

两水平修理策略的 $k/n(G)$ 表决系统可靠性分析

吴文青¹, 唐应辉^{2*}, 张元元¹

(1. 西南科技大学理学院, 四川 绵阳 621010;

2. 四川师范大学数学与软件科学学院, 四川 成都 610066)

摘要: 研究了具有两水平修理策略和两类修理工的表决可修系统, 其中部件的工作时间和修理时间均服从负指数分布. 使用马尔可夫分析方法和马氏链吸收时间理论, 讨论了系统可用度、故障频度、首次故障前的平均时间等指标. 在此基础上, 分析了不同条件下系统相关指标随系统参数变化的情况. 最后, 通过蒙特卡罗仿真和特殊情形的数值结果验证了所得表达式的正确性.

关键词: 可修系统; 两水平修理策略; 马尔可夫分析方法; 可靠性指标

中图分类号: O213.2; O226

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2018)06-0854-11

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2018.06.014

Reliability analysis of an $k/n(G)$ system with bi-level repair strategy

Wu Wenqing¹, Tang Yinghui^{2*}, Zhang Yuanyuan¹

(1. School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China;

2. School of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: This paper investigates a repairable system with bi-level repair strategy and two types of repairmen, in which the working times and repair times of components follow exponential distributions. Employing the Markov analysis method and the theory of the absorption time of a Markov chain, this paper discusses the system availability, the rate of occurrence of failures of the system, the mean time prior to failure of the system and some other system performance measures. Further, this paper also analyzes the influence of system parameters on system reliability measures. Finally, Monte Carlo simulation and special cases are provided to show the correctness of the theoretical results.

Key words: repairable system; bi-level repair strategy; Markov analysis method; reliability measures

1 引言

$k/n(G)$ 表决系统由 n 个部件组成, 当 n 个部件中至少有 k 个部件同时正常工作时, 系统才正常运转($1 \leq k \leq n$), 即当故障的部件数等于 $n - k + 1$ 时系统就故障. 关于 $k/n(G)$ 表决系统的基本理论及相关研究成果可见文献[1,2]. 在 $k/n(G)$ 表决系统中, 若 $k = 1$, 则系统退化成 n 部件并联系统, 此时系统故障当且仅当 n 个部件全部处于故障状态. 若 $k = n$, 则系统退化成 n 部件串联系统, 此时系统故障当且仅当 n 个工作部件中有一个部件发生故障. 关于其特例的研究可见文献[3-5]. $k/n(G)$ 表决系统作为可靠性数学理论

收稿日期: 2016-09-14; 修订日期: 2017-06-01.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71571127; 71301111); 西南科技大学博士研究基金资助项目(15zx7141); 西南科技大学龙山学术人才科研支持计划“研究专项”资助项目(17LZZY20).

*通信作者

中的一类非常重要的基本模型,被广泛应用于金融系统、航空航天系统、通信系统、核安全系统等.比如,在核电站系统中,反应堆保护系统由 n 个保护装置组成,只要有任意的 k 个及以上的保护装置符合保护触发条件,系统便发出保护动作以保护三大核安全屏障(燃料包壳、一回路压力边界和安全壳)的完整性.这里的反应堆保护系统可看作是一个 $k/n(G)$ 表决系统.

一些对经典的 $k/n(G)$ 表决可修系统的研究可见文献[6-9]. 这些文献使用随机过程理论与方法讨论了系统的可用度、系统的故障频度、系统首次故障前的平均时间等可靠性指标. Zhang 等^[10]研究了马尔可夫型 $k/n(F)$ 表决可修系统,即 $(n-k+1)/n(G)$ 表决可修系统,其中部件修复如新,修理设备修复不如新.作者利用几何过程理论、排队论方法和向量马尔可夫过程理论给出了系统的可用度、故障部件的平均等待修理时间、修理设备空闲的概率等相关指标以及数值结果.另外, Krishnamoorthy 等^[11-13]又将各种维修策略,如 D -策略, T -策略或者 N -策略引入到 $k/n(G)$ 表决系统的研究中,并给出了相关可靠性指标的表达式和数值结果.在文献[13]中,作者考虑的 N -策略维修规则是这样的:当系统中故障部件数累积到预先设定的 N 值时,修理工才开始修理故障的部件,一直持续到系统中没有故障部件为止.然后,修理工转入空闲状态直到下一次系统中累积故障部件数达到 N 值时才又开始转入修理状态.随后, Wu 等^[14]研究了 N 策略,修理工多重休假和修理设备可更换的 $k/n(G)$ 表决可修系统.利用马尔可夫过程理论和矩阵分析方法,作者得到了一系列系统可靠性指标的表达式.在此基础上建立了系统长时间运行下的利润函数,并数值给出了最优解.更多关于 $k/n(G)$ 表决系统的工作可见文献[15-19].最近,付永红等人^[20]研究了一个具有两水平修理策略的机器维修模型,即 $1/n(G)$ 表决系统.使用补充变量法,作者获得了稳态下系统中故障机器数的概率分布,以及相关指标的表达式和数值结果.

