# 基于随机利率模型可转换债券定价分析

江　良[1], 林鸿熙[2], 林建伟[1], 宋丽平[1]
(1. 莆田学院数学与金融学院, 福建 莆田 351100;
2. 莆田学院商学院, 福建 莆田 351100)

**摘要**: 基于债券数据利用正则化方法给出了均值函数随机利率模型的参数估计, 进一步应用D'Yakonov分裂方法构造了稳定的差分格式并对可转换债券定价问题进行数值计算. 数值结果表明常数均值和相应的均值函数随机利率模型对可转换债券价格的影响没有显著的差异, 然而比较高斯和非高斯利率模型(包括引入长期均值函数)所得的可转换债券价格很明显地依赖于利率的期限结构. 因此, 在定价可转换债券过程中, 需要考虑不同期限结构的利率模型对可转换债券价格的影响, 但无需引入均值函数.

**关键词**: 随机利率; 可转换债券; 差分方法; D'Yakonov 分裂方法
**中图分类号**: F830.9; O241.8　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000−5781(2019)01−0057−12
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2019.01.005

# Analyzing pricing of convertible bonds with stochastic interest rate modelling

**Jiang Liang[1], Lin Hongxi[2], Lin Jianwei[1], Song Liping[1]**
(1. School of Mathematics and Finance, Putian University, Putian 351100, China;
2. School of Business, Putian University, Putian 351100, China )

**Abstract:** This paper develops a parametric estimation for the time-varying mean stochastic interest model by using regularization method. Furthermore, the price of convertible bond could be computed by using the D'Yakonov splitting method together with stable finite difference scheme. The numerical results show that the prices of convertible bonds are not significantly different when using the stochastic interest rate model and the extended model. However, the prices of convertible bonds are highly sensitive to the term structure of Gaussian and Non-Gaussian interest rate model, including the extended model. These results imply that it is important to consider the effects of different term structure models in valuing convertible bonds, but not necessary to consider the mean function.

**Key words:** stochastic interest rate; convertible bonds; finite differential method; D'Yakonov splitting method

## 1 引　言

可转换债券(CB)是一种混合型的金融工具, 具有债券和股权双重属性. 它是公司进行融资的一种重要工具, 比较其它公司融资方法, 通过可转换债券发行所需的成本是比较低的. 一旦执行转换时, 对于持有者

收稿日期: 2016−05−21; 修订日期: 2016−10−31.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471175); 福建省自然科学基金资助项目(2015J05012; 2016J01677; 2016J01678); 福建省教育厅项目资助项目(JA14258S; JK2012045).

而言通过股票二级市场交易可获得更高的收益, 同时对于发行公司本身而言, 这种融资方法减少了资本压力且可以在二级市场上进行股本扩张[1]. 基于这些优势, 对CB定价是金融领域中非常重要的研究方向. 本文将通过数值方法研究随机利率对可转换债券价格影响的问题.

目前已有很多的学者通过不同方法研究了CB定价以及数值计算问题. 如, 张卫国等[2]基于模糊数学方法研究可转换债券定价和数值算法. 杨立洪等[3]在常数利率条件下给出二叉树CB定价的数值解. 马俊海等[4]基于随机波动率标的资产利用控制变量方法给出CB定价的数值方法. Ballottaa等[5]基于Vasicek[6]随机利率模型研究标的资产具有跳扩散性质的CB定价问题. Milanov等[7]基于三叉树的方法给出了具有违约标的资产扩散模型的数值解. 范辛亭等[8]和杨立洪等[9]研究了高斯随机利率条件下CB定价问题. 赵洋等[10], Ammann等[11]和Wilmott 等[12]分别给出了Monte Carlo方法和偏微分方程(PDE)数值解法. 值得一提的是, Zhu等[13]基于奇性分离方法(singularity-separating)建立了可转换债券定价的数值方法. Barone-Ades等[14]应用特征函数和有限元方法计算两因子模型CB价格. 上述的文献中所考虑CB定价问题要么假设随机利率模型要么假设标的资产波动率是随机的问题, 然而没有进一步分析不同随机利率模型(高斯和非高斯)对于CB价格的影响问题. 因此本文将集中考虑随机利率对于CB定价的影响.

由于一份可转换债券价格依赖于可转换标的资产价格波动以及债券到期日之前的价值, 因此数学上的定价方法不同于欧式期权定价, 类似于美式期权定价[12,15]. Wilmott 等[12]通过对冲原理导出偏微分方程(PDE), 并使用有限差分方法计算价格. 然而, 基于高斯短期率模型, 若直接求解相应PDE 方程, 数值方法可能是不稳定的甚至所得数值结果也是不精确的[16,17]. 特别是, Li等[16]基于欧式期权定价给出了数值结果表明对于高斯模型的计算方法(数值方法或Monte Carlo 方法)是无效的(无效意味着数值计算误差较大). 但是, 江良等[17]通过计价单位转换给出了高斯模型的稳定数值解. 而且, 若引入标的资产和随机利率相关性, 基于非高斯模型PDE方程具有混合导数项(或交叉项), 这就使得求解方程变得更加困难.

综上所述, 本文将研究基于高斯和非高斯随机利率(包括引入均值函数)CB定价的问题. 本文主要是应用债券数据, 给出了随机利率的参数估计, 从而分析随机率模型对于可转换债券价格的影响. 为了简化, 本文模型不考虑信用风险问题, [1] 而且假设标的资产波动率是常数的. 虽然可以进行理论的推导引入随机波动率状态变量, 然而相应的PDE 是四维问题(包括时间维度), 四维问题所需的计算量非常大, 可能求解难于实现, 因此假设波动率是常数.

由于高斯随机利率可转换债券的PDE数值解法是不稳定的, 因此本文利用了江良等[17]的结果构造了具有稳定性的偏微分方程数值解法. 此外, 可转债券定价问题(PDE)涉及到自由边界的问题, 并且在非高斯随机利率下的PDE方程具有交叉项和约束条件(变分问题), 因此首先利用罚方法近似计算相应的变分不等式, 也就是转化为非线性偏微分方程问题, 而后基于D'Yakonov分裂方法给出了具有稳定性的差分格式.

## 2 可转换债券定价

假设股票$S_t$和短期利率$r_t$满足下面的随机微分方程 [2]

$$\mathrm{d}S_t = r_t S_t \mathrm{d}t + \sigma_s S_t \mathrm{d}W_t^s, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}r_t = (\theta(t) - a r_t)\mathrm{d}t + \sigma_r g(r_t)\mathrm{d}W_t^r, \tag{2}$$

其中 $\sigma_s$和$\sigma_r$分别表示股票价格和短期利率的常数波动率, $\theta(t)/a$, $a$表示短期利率长期均值函数和相应的回归速率, $[W_t^s, W_t^r]$是一对标准的布朗运动, 相关系数为$\rho$, 即$\mathbb{E}(\mathrm{d}W_t^r \mathrm{d}W_t^s) = \rho \mathrm{d}t$, $\mathbb{E}(\cdot)$ 为期望值算子,

[1] Barone-Adesi等[14]说明, 若考虑信用风险, 由于涉及较多未知量, 从而导致了实践上较难应用, 同时他们也说明了即使技术上可定价具有信用风险CB价格, 但是一些简化模型足够解析实际的问题. McConnel等[18]也解释了简化模型的优势.

