0 - \bar{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0 \bar{e}) + (\hat{\omega}^T X_0 - \hat{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 \bar{e})). \end{aligned}$$

$\bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U, \bar{\mu}_0$ 是模型 (P_{WRCM}) 的可行解, 所以 $\bar{\omega}^T X - \bar{\mu}^T Y - \delta_1 \bar{\mu}_0 e \geq 0$, 于是 $\bar{\omega}^T X_0 - \bar{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0 \bar{e} \geq 0$, 又 $\hat{\omega} \in V, \hat{\mu} \in U, \hat{\mu}_0$ 是模型 (P_{SWRCM}) 的最优解, 所以 $\hat{\omega}^T X_0 - \hat{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 \bar{e} \geq 0$, 从而有 $\omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} \geq 0$, 于是

$$\begin{cases} \omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} \geq 0 \\ \omega_0^T x_0 - \mu_0^T y_0 - \delta_1 \mu_0 = 0 \\ \omega_0^T x_0 = 1 \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{cases}$$

即模型 (P_{WRCM}) 存在可行解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0, \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$, 由此可知第 j_0 个单元为弱 DEA 有效 (WRCM).

③ 模型 (P_{SWRCM}) 有无界解, 则一定存在可行解 $\bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U, \bar{\mu}_0$, 使得 $V_{SP} = \bar{\mu}^T y_0 + \delta_1 \bar{\mu}_0 > 1$, 类似于 ② 的证明, 可以证明第 j_0 个单元为弱 DEA 有效 (WRCM). 证毕.

定理 3 第 j_0 个单元为 DEA 有效 (WRCM) 等价于以下三种情况恰有其中一个成立: ① 模型 (P_{SWRCM}) 存在最优解 $\omega_0 \in \text{int } V, \mu_0 \in \text{int } U, \mu_0$, 使得 $\mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$; ② 模型 (P_{SWRCM}) 的最优值 $V_{SP} > 1$; ③ 模型 (P_{SWRCM}) 有无界解.

证明 充分性: 已知第 j_0 个单元为 DEA 有效 (WRCM), 利用反证法, 或者模型 (P_{SWRCM}) 存在最优解 $\omega^* \in V, \mu^* \in U, \mu_0^*$, 使得 $\mu^{*T} y_0 + \delta_1 \mu_0^* = 1$, 且 $(\omega^*, \mu^*) \notin (\text{int } V, \text{int } U)$; 或者模型 (P_{SWRCM}) 的最优值 $V_{SP} < 1$.

如果模型 (P_{SWRCM}) 存在最优解 $\omega^* \in V, \mu^* \in U, \mu_0^*$ 使得 $\mu^{*T} y_0 + \delta_1 \mu_0^* = 1$, 且 $(\omega^*, \mu^*) \notin (\text{int } V, \text{int } U)$, 即

$$\begin{cases} \omega^{*T} X_0 - \mu^{*T} Y_0 - \delta_1 \mu_0^* \bar{e} \geq 0 \\ \omega^{*T} x_0 - \mu^{*T} y_0 - \delta_1 \mu_0^* = 0 \\ \omega^{*T} x_0 = 1 \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0^* \geq 0, \end{cases}$$

模型 (P_{WRCM}) 有可行解 $\omega^* \in V, \mu^* \in U, \mu_0^*$ 且 $\mu^{*T} y_0 + \delta_1 \mu_0^* = 1, (\omega^*, \mu^*) \notin (\text{int } V, \text{int } U)$, 由此可知第 j_0 个单元为弱 DEA 有效 (WRCM). 矛盾.

如果模型 (P_{SWRCM}) 有最优解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$, 满足 $V_{SP} = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 < 1$, 则 ω_0, μ_0, μ_0 满足

$$\begin{cases} \omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} \geq 0 \\ \omega_0^T x_0 - \mu_0^T y_0 - \delta_1 \mu_0 > 0 \\ \omega_0^T x_0 = 1 \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{cases}$$

模型 (P_{WRCM}) 有可行解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$ 且 $\mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 < 1$, 不妨假设 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$ 不是模型 (P_{WRCM}) 的最优解, 可假设模型 (P_{WRCM}) 有最优解 $\bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U, \bar{\mu}_0$, 满足 $\bar{\mu}^T y_0 + \delta_1 \bar{\mu}_0 > \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0$, 很显然 $\bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U, \bar{\mu}_0$ 也是模型 (P_{SWRCM}) 的可行解, 这与 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$ 是模型 (P_{SWRCM}) 的最优解矛盾, 由此可得 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$ 是模型 (P_{WRCM}) 的最优解, 且 $\mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 < 1$, 即第 j_0 个单元为 DEA 无效 (WRCM). 矛盾.