受文献[13,20]的启发,本文考虑具有两水平 (r, s) 修理策略的 $k/n(G)$ 表决可修系统.这种修理策略的本质在于通过对阈值的事先设定来合理有效地指派普通修理工或者熟练修理工对故障部件进行修理.与之前的 $k/n(G)$ 表决可修系统模型相比较,这种修理策略的特点是:工作部件故障后并不立即对其进行任何修理,而是等到故障部件累积到事先设定的低阈值 r 时,才指派普通修理工进行修理.如果普通修理工在修理过程中进展不顺利,故障部件数持续增加到高阈值 s 时,系统性能受到严重影响时,将立即指派熟练修理工去接替普通修理工对故障部件进行修理,以尽快恢复系统的性能.利用马尔可夫过程理论和分析方法,讨论了系统可用度、故障频度以及系统首次故障前的平均时间等可靠性指标,并给出了相关指标的表达式和数值结果.

2 两水平修理策略的 $k/n(G)$ 表决可修系统

本文研究的两水平修理策略的 $k/n(G)$ 表决可修系统的模型描述如下:

1) 系统由 n 个同型部件组成,当至少有 $k(1 \leq k \leq n)$ 个部件同时工作时,系统才正常工作.当故障部件数等于 $n-k+1$ 时系统就故障,在系统故障期间,剩余的 $k-1$ 个正常部件不再发生故障.

2) 系统中每个部件的工作寿命 X 服从负指数分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, 0 < \lambda < \infty, t \geq 0$. 当工作部件发生故障时,系统将根据两水平 $(r, s), 0 \leq r \leq s \leq n-k+1$, 修理策略指派相应的修理工对其进行修理.如果系统中故障的部件数小于 r 值时,系统暂不指派修理工修理故障部件.如果系统中故障的部件数达到 r 值时,立即指派普通修理工对故障部件进行修理.若普通修理工的修理工作顺利, r 个故障部件及其后的故障部件修理完毕,则普通修理工撤出系统.若普通修理工的修理工作不顺利,系统中故障部件数持续增加到 s 值时,系统则立即指派熟练修理工对故障部件进行修理.当系统性能好转,故障部件数小于 s 时,熟练修理工撤出系统,原先的普通修理工进入系统继续修理,直到所有的故障部件修理完毕.如果在此期间,系统累积的故障部件数又一次达到阈值 s 时,则熟练修理工再次接替普通修理工进入系统开展修理工作.

3) 普通修理工的修理时间 Y_1 服从负指数分布 $G_1(t) = 1 - e^{-\mu_1 t}, 0 \leq \mu_1 < \infty, t \geq 0$. 熟练修理工的修理时间 Y 服从负指数分布 $G(t) = 1 - e^{-\mu t}, 0 \leq \mu < \infty, t \geq 0$.

4) 系统涉及到的随机变量彼此独立.

下面建立系统状态概率满足的稳态方程组. 令 $L(t) = i, i = 0, 1, \dots, n - k + 1$, 表示时刻 t 系统中有 i 个部件处于故障状态(包括正在修理的部件). 设

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } t \text{ 系统未指派修理工修理故障部件} \\ 1, & \text{时刻 } t \text{ 普通修理工正在修理故障部件} \\ 2, & \text{时刻 } t \text{ 熟练修理工正在修理故障部件.} \end{cases}$$

由模型描述和负指数分布的“无记忆性”可知, 随机过程 $\{L(t), J(t) | t \geq 0\}$ 是连续时间拟生灭过程, 其状态空间为

$$\Omega = \{(i, 0) | i = 0, 1, \dots, r - 1\} \cup \{(i, 1) | i = 1, 2, \dots, s - 1\} \cup \{(i, 2) | i = s, s + 1, \dots, n - k + 1\}.$$

为了后面讨论的方便, 记 $\lambda_i = (n - i)\lambda, i = 0, 1, \dots, n - k$. 进一步, 系统的状态转移图如图 1 所示.