[2] 假设在无套利条件下所满足的微分方程(也就是风险中性条件下). 事实上, 在风险中性测度下, 式(2)可以写成$\mathrm{d}r_t = (\theta(t) - \phi\sigma_r^2 g^2(r_t) - a r_t)\mathrm{d}t + \sigma_r g(r_t)\mathrm{d}W_t^r$, 其中$\phi$是常数. 显然当$g(r_t) = \sqrt{r_t}$时, 短期利率票移项可以写成$(\theta(t) - \hat{a} r_t)\mathrm{d}t$, 其中$\hat{a} = \phi\sigma_r^2 + a$; 同理当$g(r) = 1$时, 漂移项可写成$[(\theta(t) - \phi\sigma_r^2) - a r_t]\mathrm{d}t$. 因此在上述两种情况下, 漂移项形式和式(2)是一样的, 这说明式(2) 具有一般性.

$g(r)=1$或$g(r)=\sqrt{r}$分别对应于 Hull-White(HW) 模型和ECIR模型[19].

在随机微分方程(2)中, 引入均值函数模型主要目的是使得随机利率模型能够和远期利率模型相容[19]. 当$g(r)=1$时, Barone-Adesi等[14]已研究了Hull-White随机利率CB定价. 当$g(r)=1, a=0$时, 范辛亭等[8]研究Ho-Lee模型下CB定价. 对于随机利率开方扩散项模型, 杨立洪等[9]做了研究. Wilmott[15](第36章相关讨论)论述了基于Vasicek[6]和CIR模型[20]可转换债券定价问题.

根据Wilmott[15]及Benninga等[21]的结果, 不失一般性, 本金标准化为一个单位且债券到期日和CB到期日是一样的, [3] 那么$V_t=V(r_t,S_t,t;T)$价格为

$$V_t=\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\max(mS_T,1)\right]=P(t,T)\hat{\mathbb{E}}\left[\max(m\hat{S}_T,1)\right], \tag{3}$$

其中 $\hat{\mathbb{E}}(\cdot)$表示在远期测度下条件期望算子, $P(t,T)$ 表示当前时刻为$t$到期日为$T$债券价格, $\hat{S}_t=S_t/P(t,T)$, $m$表示可转换为$m$份标的资产.

显然终端条件为$V_T=\max(mS_T,1)$. 根据McConnel等[18]研究结果, CB价格满足

$$V(S,r,t)\geqslant mS. \tag{4}$$

**注**: 基于Benninga等[21]的论述, 可得$[\max(m\hat{S}_T,1)]=[\max(m\hat{S}_T-1,0)+1]$. 因此式(3) 可改写成

$$V_t=P(t,T)\hat{\mathbb{E}}[\max(m\hat{S}_T-1,0)]+P(t,T), \tag{5}$$

式(5)隐含着一份CB可由一份看涨期权和一份债券价格之和, 而且当转换股价较低时, 持有者不执行转换权, 此时CB等同于一份债券的价值, 即式(5)中条件期望值为零. 若转换股价较高时, 理性的持有者一定执行转换的权利, 而此时CB被转换为相应的股票, 它的价值至少等于标的资产价值, 从而有式(4)的约束条件.

为了分析CB定价式(3)∼式(4)的数值结果, 需要债券价格的数值解$P(t,T)$. 因此, 在给出对于不同随机利率模型可转换债券定价变分问题和罚方法之前, 首先考虑不同短期利率模型债券定价公式.

### 2.1　债券价格

基于Hull等[22], $P(t,T)$具有仿射性结构解: $P(t,T)=A(t,T)\exp(-rB(t,T))$, 其中 $A(t,T)$和$B(t,T)$满足常微分方程组(ODEs). 基于Vasicek和CIR模型, 债券定价公式可参考Brigo等[23].

**模型 1**: Hull-White**模型**

当$g(r)=1$时, $A(t,T)$和$B(t,T)$满足

$$\begin{cases} A'-\theta(t)AB+\dfrac{1}{2}\sigma^2AB^2=0, \quad A(T,T)=1, & (6)\\ B'-aB+1=0, \qquad\qquad B(T,T)=0, & (7)\end{cases}$$

其中 $A=A(t,T)$和$B=B(t,T)$.

方程(6)∼(7)解为[23]

$$\begin{cases} \ln A(t,T)=\dfrac{\sigma^2}{2a^2}\left(T-t+B(t,T;2a)-2B(t,T;a)\right)-\displaystyle\int_t^T B(s,T;a)\theta(s)\mathrm{d}s, & (8)\\ B(t,T)=B(t,T;a)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a}. & (9)\end{cases}$$

**模型2**: ECIR**模型**

当$g(r)=\sqrt{r}$时, $A(t,T)$和$B(t,T)$满足

$$\begin{cases} A'-\theta(t)AB=0, \qquad\qquad A(T,T)=1, & (10)\\ B'-aB-\dfrac{1}{2}\sigma^2B^2+1=0, \quad B(T,T)=0. & (11)\end{cases}$$

[3] Benninga等[21]研究不同到期日可转换债券定价问题.

方程(10)~(11)解为[19,24]

$$\begin{cases} A(t,T)=\exp\left(-\int_t^T B(s,T)\theta(s)\mathrm{d}s\right), & (12)\\ B(t,T)=\dfrac{2(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}, & (13)\end{cases}$$

其中 $\gamma=\sqrt{2\sigma^2+a^2}$及Feller条件为 $2\theta(t)\geqslant\sigma^2$.

### 2.2 可转换债券定价偏微分方程

基于江良等[17]研究结果, 设$y=\ln(S/P)$和$\hat{V}=V/P$, 在远期测度下, 不同随机利率模型下的算子

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\hat{V}&=\frac{\partial\hat{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}_1^2(t)\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial y^2}-\frac{\hat{\sigma}_1^2(t)}{2}\frac{\partial\hat{V}}{\partial y},\\ \mathcal{L}_2\hat{V}&=\frac{\partial\hat{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}_2^2(t)\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial y^2}+\left(\rho\sigma_r^2B(t,T)r+\sigma_s\sigma_r\sqrt{r}\right)\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial r\partial y}+\frac{1}{2}\sigma_r^2r\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial r^2}-\\ &\quad\frac{1}{2}\hat{\sigma}_2^2(t)\frac{\partial\hat{V}}{\partial y}+(\theta(t)-(\sigma_r^2B(t,T)+a)r)\frac{\partial\hat{V}}{\partial r},\end{aligned}$$

其中 $\hat{\sigma}_1(t)=\sqrt{\sigma_s^2+2\rho\sigma_r\sigma_sB(t,T)+\sigma_r^2B^2(t,T)}$, $\hat{\sigma}_2(t)=\sqrt{\sigma_s^2+2\rho\sigma_s\sigma_rB(t,T)\sqrt{r}+B^2(t,T)\sigma_r^2r}$.

**注:** 从$\mathcal{L}_1\hat{V}$算子可以看出, 对于高斯模型, 通过用零息债券作为计价单位, 相应的维数减少了一维, 这在很大程度上减少了计算量. 然而, 关于$\mathcal{L}_2\hat{V}$ 问题的本身维数是不变的.

根据前面的论述, 若理性的持有者不执行转换, 即$\hat{V}_t$一定满足, $\mathcal{L}_i\hat{V}=0, i=1,2$. 这隐含着$\hat{V}>m\exp(y)$. 如果$\hat{V}=m\exp(y)$, 显然$\mathcal{L}_i\hat{V}<0$, 隐含着收益率比银行储蓄账户的收益要小. 因此, CB 定价实际上是一个补偿性优化问题(变分不等式)(参考Wilmott等[12]第9章), 即

$$\begin{cases}\left(\mathcal{L}_i\hat{V}\right)\left(\hat{V}-m\exp(y)\right)=0,\ \ i=1,2,\\ \mathcal{L}_i\hat{V}\leqslant 0,\ \ i=1,2,\\ \hat{V}-m\exp(y)\geqslant 0,\end{cases}\tag{14}$$

其终端条件为$\hat{V}_T=\max(m\exp(y),1)$.