必要性: ① 设模型 (P_{SWRCM}) 有最优解 $\omega_0 \in \text{int } V, \mu_0 \in \text{int } U, \mu_0$, 使 $V_{SP} = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$, 则有

$$\begin{cases} \omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} \geq 0 \\ \omega_0^T x_0 - \mu_0^T y_0 - \delta_1 \mu_0 = 0 \\ \omega_0^T x_0 = 1 \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{cases}$$

模型 (P_{WRCM}) 有可行解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0, \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1, \omega_0 \in \text{int } V, \mu_0 \in \text{int } U$, 因此第 j_0 个单元为 DEA 有效 (WRCM).

② 设模型 (P_{SWRCM}) 有最优解 $\hat{\omega} \in V, \hat{\mu} \in U, \hat{\mu}_0$, 满足 $V_{SP} = \hat{\mu}^T y_0 + \delta_1 \hat{\mu}_0 > 1$, 那么 $\hat{\omega}^T x_0 - \hat{\mu}^T y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 < 0$, 因为 $\text{int } V \neq \emptyset, \text{int } U \neq \emptyset$, 可取到 $\bar{\omega} \in \text{int } V, \bar{\mu} \in \text{int } U, \bar{\mu}_0$ 是模型 (P_{WRCM}) 的可行解, 且 $\bar{\mu}^T y_0 + \delta_1 \bar{\mu}_0 < 1$, 因 $\bar{\omega}^T x_0 = 1$, 有 $\bar{\omega}^T x_0 - \bar{\mu}^T y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0 > 0$. 又 $\hat{\omega}^T x_0 - \hat{\mu}^T y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 < 0$, 一定存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\alpha(\bar{\omega}^T x_0 - \bar{\mu}^T y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0) + \hat{\omega}^T x_0 - \hat{\mu}^T y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 = 0,$$

于是

$$\frac{\alpha(\bar{\omega}^T x_0 - \bar{\mu}^T y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0) + \hat{\omega}^T x_0 - \hat{\mu}^T y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} = 0.$$

取

$$\omega_0 = \frac{\alpha \bar{\omega} + \hat{\omega}}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0}, \mu_0 = \frac{\alpha \bar{\mu} + \hat{\mu}}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0}, \mu_0 = \frac{\alpha \bar{\mu}_0 + \hat{\mu}_0}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0},$$

显然有 $\omega_0^T x_0 = 1, \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$,

$$\begin{aligned} \omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} &= \frac{(\alpha \bar{\omega} + \hat{\omega})^T}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} X_0 - \frac{(\alpha \bar{\mu} + \hat{\mu})^T}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} Y_0 - \delta_1 \frac{\alpha \bar{\mu}_0 + \hat{\mu}_0}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} \bar{e} \\ &= \frac{1}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} (\alpha(\bar{\omega}^T X_0 - \bar{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0 \bar{e}) + (\hat{\omega}^T X_0 - \hat{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 \bar{e})), \end{aligned}$$

即模型 (P_{WRCM}) 存在可行解 $\bar{\omega} \in V, \bar{\mu} \in U, \bar{\mu}_0$, 因此 $\bar{\omega}^T X_0 - \bar{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0 \bar{e} \geq 0$, 于是 $\bar{\omega}^T X_0 - \bar{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \bar{\mu}_0 \bar{e} \geq 0$, 又 $\hat{\omega} \in V, \hat{\mu} \in U, \hat{\mu}_0$ 是模型 (P_{SWRCM}) 的最优解, 所以 $\hat{\omega}^T X_0 - \hat{\mu}^T Y_0 - \delta_1 \hat{\mu}_0 \bar{e} \geq 0$, 所以 $\omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} \geq 0$. 于是

$$\begin{cases} \omega_0^T X_0 - \mu_0^T Y_0 - \delta_1 \mu_0 \bar{e} \geq 0 \\ \omega_0^T x_0 - \mu_0^T y_0 - \delta_1 \mu_0 = 0 \\ \omega_0^T x_0 = 1 \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{cases}$$