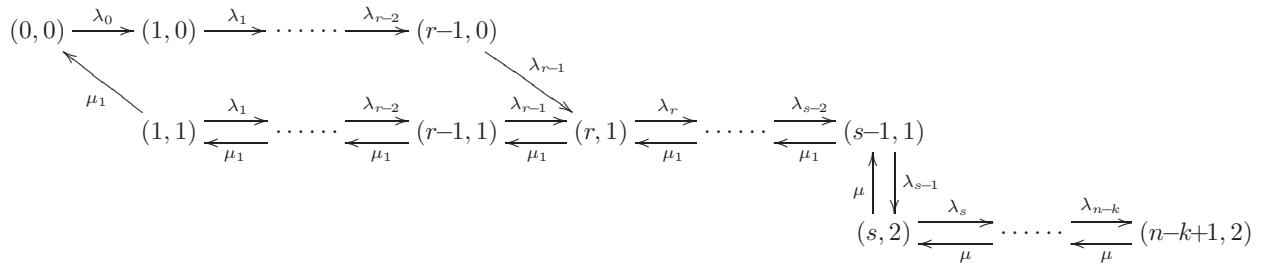


图 1 系统状态转移图

Fig. 1 State transition diagram of the system

下面给出图 1 中有序数对的简单说明, 其中 $(i, 0)$ 表示系统中有 i 个故障部件, $i = 0, 1, \dots, r - 1$, 系统未指派修理工修理故障部件. $(i, 1)$ 表示系统中有 i 个故障部件, $i = 1, 2, \dots, s - 1$, 普通修理工正在修理故障部件. $(i, 2)$ 表示系统中有 i 个故障部件, $i = s, s + 1, \dots, n - k + 1$, 熟练修理工正在修理故障部件.

定义系统的稳态概率

$$\begin{aligned} p_{i,0} &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,0}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{L(t) = i, J(t) = 0\}, \quad i = 0, 1, \dots, r - 1, \\ p_{i,1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{L(t) = i, J(t) = 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, s - 1, \\ p_{i,2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,2}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{L(t) = i, J(t) = 2\}, \quad i = s, s + 1, \dots, n - k + 1. \end{aligned}$$

根据马尔可夫过程理论和系统状态转移图, 系统稳态概率满足如下方程组

$$\lambda_0 p_{0,0} = \mu_1 p_{1,1}, \quad (1)$$

$$\lambda_i p_{i,0} = \lambda_{i-1} p_{i-1,0}, \quad i = 1, 2, \dots, r - 1, \quad (2)$$

$$(\lambda_1 + \mu_1) p_{1,1} = \mu_1 p_{2,1}, \quad (3)$$

$$(\lambda_i + \mu_1) p_{i,1} = \lambda_{i-1} p_{i-1,1} + \mu_1 p_{i+1,1}, \quad i = 2, 3, \dots, r - 1, \quad (4)$$

$$(\lambda_r + \mu_1) p_{r,1} = \lambda_{r-1} p_{r-1,0} + \lambda_{r-1} p_{r-1,1} + \mu_1 p_{r+1,1}, \quad (5)$$

$$(\lambda_i + \mu_1) p_{i,1} = \lambda_{i-1} p_{i-1,1} + \mu_1 p_{i+1,1}, \quad i = r + 1, r + 2, \dots, s - 2, \quad (6)$$

$$(\lambda_{s-1} + \mu_1) p_{s-1,1} = \lambda_{s-2} p_{s-2,1} + \mu p_{s,2}, \quad (7)$$

$$(\lambda_s + \mu) p_{s,2} = \lambda_{s-1} p_{s-1,1} + \mu p_{s+1,2}, \quad (8)$$

$$(\lambda_i + \mu) p_{i,2} = \lambda_{i-1} p_{i-1,2} + \mu p_{i+1,2}, \quad i = s + 1, s + 2, \dots, n - k, \quad (9)$$