基于罚方法, 变分不等式(14)转化为下面非线性问题

$$\mathcal{L}_i\hat{V}+\mu\max\left(0,m\exp(y)-\hat{V}\right)=0,\ \ i=1,2,\tag{15}$$

其中 $\mu$是罚参数.

由于式(15)是一个标准化问题, 因此其收敛性结果可参考Forsyth等[25]. 若$\mu\to+\infty$, 结合终端条件, 式(15) 的解收敛到式(14)的解.

## 3 可转换债券的数值方法

### 3.1 随机利率模型参数估计

假设债券初始日期$t=0$, 市场价格, $P^M(0,T)$, 完全匹配理论价格, 即$\ln P(0,T)=\ln P^M(0,T)$.

基于Hull-White模型, 根据式(8)和式(9), 可得

$$F(T)+\int_0^T K(t,T)\theta(t)\mathrm{d}t=0,\tag{16}$$

其中 $F(T)=\ln P(0,T)+r_0B(0,T)-\sigma^2\left[T+B(0,T;2a)-2B(0,T;a)\right]/(2a^2)$, $K(t,T)=B(t,T;a)$.

在给定$F(T)$和$K(t,T)$条件下, 相应的函数$\theta(t)$的解通过下面优化问题

$$\underset{\theta(t)\in\Omega}{\mathrm{Min}}\ J_\lambda(\theta)=\frac{1}{2}||F(T)+\mathbf{K}\theta||^2+\frac{1}{2}\lambda||\theta'||^2,\tag{17}$$

其中初始条件$\theta_0=\theta(0)$, $\mathbf{K}\theta=\int_0^T K(t,T)\theta(t)\mathrm{d}t$, $\lambda>0$是正则化参数. $\Omega$是关于$\theta(\cdot)$一个可行的空间, 定义为$\Omega=\{\theta\in H^1(\Lambda)|\theta(0)=\theta_0,\ \theta'(\widehat{T})=0\}$, 其中$\hat{T}$是最大到期日, $\Lambda=[0,\hat{T}]$.

基于ECIR模型, 根据式(12)和式(13), 可推出类似式(16)的积分方程, 相应的$F(T)$和$K(t,T)$分别替换为$\ln P(0,T)+K(0,T)r_0$和$\dfrac{2(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}$. 优化问题形式上也和式(17)一样. 然而归因于Feller条件, 求解优化问题(17)时, 需改变函数$\theta(\cdot)$的可行域, 即$\theta\in\Omega^*=\Omega\cap\{\theta(\cdot)|2\theta(t)\geqslant\sigma^2\}$. 显然, $\Omega^*$是一个凸集.

### 3.2　可转换债券数值计算方法

根据前面论述, 基于HW模型的CB价格满足PDE是一维的问题(不考虑时间维度), 而基于ECIR模型的PDE是非线性二维问题. 因此, 本文将集中构造稳定数值方法求解二维PDE.

首先处理半无界区域问题. 一般处理无界区域$[0,+\infty)$的方法可以通过下列方法实现: 1)构造一个映射函数把无界区域转化有界区域, 进一步使用数值方法求解偏微分方程; 2)选取Laguerre函数作为基函数逼近偏微分方程的解; 3)构造一个足够大有限区域, 设定适当人工边界条件将偏微分方程限定在有限的区域内求解. 本文将选取最后一种方法: 在一个足够大的有限区域内通过有限差分方法求解偏微分方程.

为了给出数值计算, 需要一些假设, 设有限区域为$[0,r_{\max}]\times[y_{\min},y_{\max}]$, 其中$r_{\max}$和$y_{\max}$是足够大的值, $y_{\min}$是足够小的数. 不失一般性, 假设离散步长是等距的, 即$\Delta t=t_{n+1}-t_n$, $\Delta r=r_{j+1}-r_j$, $\Delta y=y_{i+1}-y_i$, $n=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,N_1$, $i=1,2,\dots,N_2$, 其中$t_1=0$, $t_N=T$, $r_1=0$, $r_{\max}=r_{N_1}$及$y_1=y_{\min}$, $y_{\max}=y_{N_2}$, $N,N_1,N_2$分别表示时间和空间上总的节点数. 设$\hat{V}_{ij}^n=V(t_n,y_i,r_j)$为数值解.

在使用D'Yakonov分裂方法计算偏微分方程(15)之前, 先定义算子 [4]

$$\mathcal{L}_{11}\hat{V}=\frac{\partial\hat{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_2^2(t)\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\sigma_2^2(t)\frac{\partial\hat{V}}{\partial y}+\mu\max(0,m\exp(y)-\hat{V}),$$
$$\mathcal{L}_{22}\hat{V}=\frac{\partial\hat{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_r^2 r\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial r^2}+(\theta(t)-(\sigma_r^2B(t,T)+a)r)\frac{\partial\hat{V}}{\partial r},$$

根据D'Yakonov分裂方法, 有

$$\mathcal{L}_{11}\hat{V}=f, \tag{18}$$
$$\mathcal{L}_{22}\hat{V}=f, \tag{19}$$

其中 $f=-\dfrac{1}{2}\left(\rho\sigma_r^2B(t,T)r+\sigma_s\sigma_r\sqrt{r}\right)\dfrac{\partial^2\hat{V}}{\partial r\partial y}$. 这里把混合导数项分裂到两个不同的算子中.

对于式(18)及式(19)中的微分算子使用隐式格式近似[26], 这里不累赘重复说明. 而对于混合导数项用高阶显式格式近似[27−29], 即 [5]

$$\frac{\partial^2\hat{V}_{i,j}^{n+1}}{\partial r\partial y}=\left(\hat{V}_{i+1,j+1}^{n+1}-\hat{V}_{i+1,j-1}^{n+1}-\hat{V}_{i-1,j+1}^{n+1}+\hat{V}_{i-1,j-1}^{n+1}\right)/(4\Delta r\Delta y).$$

**注**: 混合导数也可以分裂在同一个算子, 即要么在算子(18)中或者在算子(19)中, 但需要更高阶的离散近似格式[29]. 为了求解$\mathcal{L}_{22}\hat{V}=f$, 需要给出$r=0$的方程, 即

$$\frac{\partial\hat{V}}{\partial t}+\theta(t)\frac{\partial\hat{V}}{\partial r}=0. \tag{20}$$

基于Feller条件, 显然$\theta(t)>0$, 因此双曲型偏微分方程(20)勿需边界条件即可定解.

D'Yakonov分裂算法如下:

**步骤 1**　给定终端条件和$n$ $(n=N-1,N-2,\dots,1)$.

---

[4] 根据D'Yakonov分裂方法[26], 基于$r$和$y$把空间变量进行分离, 而对混合导数项拆成两部分, 即$f=-\dfrac{1}{2}\left(\rho\sigma_r^2B(t,T)r+\sigma_s\sigma_r\sqrt{r}\right)\dfrac{\partial^2\hat{V}}{\partial r\partial y}$.

[5] 文章的作者也通过使用更高阶的显式格式计算交叉项, 其数值结果和四阶格式近似的效果没有显著的差别.

**步骤 2** 固定$j$ $(j=1,\dots,N_2)$, 求解$\hat{\mathcal{L}}_{11}\hat{V}_{i,j}^{n+*}=f_{i,j}^{n+1}$. [6]

**步骤 3** 固定$i$ $(i=1,\dots,N_1)$, 当$j=1$, 即$r_1=0$, 求解式(20); 当$j\neq 1$求解$\hat{\mathcal{L}}_{22}\hat{V}_{i,j}^{n}=f_{i,j}^{n+*}$.