另一方面, 由于 $\bar{\omega} \in \text{int } V, V$ 是闭凸锥, 由锥的性质有 $\frac{\alpha \bar{\omega}}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} \in \text{int } V$, 又 $\hat{\omega} \in V$, 因此

$$\omega_0 = \frac{\alpha \bar{\omega}}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} + \frac{\hat{\omega}}{\alpha \bar{\omega}^T x_0 + \hat{\omega}^T x_0} \in \text{int } V,$$

同理可证明 $\mu_0 \in \text{int } U$, 即模型 (P_{WRCM}) 的最优解 ω_0, μ_0, μ_0 满足 $\mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 = 1$, 且 $\omega_0 \in \text{int } V, \mu_0 \in \text{int } U$, 因此第 j_0 个单元为 DEA 有效 (WRCM).

③ 模型 (P_{SWRCM}) 有无界解, 则模型 (P_{SWRCM}) 存在可行解 $\hat{\omega} \in V, \hat{\mu} \in U, \hat{\mu}_0$, 使得 $\hat{\mu}^T y_0 + \delta_1 \hat{\mu}_0 > 1$, 类似于 ② 的证明, 可以证明第 j_0 个单元为 DEA 有效 (WRCM). 证毕.

定理 4 第 j_0 个单元为 DEA 无效 (WRCM) 等价于以下两种情况恰有其中一个成立: ① 模型 (P_{SWRCM}) 的最优值 $V_{SP} < 1$; ② 模型 (P_{SWRCM}) 有最优解 $\omega_0 \in V, \mu_0 \in U, \mu_0$, 使得 $V_{SP} = \mu_0^T y_0 + \delta_1 \mu_0 =$

1, 且 $(\omega_0, \mu_0) \notin (\text{int } V, \text{int } U)$.

证明 定理4是定理3的逆否命题, 结论显然成立.

证毕.

3.4 (P_{SWRCM}) 模型下决策单元投影性质

下面考虑第 j_0 个单元的投影问题.

$$(\text{DS-SWRCM}) \begin{cases} \text{Max } (\tau^T s^- + \hat{\tau}^T s^+) \\ \text{s.t. } X_0 \bar{\lambda} - \theta^* x_0 + s^- = 0 \\ \quad -Y_0 \bar{\lambda} + y_0 + s^+ = 0 \\ \delta_1(\bar{e}^T \bar{\lambda} - \delta_2(-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1}) = \delta_1 \\ \bar{\lambda} \geq 0, \lambda_{n+1} \geq 0, s^- \in -V^*, s^+ \in -U^*, \end{cases}$$

其中 $\tau \in \text{int } V, \hat{\tau} \in \text{int } U, \bar{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^{n-1}$, θ^* 是第 j_0 个单元在模型 (D_{SWRCM}) 中的效率值.

定义4 设模型 (DS-SWRCM) 的最优解为 $(\bar{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, s^{-0}, s^{+0})$, 则

$$\hat{x} = X_0 \bar{\lambda}^0 = \theta^* x_0 - s^{-0}, \hat{y} = Y_0 \bar{\lambda}^0 = y_0 + s^{+0}$$

称为第 j_0 个单元的超效率投影, $(\hat{x}, \hat{y}) \in T_{\text{SWRCM}}$.

下面考虑权重受限的超效率DEA投影与相应的多目标规划问题之间的关系.

$$(\text{VP}) \begin{cases} V - \min(x, -y) \\ \text{s.t. } (x, y) \in T_{\text{SWRCM}} \cup (x_{j_0}, y_{j_0}). \end{cases}$$

定义5^[8] 如果不存在 $(x, y) \in T_{\text{SWRCM}}$ 使

$$(x, -y) \in (x_0, y_0) + (V^*, U^*), (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称 (x_0, y_0) 为多目标规划(VP)的相对于锥 (V^*, U^*) 的非支配解.

定理5 第 j_0 个单元的超效率投影 $(\hat{x}, \hat{y})$ 是多目标规划问题 (VP) 的相对于锥 $V^* \times U^*$ 的非支配解.