$$\mu p_{n-k+1,2} = \lambda_{n-k} p_{n-k,2}. \quad (10)$$

下面推导稳态概率 $p_{i,0}$, $i = 0, 1, \dots, r-1$, $p_{i,1}$, $i = 1, 2, \dots, s-1$, $p_{i,2}$, $i = s, s+1, \dots, n-k+1$ 的表达式. 首先, 由式(1)得

$$p_{1,1} = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0}. \quad (11)$$

根据方程(2), 有

$$p_{i,0} = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} p_{i-1,0} = \dots = \prod_{v=1}^i \frac{\lambda_{v-1}}{\lambda_v} p_{0,0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_i} p_{0,0}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1. \quad (12)$$

由方程(3), 得 $\lambda_1 p_{1,1} - \mu_1 p_{2,1} = -\mu_1 p_{1,1} = -\lambda_0 p_{0,0}$. 将其代入方程(4), 整理后有如下递推表达式

$$\mu_1 p_{i,1} = \lambda_{i-1} p_{i-1,1} + \lambda_0 p_{0,0}, \quad i = 2, 3, \dots, r. \quad (13)$$

进一步, 从式(13)可得

$$\begin{aligned} p_{i,1} &= \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu_1} \dots \frac{\lambda_1}{\mu_1} p_{1,1} + \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0} \left(1 + \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} + \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu_1} + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu_1} \dots \frac{\lambda_2}{\mu_1} \right) \\ &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0} \left(1 + \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} + \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu_1} + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu_1} \dots \frac{\lambda_2}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right) \\ &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \left(1 + \sum_{v=1}^{i-1} \rho_{i-1,v} \right) p_{0,0}, \quad i = 2, 3, \dots, r, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\rho_{\omega,v} = \frac{\lambda_v}{\mu_1} \frac{\lambda_{v+1}}{\mu_1} \dots \frac{\lambda_\omega}{\mu_1}$.

由方程(5)得

$$\begin{aligned} p_{r+1,1} &= \frac{\lambda_r + \mu_1}{\mu_1} p_{r,1} - \frac{\lambda_{r-1}}{\mu_1} p_{r-1,0} - \frac{\lambda_{r-1}}{\mu_1} p_{r-1,1} \\ &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0} \left(\frac{\lambda_r + \mu_1}{\mu_1} \left(1 + \sum_{v=1}^{r-1} \rho_{r-1,v} \right) - \frac{\lambda_{r-1}}{\mu_1} \left(1 + \sum_{v=1}^{r-2} \rho_{r-2,v} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_r}{\mu_1} \left(1 + \sum_{v=1}^{r-1} \rho_{r-1,v} \right) p_{0,0}. \end{aligned} \quad (15)$$

类似方程(5)的推导, 由方程(6)得

$$\begin{aligned} p_{i,1} &= \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu_1} \dots \frac{\lambda_{r+2}}{\mu_1} \frac{\lambda_{r+1}}{\mu_1} p_{r+1,1} \\ &= \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_1} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu_1} \dots \frac{\lambda_{r+2}}{\mu_1} \frac{\lambda_{r+1}}{\mu_1} \frac{\lambda_r}{\mu_1} \left(1 + \sum_{v=1}^{r-1} \rho_{r-1,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0} \\ &= \left(\sum_{v=1}^r \rho_{i-1,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0}, \quad i = r+2, r+3, \dots, s-1. \end{aligned} \quad (16)$$

将 $p_{s-1,1}$ 和 $p_{s-2,1}$ 代入式(7), 得

$$p_{s,2} = \frac{\lambda_{s-1}}{\mu} \left(\sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0}. \quad (17)$$

同样地, 将 $p_{s,2}$ 和 $p_{s-1,1}$ 代入式(8), 得

$$p_{s+1,2} = \frac{\lambda_s}{\mu} \frac{\lambda_{s-1}}{\mu} \left(\sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0}. \quad (18)$$

类似于方程(4)和方程(6)的处理, 由式(9)得

$$\begin{aligned} p_{i,2} &= \frac{\lambda_{i-1}}{\mu} p_{i-1,2} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu} p_{i-2,2} = \dots = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu} \dots \frac{\lambda_{s+1}}{\mu} p_{s+1,2} \\ &= \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu} \frac{\lambda_{i-2}}{\mu} \dots \frac{\lambda_{s+1}}{\mu} \frac{\lambda_s}{\mu} \frac{\lambda_{s-1}}{\mu} \right) \left(\sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0} \\ &= \delta_{i-1,s-1} \left(\sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{0,0}, \quad i = s+2, s+3, \dots, n-k+1, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\delta_{\omega,v} = \frac{\lambda_v}{\mu} \frac{\lambda_{v+1}}{\mu} \dots \frac{\lambda_{\omega}}{\mu}$.