**步骤4** 重复步骤1到步骤3步骤, 直到 $n=1$.

对于算法, 仍需要人工边界条件. 根据Barone-Adesi等[14]结果, 当$y=y_{\min}$, 使用Neumann边界条件, 其离散格式为 $\hat{V}_{1,j}^{n}=(4\hat{V}_{2,j}^{n}-\hat{V}_{3,j}^{n})/3$. [7] 根据可转换债券合约, 显然当$S\to+\infty$, 意味着持有者行使转化权, 即$V=mS$. 基于Wilmott等[12]第12章中结论, 对于美式期权当标的资产无限大时, 可取二阶导数极限为零作为边界条件, $\lim\limits_{S\to+\infty}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=0$, 即

$$\lim_{y\to+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\left(\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial y^2}-\frac{\partial\hat{V}}{\partial y}\right)=0. \tag{21}$$

式(21)二阶离散格式为

$$\frac{\hat{V}_{N_1,j}^{n+1}-2\hat{V}_{N_1-1,j}^{n+1}+\hat{V}_{N_1-2,j}^{n+1}}{(\Delta y)^2}-\frac{3\hat{V}_{N_1,j}^{n+1}-4\hat{V}_{N_1-1,j}^{n+1}+\hat{V}_{N_1-2,j}^{n+1}}{2\Delta y}=0.$$

当$r\to+\infty$时, 根据Büttler[31]论述, 选取Neumann边界条件, 即 $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{\partial\hat{V}}{\partial r}=0$, [8] 相应的二阶单边离散格式为$\hat{V}_{i,N_2}^{n}=(4\hat{V}_{i,N_2-1}^{n+1}-\hat{V}_{i,N_2-2}^{n+1})/3$.

## 4 可转换债券定价数值结果

### 4.1 随机利率参数估计

首先, 基于债券数据给出随机利率的参数估计. 定义根均值误差RMSE为

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln P^M(0,T_i)-\ln P(0,T_i)\right)^2}. \tag{22}$$

正则化参数λ选取一般有GCV方法[32]及L-Curve方法[33]. GCV方法是关于λ优化问题, 而Hansen[34]给出数值例子, 发现对于积分方程GCV方法选取的λ 可能失效. 而对于L-Curve方法涉及求该曲线上拐点, 需通过求一阶导数和二阶导数, 因此数值解可能不稳定. 所以, 本文将通过线性搜索方法基于最小RMSE的值来选取λ的值.

由于我国债券的数据比较缺少, 因此将使用每周交易2016年5月12号美国的债券收益率数据, 债券到期日为1/12, 1/4, 0.5, 1, 2, 3, 5, 7, 10年(数据来源`http://www.ustreas.gov`). [9] 一个主要的原因是美国国债可被认为无风险零息票的债券. 最大的到期日为$T=10$年. 在计算的过程中设$\Delta T=0.5$, $r_0=0.02\%$. 由于整个可观察数据为9个, 因此对于一些其它节点上的数据, 利用三次样条插值给出[23].

表1列出基于Vasicek模型和CIR模型的参数估计值. 长期回归均值$\theta/a$分别为3.11%和2.59%, 且$2\theta/\sigma^2=1.590\,0>1$满足Feller条件. 观察表1中的数据, 显然基于RMSE的数值结果表明了这两个模型在拟合的问题上没有本质的差别.

根据表1所得数据, 利用两步估计方法, 即第一步通过Vasicek和CIR模型所得参数估计; 第二步, 根据第一步所得估计, 给出$\theta(t)$ 的估计.

[6] 这里$n+*$表述了从第$n+1$层到第$n$层中任何过度层的值. 在实际计算中, 使用中间层$\hat{V}_{i,j}^{n+1/2}$的值, 而微分算子的时间步长仍然是$\Delta t$. $\hat{\mathcal{L}}_{11}$和$\hat{\mathcal{L}}_{22}$表示算子的离散格式.

[7] 另一种可行的方法在$y_{\min}$点处可由下面的方法计算: 在偏微分方程$\mathcal{L}_2\hat{V}=0$中设置$S=0$, 求解偏微分方程从而给出边界条件[26,30].

[8] 根据Barone-Adesi等[14]论述, 当$r\to+\infty$时, 可转换债券仅依赖于$mS$及赎回和可回售价格, 即不依赖$r$, 而且也根据Büttler[31]论述当使用二阶单边近似边界时, 数值结果是稳定的, 因此本文选择了Neumann边界条件.

[9] Barone-Adesi[14]应用2000年8月21日零息债券收益率数据给出了Hull-White模型参数估计, 进一步研究了CB定价的数值算法.

**表 1　参数估计值和相应的RMSE**

Table 1　Parameter estimates and the corresponding RMSE

| 模型 | $\theta$ | $a$ | $\sigma$ | RMSE |
|---|---|---|---|---|
| Vasicek | 0.008 2 | 0.262 7 | 0.036 4 | 0.001 6 |
| CIR | 0.008 0 | 0.307 1 | 0.038 4 | 0.001 6 |

表2基于HW和ECIR模型对于不同正则化参数所得RMSE估计值. 从表2数值结果可得, 两种模型所得RMSE几乎没有显著的差异, 而且当$\lambda = 0.1$时, 和其它情况结果所得误差也没有明显的区别. 这就说明了高斯和非高斯模型对于收益率曲线拟合没有显著的差异.

**表 2　不同正则化参数所得RMSE估计值**

Table 2　The RMSE value for regularization parameters

| | Hull-White模型 | | | ECIR模型 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | 0 | $10^{-6\ddagger}$ | $\lambda$=0.1 | 0 | $5\times10^{-6\ \ddagger}$ | $\lambda$=0.1 |
| RMSE | $8.122\,7\times10^{-5}$ | $8.196\,2\times10^{-5}$ | $4.437\,0\times10^{-4}$ | $1.220\,8\times10^{-4}$ | $1.234\,2\times10^{-4}$ | $4.508\,5\times10^{-4}$ |

注: ‡ 表示通过最小化RMSE获得正则化参数选取.

图 1给出了基于不同正则化参数和模型所得 $\theta(t)$ 数值解.

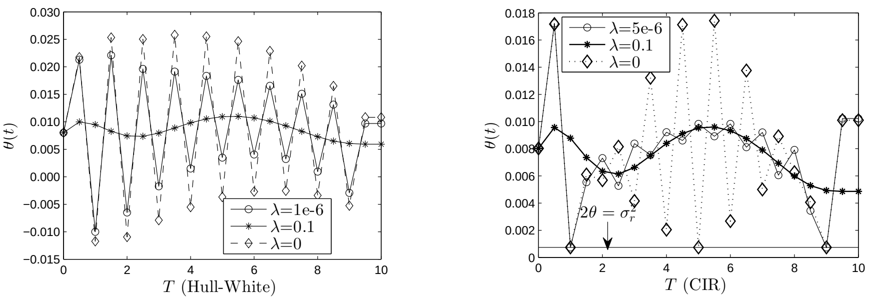


**图 1　基于不同正则化参数和模型所得 $\theta(t)$ 数值解**

Fig. 1　The numerical solutions of $\theta(t)$ for the different regularization parameters and models

图2分别给出了HW模型和ECIR模型均值函数估计, 其中$\lambda$通过最小RMSE 获得, 分别为$10^{-6}$和$5\times10^{-6}$. 从图形可以看出, 显然当正则化参数比较小时, 函数$\theta(t)$呈现激烈震荡, 而且对于HW模型其值可能小于零. 然而在实际应用中, 一般选择了大于零且比较平稳的数值结果.