证明 假设第 j_0 个单元的超效率投影 $(\hat{x}, \hat{y})$ 不是多目标规划问题 (VP) 的相对于锥 $V^* \times U^*$ 的非支配解, 则一定有 $(\bar{x}, \bar{y}) \in T_{\text{SWRCM}} \cup \{x_0, y_0\}$, 使

$$(\bar{x}, -\bar{y}) = (\hat{x}, -\hat{y}) + (\hat{v}, \hat{u}), \hat{v} \in V^*, \hat{u} \in U^*, (\hat{v}, \hat{u}) \neq 0.$$

因为 $(\bar{x}, \bar{y}) \in T_{\text{SWRCM}} \cup \{x_0, y_0\}$, 故存在 $\bar{\lambda} \geq 0, \lambda_{n+1} \geq 0$ 和 $(\bar{v}, \bar{u}) \in (V^*, U^*)$, 使得

$$(\bar{x}, -\bar{y}) = (X_0 \bar{\lambda}, -Y_0 \bar{\lambda}) + (-\bar{v}, -\bar{u}),$$

$$(X_0 \bar{\lambda}, -Y_0 \bar{\lambda}) = (\hat{x}, -\hat{y}) + (\hat{v} + \bar{v}, \hat{u} + \bar{u}),$$

$$\delta_1(\bar{e}^T \bar{\lambda} - \delta_2(-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1}) = \delta_1.$$

因 $\hat{v} \in V^*, \hat{u} \in U^*, (\hat{v}, \hat{u}) \neq 0, (\bar{v}, \bar{u}) \in (V^*, U^*)$, 有 $(\hat{v} + \bar{v}, \hat{u} + \bar{u}) \neq 0$, 否则, 设 $(\hat{v} + \bar{v}, \hat{u} + \bar{u}) = 0$, 因 $(\hat{v}, \hat{u}) \neq 0$, 不放设 $\hat{v} \neq 0$, 由假设有 $\hat{v} + \bar{v} = 0$, 因为 $\text{int } V \neq \emptyset$, 于是 $\forall \tau \in \text{int } V$, 因为 $\hat{v} \in V^*$ 且 $\hat{v} \neq 0$, 有 $\tau^T \hat{v} < 0$, 再由 $\hat{v} + \bar{v} = 0$, 有 $\tau^T(\hat{v} + \bar{v}) = 0$, 由此可得 $\tau^T \bar{v} > 0$, 这与 $\bar{v} \in V^*$ 矛盾, 因此有 $(\hat{v} + \bar{v}, \hat{u} + \bar{u}) \neq 0$. 记 $v^* = \hat{v} + \bar{v} \in V^*, u^* = \hat{u} + \bar{u} \in U^*$, 于是有

$$(X_0 \bar{\lambda}, -Y_0 \bar{\lambda}) = (\hat{x}, -\hat{y}) + (v^*, u^*), (v^*, u^*) \neq 0,$$

所以

$$X_0 \bar{\lambda} = \hat{x} + v^* = \theta^* x_0 - s^{-0} + v^*,$$

$$-Y_0\bar{\lambda} = -\hat{y} + u^* = -y_0 - s^{+0} + u^*,$$

于是就有

$$\begin{cases} X_0\bar{\lambda} + (s^{-0} - v^*) = \theta^* x_0 \\ Y_0\bar{\lambda} - (s^{+0} - u^*) = y_0 \\ \delta_1(\bar{e}^T \bar{\lambda} - \delta_2(-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1}) = \delta_1 \\ \bar{\lambda} \geq 0, \lambda_{n+1} \geq 0, s^{-0} - v^* \in -V^*, s^{+0} - u^* \in -U^*, \end{cases}$$

模型 (DS-SWRCM) 有可行解 $\bar{\lambda}, \lambda_{n+1}, (s^{-0} - v^*), (s^{+0} - u^*)$. 因为 $\tau \in \text{int } V, v^* \in V^*, \hat{\tau} \in \text{int } U, u^* \in U^*$, 故而 $\tau^T v^* \leq 0, \hat{\tau}^T u^* \leq 0$. 另一方面又有 $(v^*, u^*) \neq 0$, 因此 $\tau^T v^* + \hat{\tau}^T u^* < 0$, 从而有

$$\tau^T (s^{-0} - v^*) + \hat{\tau}^T (s^{+0} - u^*) = (\tau^T s^{-0} + \hat{\tau}^T s^{+0}) - (\tau^T v^* + \hat{\tau}^T u^*) > \tau^T s^{-0} + \hat{\tau}^T s^{+0},$$

这与 $(\bar{\lambda}^0, \lambda_{n+1}^0, s^{-0}, s^{+0})$ 是模型 (DS-SWRCM) 的最优解 (超效率投影定义) 矛盾, 从而证明了第 j_0 个单元的超效率投影 $(\hat{x}, \hat{y})$ 是多目标规划问题 (VP) 的相对于锥 $V^* \times U^*$ 的非支配解. 证毕.