由正则性条件, 所有的概率加起来为 1, 即

$$p_{0,0} + \sum_{i=1}^{r-1} p_{i,0} + p_{1,1} + \sum_{i=2}^r p_{i,1} + \sum_{i=r+1}^{s-1} p_{i,1} + \sum_{i=s}^{n-k+1} p_{i,2} = 1. \quad (20)$$

将上述各表达式代入式(20), 解得 $p_{0,0} = \Delta$, 其中

$$\Delta^{-1} = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_i} + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \left(r + \sum_{i=2}^r \sum_{v=1}^{i-1} \rho_{i-1,v} + \sum_{i=r+1}^{s-1} \sum_{v=1}^r \rho_{i-1,v} \right) + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \sum_{i=s}^{n-k+1} \delta_{i-1,s-1} \sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v}.$$

至此, 得到系统稳态概率分别为

$$\begin{aligned} p_{i,0} &= \frac{\lambda_0}{\lambda_i} \Delta, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \\ p_{1,1} &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Delta, \\ p_{i,1} &= \begin{cases} \frac{\lambda_0}{\mu_1} \left(1 + \sum_{v=1}^{i-1} \rho_{i-1,v} \right) \Delta, & i = 2, 3, \dots, r \\ \left(\sum_{v=1}^r \rho_{i-1,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Delta, & i = r+1, r+2, \dots, s-1, \end{cases} \\ p_{i,2} &= \delta_{i-1,s-1} \left(\sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Delta, \quad i = s, s+1, \dots, n-k+1, \end{aligned}$$

其中 $\rho_{\omega,v} = \frac{\lambda_v}{\mu_1} \frac{\lambda_{v+1}}{\mu_1} \dots \frac{\lambda_{\omega}}{\mu_1}$, $\delta_{\omega,v} = \frac{\lambda_v}{\mu} \frac{\lambda_{v+1}}{\mu} \dots \frac{\lambda_{\omega}}{\mu}$.

下面给出稳态下系统相关性能指标的表达式.

系统稳态可用度 $A = p_{0,0} + \sum_{i=1}^{r-1} p_{i,0} + \sum_{i=1}^{s-1} p_{i,1} + \sum_{i=s}^{n-k} p_{i,2} = 1 - \delta_{n-k,s-1} \left(\sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Delta$.

系统稳态故障频度 $m_f = \lambda_{n-k} p_{n-k,2} = \lambda_{n-k} \delta_{n-k-1,s-1} \left(\sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \right) \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Delta$.

系统中平均故障部件数

$$\begin{aligned} E[L] &= \sum_{i=1}^{r-1} i p_{i,0} + \sum_{i=1}^{s-1} i p_{i,1} + \sum_{i=s}^{n-k+1} i p_{i,2} = \sum_{i=1}^{r-1} i \frac{\lambda_0}{\lambda_i} \Delta + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Delta + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \sum_{i=2}^r i \left(1 + \sum_{v=1}^{i-1} \rho_{i-1,v} \right) \Delta + \\ &\quad \frac{\lambda_0}{\mu_1} \sum_{i=r+1}^{s-1} i \sum_{v=1}^r \rho_{i-1,v} \Delta + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \sum_{i=s}^{n-k+1} i \delta_{i-1,s-1} \sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \Delta. \end{aligned}$$

系统中部件的利用率 $\Phi = 1 - E[L]/n$.