## 4.2　可转换债券数值解法

在整个计算过程中, 假设CB的到期日和债券价格到期日是一样的(若不一样, 可通过对$\theta(t)$的数值结果插值, 然后计算), 也就是$\Delta t = 0.5, \hat{T} = 10$年. $\theta(t)$的值相对应于$\lambda = 0.1$获得. 偏微分方程的空间步长分别为$\Delta y = 0.01$及$\Delta r = 0.01$. 在所有的数值结果中, 标的资产的波动率$\sigma_s = 0.12$, 最大到期日为10年. 不失一般性, 在CB计算过程中, 转换比率$m = 1$, [10] 罚参数$\mu = 10^4$.

为了能够更好地比较随机利率模型对CB的影响, 定义了相对误差(RE),

$$\mathrm{RE} = \frac{\text{CIR (ECIR) 模型数值结果} - \text{Vasicek (HW) 模型数值结果}}{\text{Vasicek (HW) 模型数值结果}} \times 100\%. \tag{23}$$

最后式(18)和式(19)的数值结果$\hat{V}$通过线性插值方法转化为原来的$V$值. 因此, 下面所有结果基于$V$而不是$\hat{V}$.

图2∼图4描述了基于Vasicek和CIR模型不同相关系数$\rho$, 标的资产$S$及$r$对CB价格的影响.

[10] 对于转换率, 可调整$S$使得$mS$ 和$S$(当$m = 1$时)的值相同. 当$m = 0.5$, $S = 1$, 此时$mS = 0.5$; 当$m = 1$, $S = 0.5$, 那么$mS = 0.5$.

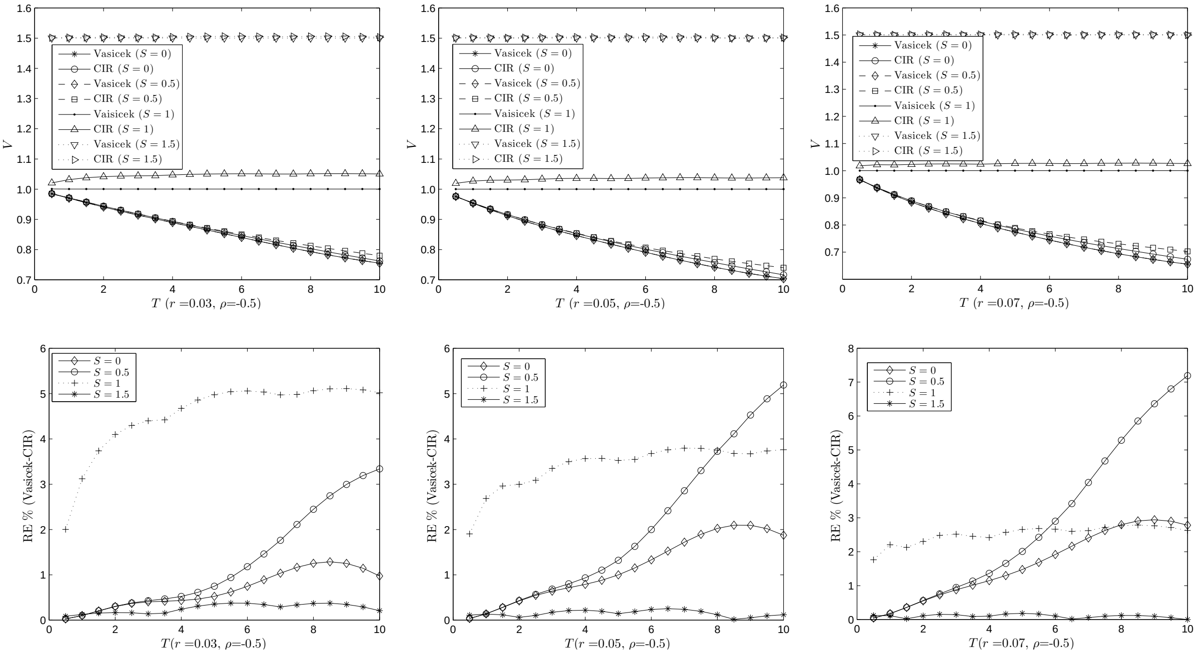


图 2 基于Vasicek和CIR模型, 计算CB价格和相应的相对误差($\rho=-0.5$)

Fig. 2 Price of convertible bond vs. $r$ and $S$ based on Vasicek and CIR model ($\rho=-0.5$)

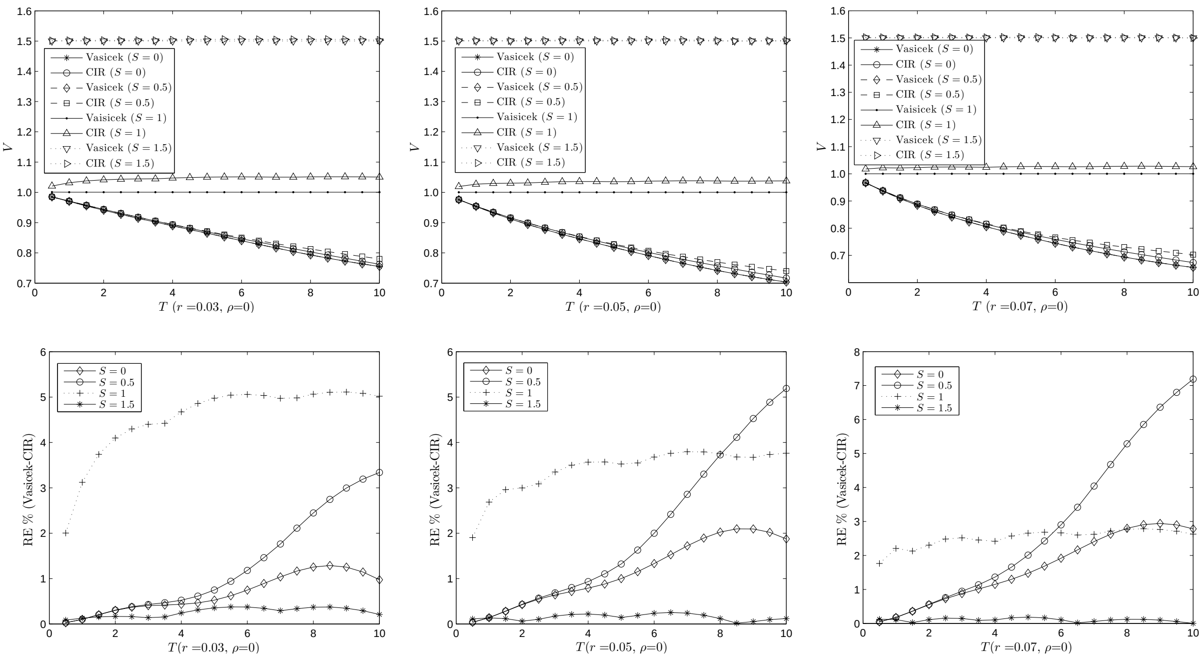


图 3 基于Vasicek和CIR模型, 计算CB价格和相应的相对误差($\rho=0$)

Fig. 3 Price of convertible bond based on Vasicek and CIR model ($\rho=0$)

首先观察到, 当$S=0$时, CB 价格等价于债券价格. 当$0<S<1$, CB价格小于1; 当$S>1$时, 其可转券价格都大于1. 这种现象类似于Zhu等[13]的结论. Zhu 等[13]论述了当债券收益率大于债券票息率时且$S<1$时, CB价格小于1. 当$S$增加时, 相对误差逐渐减小, 这说明了当$mS$足够大时, 这两个模型定价没有显著的差异. 根据前面理论分析, 若$mS$足够大时, CB价格可近似为$V\approx mS$. 而对于$r$和$\rho$, 当$S\leqslant 1$时, 它们增加时, 相应的相对误差也增加. 另一方面, 当$0<S\leqslant 1$时, 随着$T$的增加, 相应相对误差也增大. 然而在可接受范围内, 对于$r$和$\rho$其影响可以不考虑. Li等[16]也说明了相关系数(标的资产和利率之间)对于期权价格冲击比较小.