4 应用举例

假设某高校对管理学院的十位学生的学习效率进行评价. 为简便, 不妨以学生的授课实际时间, 预习和复习时间为输入指标, 以课程成绩和创新能力作为输出指标, 具体输入输出指标值如下表 6.

表6 各单元的数据

Table6 Data of decision making unit

学生	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
授课时间指数	48	48	48	48	56	60	50	48	48	60
预复习时间指数	56	45	45	40	60	36	108	40	54	108
课程成绩	86	81	83	77	87	83	90	80	90	88
创新能力成绩	80	80	86	75	81	82	90	80	90	88

1) 各学生在超效率 BC^2 模型中效率值如下表 7.

表7 各学生在超效率 BC^2 模型中效率值

Table7 Efficiency value of decision making units in super efficiency BC^2 model

学生	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
超效 BC^2 率模型效率值	1	1	1.047	1	0.857	1.228	0.96	1.033	2.0	0.8

从表 7 可以看出: 学生 S1, S2, S4, S5, S7, S10 的学习为 DEA 无效, 其中学生 S1, S2, S4 的学习为弱 DEA 有效. 而学生 S3, S6, S8, S9 的学习为 DEA 有效. 然而超效率模型无法给出导致这些单元有效的因素. 下面应用本文中给出的超效率投影概念, 计算各学生学习效率及与其投影的相差值.

2) 超效率 BC^2 模型下各学生学习效率及与其投影的相差值计算结果如下表 8.

表8 各学生在超效率 BC^2 模型中效率值及与其投影的相差值

Table8 The efficiency values of each decision making unit and the difference between its projection in super efficiency BC^2 model

学生	超效 BC^2 率模型效率值	Δx_1	Δx_2	Δy_1	Δy_2
S1	1	0	2	4	10
S2	1	0	0	2	6
S3	1.047	-2.256	-2.115	3.188	0
S4	1	0	0	3	5
S5	0.857	8	8.6	1	7.857
S6	1.228	12	-8.2	0	1
S7	0.96	2	54	0	0
S8	1.033	-1.584	-1.32	0.016	0
S9	2.0	-2	-54	0	0
S10	0.8	12	54	2	2

从表8可以看出: 本文给出的方法不仅能给出无效单元无效的原因, 对有效单元, 其投影的相差值还能给出该单元有效的原因. 如学生 S9 为 DEA 有效, 其中第一种输入指标相对有效单元 (单元 S9 的投影) 少投入了2, 第二个输入指标少投入了54.

3) 如果考虑到决策者的偏好, 例如创新能力的权重至少占到百分之十, 则各学生的学习效率值及与其投影的相差值如下表9.

表9 各学生在本文模型中效率值及与其投影的相差值
Table9 The efficiency value of each decision making unit and the difference between its projection
in weight-restricted super efficiency BC² model

学生	本文模型效率值	Δx_1	Δx_2	Δy_1	Δy_2
S1	1	0	2	0	0
S2	1.2	0	-9	0	0
S3	1.2	0	-9	3	0
S4	1.35	0	-14	0	0
S5	0.9	2	6	0	0
S6	1.5	12	-18	0	0
S7	0.96	2	54	0	0
S8	1.35	0	-14	0	0
S9	2.0	-2	-54	0	0
S10	0.8	12	54	0	0

从表9可以看出: 当决策者对输入输出指标值有一定偏好时, 权重受限的超效率 BC² 模型效率值与超效率 BC² 模型效率值一般不相等, 这一结果说明决策者的偏好 (即权重受限) 对效率值是有一定影响的. 如学生 S2, S3, S4, S5, S6, S8 分别在超效率 BC² 模型和权重受限的超效率 BC² 模型下的效率值和投影值均不相等.