普通修理工修理故障部件的概率

$$P_o = \sum_{i=1}^{s-1} p_{i,1} = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Delta + \sum_{i=2}^r \frac{\lambda_0}{\mu_1} \left(1 + \sum_{v=1}^{i-1} \rho_{i-1,v} \right) \Delta + \sum_{i=r+1}^{s-1} \frac{\lambda_0}{\mu_1} \sum_{v=1}^r \rho_{i-1,v} \Delta.$$

熟练修理工修理故障部件的概率

$$P_e = \sum_{i=s}^{n-k+1} p_{i,2} = \sum_{i=s}^{n-k+1} \delta_{i-1,s-1} \sum_{v=1}^r \rho_{s-2,v} \frac{\lambda_0}{\mu_1} \Delta.$$

3 系统首次故障前的平均时间

定义 1^[21] 概率分布 $H(x)$ 称为 $(0, +\infty)$ 上具有不可约表示 (α, T) 的 m 阶位相型分布 (简称 PH 分布), 当且仅当它是一个状态空间为 $\{1, 2, \dots, m+1\}$ 的马氏过程的吸收时间分布, 其中状态 $1, 2, \dots, m$ 都是非常返的, 状态 $m+1$ 为过程的吸收状态. 记该过程的状态转移速率矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_{m \times m} & \mathbf{T}_{m \times 1}^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times m} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \end{pmatrix},$$

过程的初始状态概率向量为 $(\alpha_{1 \times m}, \mathbf{0}_{1 \times 1})$, 其中 $\mathbf{0}$ 表示初始时刻过程处于吸收态的概率为 0. 这里, 分布函数为 $H(x) = 1 - \alpha \exp(\mathbf{T}x)\mathbf{e}$, $x \geq 0$, 数学期望 $E[\chi] = -\alpha \mathbf{T}^{-1}\mathbf{e}$.

利用马氏链吸收时间理论来讨论 $k/n(G)$ 表决系统首次故障前的平均时间. 首先, 对系统的 $n-k+r+1$ 个状态按照如下的方式进行排列, 即

$$(0, 0), (1, 0), (1, 1), \dots, (r-1, 0), (r-1, 1), (r, 1), \dots, (s-1, 1), (s, 2), \dots, (n-k, 2), (n-k+1, 2).$$

状态 $(0, 0), (1, 0), (1, 1), \dots, (r-1, 0), (r-1, 1), (r, 1), \dots, (s-1, 1), (s, 2), \dots, (n-k, 2)$ 都是非常返的, 状态 $(n-k+1, 2)$ 为过程的吸收状态. 根据 PH 分布的定义可得此过程的转移速率矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_{(n-k+r) \times (n-k+r)} & \mathbf{T}_{(n-k+r) \times 1}^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-k+r)} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \end{pmatrix},$$

$$\text{其中 } \mathbf{T}_{(n-k+r) \times (n-k+r)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1 \\ & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{C}_2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mathbf{B}_{n-k-1} & \mathbf{A}_{n-k-1} & \mathbf{C}_{n-k-1} \\ & & & & \mathbf{B}_{n-k} & \mathbf{A}_{n-k} \end{pmatrix},$$

$$\text{这里 } \mathbf{A}_0 = -\lambda_0, \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 0 \\ 0 & -(\lambda_i + \mu_1) \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, r-1, \mathbf{A}_i = -(\lambda_i + \mu_1), i = r, r+1, \dots, s-1,$$

$$\mathbf{A}_i = -(\lambda_i + \mu), i = s, s+1, \dots, n-k, \mathbf{C}_0 = (\lambda_0, 0), \mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, r-2,$$

$$\mathbf{C}_{r-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{r-1} \\ \lambda_{r-1} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_i = \lambda_i, i = r, r+1, \dots, n-k-1, \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_i \end{pmatrix}, i = 2, 3, \dots, r-1,$$

$$\mathbf{B}_r = (0, \mu_1), \mathbf{B}_i = \mu_1, i = r+1, r+2, \dots, s-1, \mathbf{B}_i = \mu, i = s, s+1, \dots, n-k,$$

$$\lambda_i = (n-i)\lambda, i = 0, 1, 2, \dots, n-k-1, \mu = 1, 2, \lambda \text{ 为实数.}$$

初始概率向量为 $(\alpha_{1 \times (n-k+r)}, 0_{1 \times 1})$, 其中 $\alpha_{1 \times (n-k+r)} = e_{n-k+r}^T(i), i = 1, 2, \dots, n-k+r$, 由系统在初始时刻的状态决定.