图5～图7描述了基于HW和ECIR模型不同相关系数$\rho$, 标的资产$S$ 及$r$对于CB数值结果的影响, 其结果和前面Vasicek 模型及CIR模型类似.

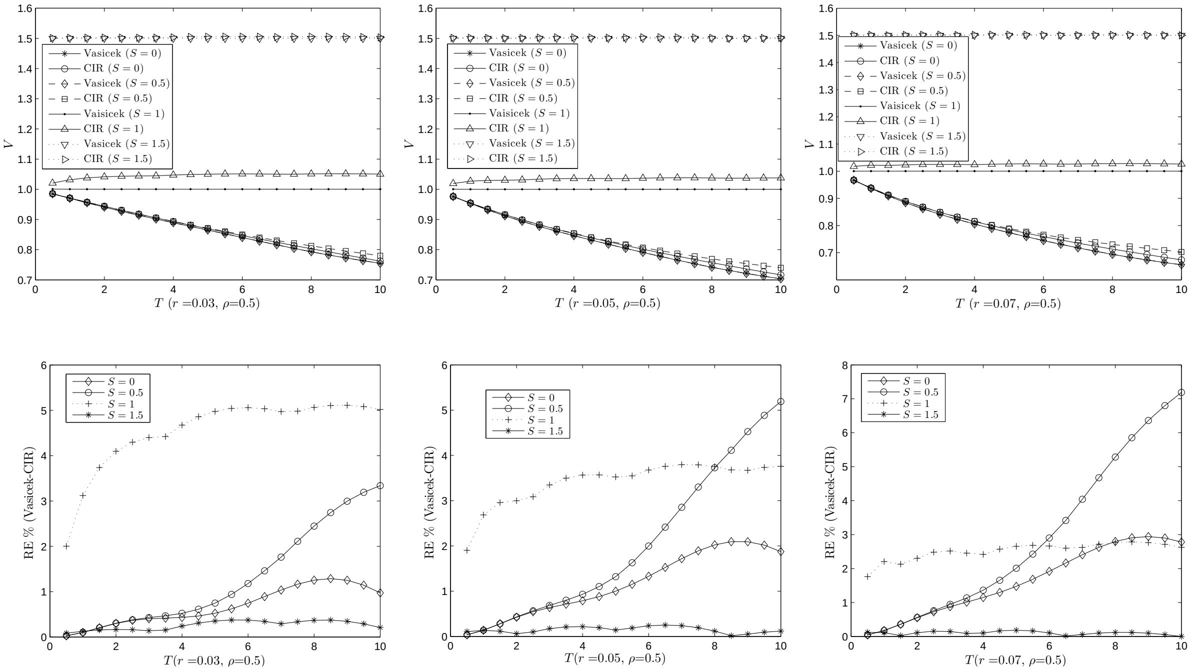


图 4　基于Vasicek和CIR模型, 计算CB价格和相应的相对误差($\rho = 0.5$)

Fig.4　Price of convertible bond based on Vasicek and CIR model ($\rho = 0.5$)

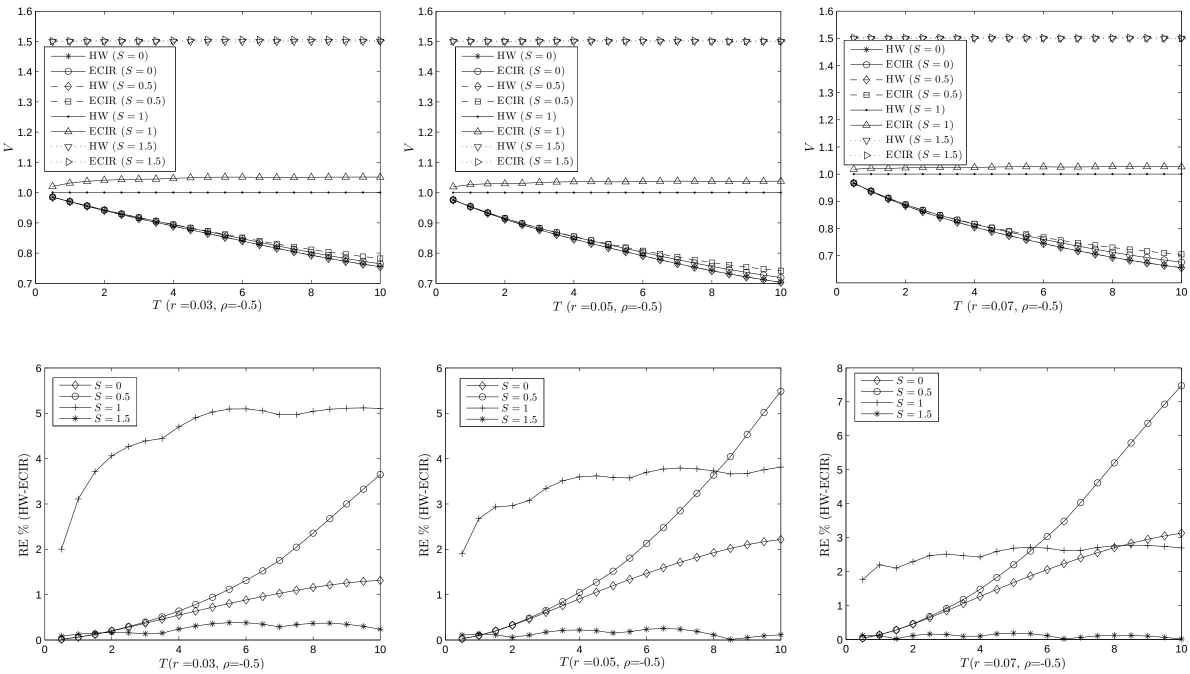


图 5　基于 HW 和 ECIR 模型, 计算CB价格和相应的相对误差($\rho = -0.5$)

Fig.5　Price of convertible bond based on HW and ECIR model ($\rho = -0.5$)

图8描述基于不同利率模型CB的数值结果和相应的相对误差, 参数$r = 0.07$, $\rho = 0.5$及$S = 0.5$, 因为这类情形的相对误差比较大. 若在短期上, 即$T < 5$时, 基于Vasicek模型的数值结果很好近似其它利率模型的数值结果. 而且, 也观察到, 引入均值函数模型, 可能是没有必要的.