5 结束语

由上述讨论, 传统 DEA 模型给出了无效单元的有效程度及无效的原因, 但对于有效单元能够给出的信息少之甚少, 因为有效单元的效率值都相等, 投影的改进值是 0. 而超效率模型从效率值的角度讨论了有效单元, 未考虑有效单元的投影及其含义. 本文给出了投影的概念, 通过本文的 DEA 投影不仅可以对无效单元给出无效的原因, 而且可以给出有效单元存在的优势. 从而弥补了传统超效率 DEA 模型的不足. 同时, 考虑到数据包络分析方法中输入输出指标的权重受限问题应用范围更为广泛, 进一步给出了权重受限的综合超效率 DEA 模型, 体现出决策者的偏好对效率值的影响. 因此模型 (P_{SWRCM}) 具有更普遍的现实意义.

参考文献:

- [1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 1978, 2(6): 429-444.
- [2] Banker R D, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 1984, 30(9): 1078-1092.
- [3] Fare R, Grosskopf S. A nonparametric cost approach to scale efficiency. *Scandinavian Journal of Economics*, 1985, 87(4): 594-604.
- [4] Seiford L M, Thrall R M. Recent development in DEA: The mathematical programming approach to frontier analysis. *Journal of Economics*, 1990, 46(1/2): 7-38.
- [5] Andersen P, Petersen N C. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 1993, 39(10): 1261-1264.
- [6] Charnes A, Cooper W W, Wei Q L, et al. Cone ratio data envelopment analysis method and multi-objective programming. *International Journal of Systems Science*, 1989, 20(7): 1099-1118.
- [7] Yu P L. Cone convexity, cone extreme points and non-dominated solutions in decision problems with multiobjective. *Journal of Optimization Theory and Application*, 1974, 14(3): 319-377.

- [8] 魏权龄. 数据包络分析. 北京: 科学出版社, 2004.
Wei Q L. Data Envelopment Analysis. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)
- [9] Seiford L M, Zhu J. Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models. INFOR, 1999, 37(2): 174–187.
- [10] 马占新. 广义数据包络分析方法. 北京: 科学出版社, 2012.
Ma Z X. Generalized Data Envelopment Analysis. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese)
- [11] 张福翔. 判断决策单元DEA有效性的一种新方法. 系统工程, 2001, 19(5): 23–27.
Zhang F X. New model for justifying DEA efficiency of decision-making units. Systems Engineering, 2001, 19(5): 23–27. (in Chinese)
- [12] 马占新. 一种基于样本前沿面的综合评价方法. 内蒙古大学学报, 2002, 33(6): 606–610.
Ma Z X. An evaluation method based on some sample units. Journal of Inner Mongolia University, 2002, 33(6): 606–610. (in Chinese)
- [13] 马占新, 马生昀. 基于 C^2W 模型的样本数据包络分析方法研究. 系统工程与电子技术, 2009, 31(2): 366–372.
Ma Z X, Ma S Y. Generalized data envelopment analysis method based on C^2W model. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(2): 366–372. (in Chinese)
- [14] 马占新, 马生昀. 基于 C^2WY 模型的广义数据包络分析方法研究. 系统工程学报, 2011, 26(2): 251–261.
Ma Z X, Ma S Y. Generalized data envelopment analysis method based on C^2WY model. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(2): 251–261. (in Chinese)
- [15] Mu R, Ma Z X, Cui W. Fuzzy data envelopment analysis approach based on sample decision making units. Systems Engineering and Electronics, 2012, 23(3): 399–407.
- [16] 马生昀, 马占新. 基于 C^2W 模型的广义数据包络分析方法. 系统工程理论与实践, 2014, 34(4): 899–909.
Ma S Y, Ma Z X. Generalized data envelopment analysis method based on C^2W model. Systems Engineering: Theory and Practice, 2014, 34(4): 899–909. (in Chinese)
- [17] 马生昀, 马占新. 基于样本前沿面移动的广义 DEA 有效性排序. 系统工程学报, 2014, 29(4): 443–457.
Ma S Y, Ma Z X. Ranking of generalized DEA efficiency based on the moving of sample frontier. Journal of Systems Engineering, 2014, 29(4): 443–457. (in Chinese)

作者简介:

赵春英 (1978—), 女, 内蒙古通辽人, 博士生, 讲师, 研究方向: 最优化方法及其应用, 数据包络分析, Email: chunyingzhao2004@sina.com;

马占新 (1970—), 男, 内蒙古乌兰浩特人, 博士, 教授, 研究方向: 系统优化理论与方法, 数据包络分析, Email: em_mazhanxin@imu.edu.cn.