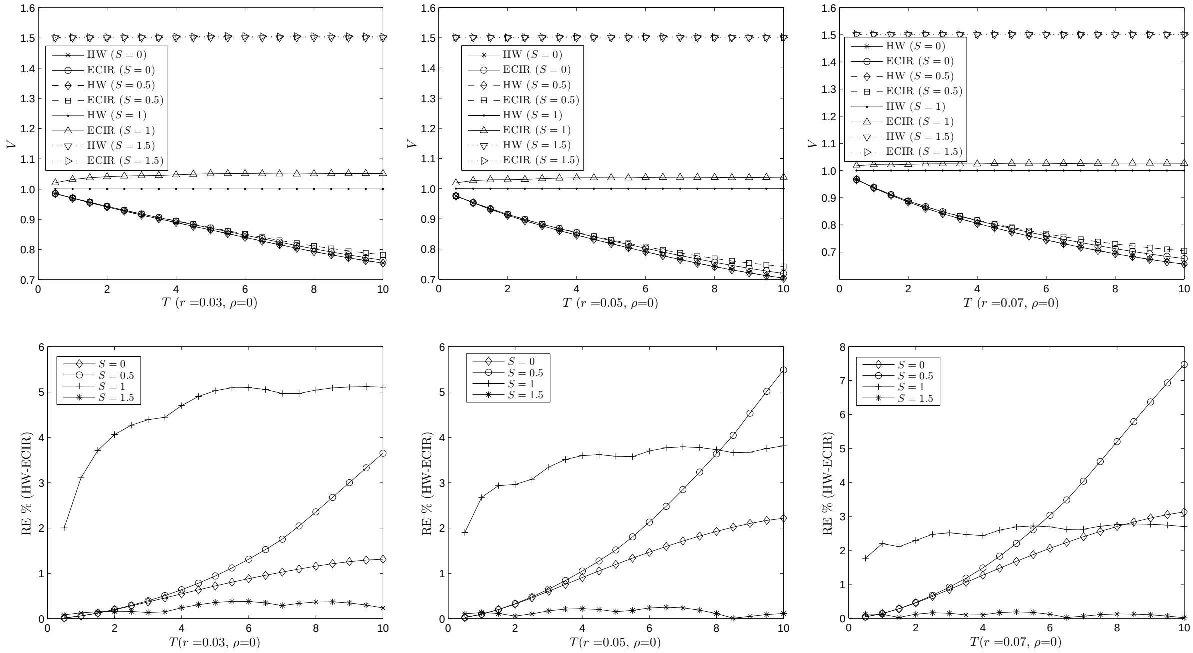


图 6 基于 HW 和 ECIR 模型, 计算CB价格和相应的相对误差($\rho = 0$)

Fig.6 Price of convertible bond based on HW and ECIR model ($\rho = 0$)

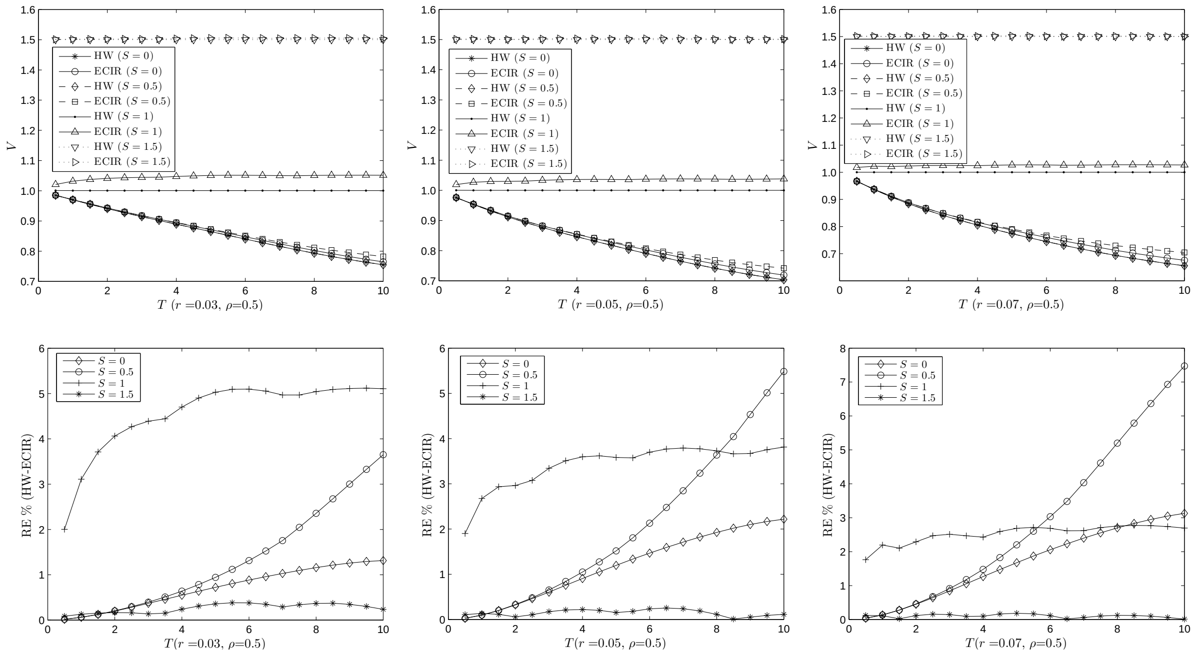


图 7 基于 HW 和 ECIR 模型, 计算CB价格和相应的相对误差($\rho = 0.5$)

Fig.7 Price of convertible bond based on HW and ECIR model ($\rho = 0.5$)

综上所述, 当$S \geqslant 1$时, 基于高斯模型和非高斯模型, CB价格没有显著的差异; 而当$0 < S < 1$时, 在短期内($T < 5$), 高斯模型和非高斯模型对于CB定价没有显著的差异; 当$0 < S < 1$时, 在较长期限内($T > 5$), 基于非高斯模型将高于高斯模型CB的价格.

最后, 将给出不同利率模型在时刻$T$的自由边界图形, 相应的相关系数$\rho = 0.5$. 为了简化说明, 仅给出$T = 10$年的自由边界曲线, 其它时间上, 可以类似可得. 图9描述不同利率模型的自由边界. 从图形可知, 引入均值函数随机利率模型对于CB 价格冲击较小. 当$r$足够小时, 高斯模型和非高斯模型的自由边界有着很大不同, 而当$r$增大时, 其差异变小.

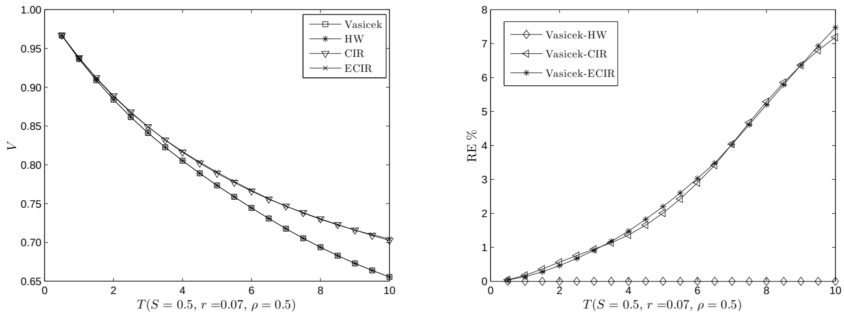


图 8　基于数值结果和相对误差

Fig.8 Estimation for residual errors

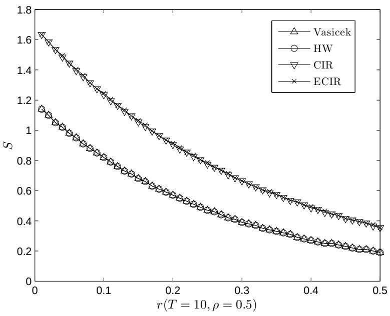


图 9　自由边界

Fig.9 Free boundary

## 5　结束语

本文考虑随机利率模型CB定价问题. 通过计价单位转换, 应用D’Yakonov方法把二维问题(不考虑时间维度)转化为两个一维问题, 并给出稳定数值算法. 数值结果表明了, 当到期日不太大时, 或者$mS$足够大时, 高斯和非高斯模型所得CB价格没有明显的差异, 甚至价格对相关系数也不太敏感, 而且通过计价单位转换高斯模型变成一维问题, 从而简化了计算复杂性. 因此, 在容许的误差范围内, 可使用高斯模型, 也回应了Barone-Adesi等[14]和McConnel 等[18]结果, 在实际定价CB价格时, 业界可以考虑简化的模型从而达到了简化计算的目的. 然而, 数值结果也表明了相对误差和$r$是同向移动, 隐含着当期限足够大时, 基于高斯和非高斯模型所得价格需要进一步考虑. 特别是投资者执行转换权利时(自由边界问题), 需要谨慎考虑高斯和非高斯模型所得定价(见图9). 最后, 无论是短期的还是长期的期限, 在利率模型中引入均值函数, 所得CB价格几乎没有显著的差异, 这就揭示了可以不考虑均值函数模型, 直接使用常数均值模型, 这也简化了CB 价格计算的复杂性, 因为均值函数模型需要解积分方程.

## 致谢:

作者非常感谢同济大学姜礼尚教授和徐承龙教授给出宝贵的建议.

### 参考文献:

[1] Zhang L. A summary of literature: Convertible bond issue announcement effect. American Journal of Industrial and Business Management, 2016, 6(2): 83–88.

[2] 张卫国, 史庆盛, 肖炜麟. 中国可转债模糊定价及其算法研究. 系统工程学报, 2010, 25(2): 241–245.
Zhang W G, Shi Q S, Xiao W L. Fuzzy pricing model of convertible bonds in China and its algorithm. Journal of Systems Engineering, 2010, 25(2): 241–245. (in Chinese)

[3] 杨立洪, 杨　霞. 二叉树模型在可转换债券定价中的应用. 华南理工大学学报, 2005, 33(3): 99–102.
Yang L H, Yang X. Application of two binomial tree model to the pricing of convertible bond. Journal of South China University of Technology, 2005, 33(3): 99–102. (in Chinese)

[4] 马俊海, 杨　非. 可转换债券蒙特卡罗模拟定价的控制变量改进方法. 系统工程理论与实践, 2009, 29(6): 77–85.
Ma J H, Yang F. Improved control variable methods of Monte Carlo simulation for pricing convertible bonds. Systems Engineering: Theory & Practice, 2009, 29(6): 77–85. (in Chinese)

[5] Ballottaa L, Kyriakoua I. Convertible bond valuation in a jump diffusion setting with stochastic interest rates. Quantitative Finance, 2015, 15(1): 119–129.

[6] Vasicek O A. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177–188.

[7] Milanov K, Kounchev O, Fabozzi F J, et al. A binomial-tree model for convertible bond pricing. The Journal of Fixed Income, 2013, 22(3): 79–94.

[8] 范辛亭, 方兆本. 随机利率条件下可转换债券定价模型的经验检验. 中国管理科学, 2001, 9(6): 7–14.
Fan X T, Fang Z B. Empirical test on convertible bond pricing model under stochastic interest rate. Chinese Journal of Management Science, 2001, 9(6): 7–14. (in Chinese)

[9] 杨立洪, 蓝雁书, 曹显兵. 在随机利率情形下可转换债券信用风险定价模型探讨. 系统工程理论与实践, 2007, 27 (9): 17–23.
Yang L H, Lan Y S, Cao X B. Study on the pricing model of convertible bonds with default risk and interest rate. Systems Engineering: Theory & Practice, 2007, 27(9): 17–23. (in Chinese)

[10] 赵 洋, 赵立臣. 基于蒙特卡罗模拟的可转换债券定价研究. 系统工程学报, 2009, 24(5): 621–625.
Zhao Y, Zhao L C. Monte Carlo-based pricing of convertible bonds. Journal of Systems Engineering, 2009, 24(5): 621–625. (in Chinese)

[11] Ammann M, Kind A, Christian W. Simulation-based pricing of convertible bonds. Journal of Empirical Finance, 2008, 15(2): 310–331.

[12] Wilmott P, Dewynne J, Howison S. Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford: Oxford Financial Press, 1993.

[13] Zhu Y L, Sun Y. The singularity-separating method for two-factor convertible bonds. Journal of Computational Finance, 1999, 3(1): 91–110.

[14] Barone-Adesi G, Bermudez A, Hatgioanides J. Two-factor convertible bonds valuation using the method of characteristics/finite elements. Journal of Economic Dynamics & Control, 2003, 27(10): 1801–1831.

[15] Wilmott P. Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering. New York: John Willey & Sons Inc., 1998.

[16] Li S J, Li S H, Sun C. A generalization of reset options pricing formulae with stochastic interest rates. Research in International Business and Fiance, 2007, 21 (2): 119–133.

[17] 江 良, 林鸿熙. 利率衍生品定价可行性模型. 应用泛函分析学报, 2014, 16 (1): 10–17.
Jiang L, Lin H X. Parameter estimation and models comparison for interest rate models based on coupon market-data. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2014, 16(1): 10–17. (in Chinese)

[18] McConnel J J, Schwartz E S. LYON taming. Journal of Finance, 1986, 41(3): 561–577.

[19] Hull J, White A. One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1993, 28(2): 235–254.

[20] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 1985, 53(2): 385–407.

[21] Benninga S, Bjork T, Wiener Z. On the use of numeraires in option pricing. The Journal of Derivatives, 2002, 10(2): 43–58.

[22] Hull J, White A. Pricing interest rate derivative securitites. The Review of Financial Studies, 1990, 3(4): 573–392.

[23] Brigo D, Mercurio F. Interest-Rate Models: Theory and Practice. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[24] Hull J, White A. Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-factor models. Journal of Derivatives, 1994, 2(1): 7–16.

[25] Forsyth P A, Vetzal R K. Quadratic convergence for valuing American options using penalty method. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 97(2): 321–352.

[26] Duffy D J. Finite Difference Methods in Finacial Engineering: A Partial Differenctial Equation Approach. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2006.

[27] Craig L J D, Sneyd A D. An alternating-direction implicit scheme for parabolic equations with mixed derivatives. Computers & Mathematics with Applications, 1988, 16(4): 341–350.

[28] McKee S, Mitchell A R. Alternating direction methods for parabolic equations in two space dimensions with a mixed derivative. The Computer Journal, 1970, 13(1): 81–86.

[29] Satteluri R, Iyengar K, Jain M K. Comparative study of two and three level ADI methods for parabolic equations with a mixed derivative. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976, 10(6): 1309–1315.

[30] Sun Y. High order methods for evaluating convertible bonds. University of North Carolina, 1999.

[31] Büttler H J. Evaluation of callable bonds: Finite difference methods, stability and accuracy. The Economic Journal, 1995, 105(429): 374–384.

[32] Wahba G. Spline Models for Obserational Data. Philadelphia: SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematic, 1990.

[33] Hansen P C, Leary D P O. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. SIAM Journal on Scientific Computing, 1993, 14 (6): 1487–1503.

[34] Hansen P C. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. Computational Inverse Problems in Electrocardiology, Johnston P, editor, Advances in Computational Bioengineering. Southampton: WIT Press, 2000, 4: 119–142.

## 作者简介:

江 良 (1978—), 男, 福建莆田人, 博士, 副教授, 研究方向: 金融工程和金融计算, Email: ptjliang@163.com;

林鸿熙 (1969—), 男, 福建莆田人, 硕士, 教授, 研究方向: 金融工程和博弈论, Email: linhongxi@163.com;

林建伟 (1979—), 男, 福建莆田人, 博士, 副教授, 研究方向: 金融数学和偏微分方程, Email: jianwei_lin@126.com;

宋丽平 (1979—), 女, 福建莆田人, 博士, 副教授, 研究方向: 金融数学和金融工程, Email: lipingsong@126.com.