因此, 本文讨论的 $k/n(G)$ 表决可修系统首次故障前的平均时间

$$\text{MTTFF} = -\alpha_{1 \times (n-k+r)} T_{(n-k+r) \times (n-k+r)}^{-1} e_{n-k+r}.$$

4 数值例子

算例 1 本算例以某地区的手机通信网络为例来分析系统相关可靠性指标随系统参数变化的情况. 假设有 5 个传输塔就能基本满足这一地区的手机通信, 但管理者为了提高通信的质量和满足不同顾客的需求, 往往会多安装几个传输塔, 比如 18 个. 于是, 这一地区的通信传输系统就是 5/18(G) 表决系统. 在运行过程中, 若故障的传输塔数量小于 4 个时, 由于对通信并不会造成实质性的影响, 故暂不指派技术人员(即修理工)去修理故障传输塔. 若故障的传输塔数量达到 4 个时, 此时可能会引起通信不畅, 这时管理者立即指派普通修理工对故障传输塔进行修理. 在此期间, 若故障的传输塔数量持续增加到 12 个时, 通信将受到严重干扰, 则立即指派熟练修理工对其进行修理. 传输塔的工作寿命服从参数为 λ 的负指数分布, 普通修理工和熟练修理工对故障传输塔的修理时间分布服从参数为 μ_1 和 μ 的负指数分布. 选取参数 $\lambda = 0.4, \mu_1 = 2.5, \mu = 3.5$. 利用 MATLAB 编写相应的数值计算程序, 所得结果分别见表 1, 表 2 和图 2, 相关数值结果保留到小数点后 8 位.

表 1 5/18(G) 表决系统稳态概率分布及相关指标的数值结果
Table 1 Steady-state probabilities and performance measures of 5/18(G) system

(i, j)	$p_{i,j}$	(i, j)	$p_{i,j}$	(i, j)	$p_{i,j}$
(0, 0)	0.000 060 58	(3, 1)	0.001 836 01	(9, 1)	0.115 397 38
(1, 0)	0.000 064 14	(4, 1)	0.004 580 89	(10, 1)	0.166 172 23
(1, 1)	0.000 174 47	(5, 1)	0.010 261 21	(11, 1)	0.212 700 46
(2, 0)	0.000 068 15	(6, 1)	0.021 343 33	(12, 2)	0.170 160 37
(2, 1)	0.000 649 04	(7, 1)	0.040 979 18	(13, 2)	0.116 681 39
(3, 0)	0.000 072 69	(8, 1)	0.072 123 36	(14, 2)	0.066 675 08
A	0.933 324 92	m_f	0.233 362 79	$E[L]$	10.601 167 41
Φ	0.411 046 25	P_o	0.646 217 58	P_e	0.353 516 84

表 2 不同初始条件下 5/18(G) 表决系统首次故障前的平均时间
Table 2 MTTFF of 5/18(G) system under different initial conditions

(i, j)	MTTFF	(i, j)	MTTFF	(i, j)	MTTFF
(0, 0)	11.132 587 01	(3, 1)	10.779 139 53	(9, 1)	8.544 591 06
(1, 0)	10.993 698 12	(4, 1)	10.523 722 63	(10, 1)	7.900 414 92
(1, 1)	11.137 421 52	(5, 1)	10.231 125 80	(11, 1)	7.084 652 31
(2, 0)	10.846 639 30	(6, 1)	9.898 146 56	(12, 2)	5.999 149 97
(2, 1)	10.992 140 09	(7, 1)	9.516 386 54	(13, 2)	3.999 459 07
(3, 0)	10.690 389 30	(8, 1)	9.072 204 70		

表 1 给出了系统稳态概率分布及相关可靠性指标的数值结果. 表 2 给出了在不同初始条件下系统首次故障前的平均时间的数值结果. 从表中可看出开始时刻系统中故障部件数越多, 其 MTTFF 的值就越小, 这与实际情形相吻合.

图 2 描绘了在不同的部件故障率 λ 和维修阈值 s 下, $A, m_f, E[L]$ 和 P_e 的数值结果. 从中可看出, 随着 λ 的增大, 即工作部件越容易发生故障, 系统可用度逐步减小, 而故障频度、平均故障部件数和熟练修理

工繁忙概率逐渐增大. 另一方面, 当 λ 取值给定时, s 值越小, 熟练修理工越早进入系统修理故障部件, 则系统可用度明显增大, 而故障频度、平均故障部件数变小. 正由于较早进入系统, 故熟练修理工繁忙的概率相应地增大了.

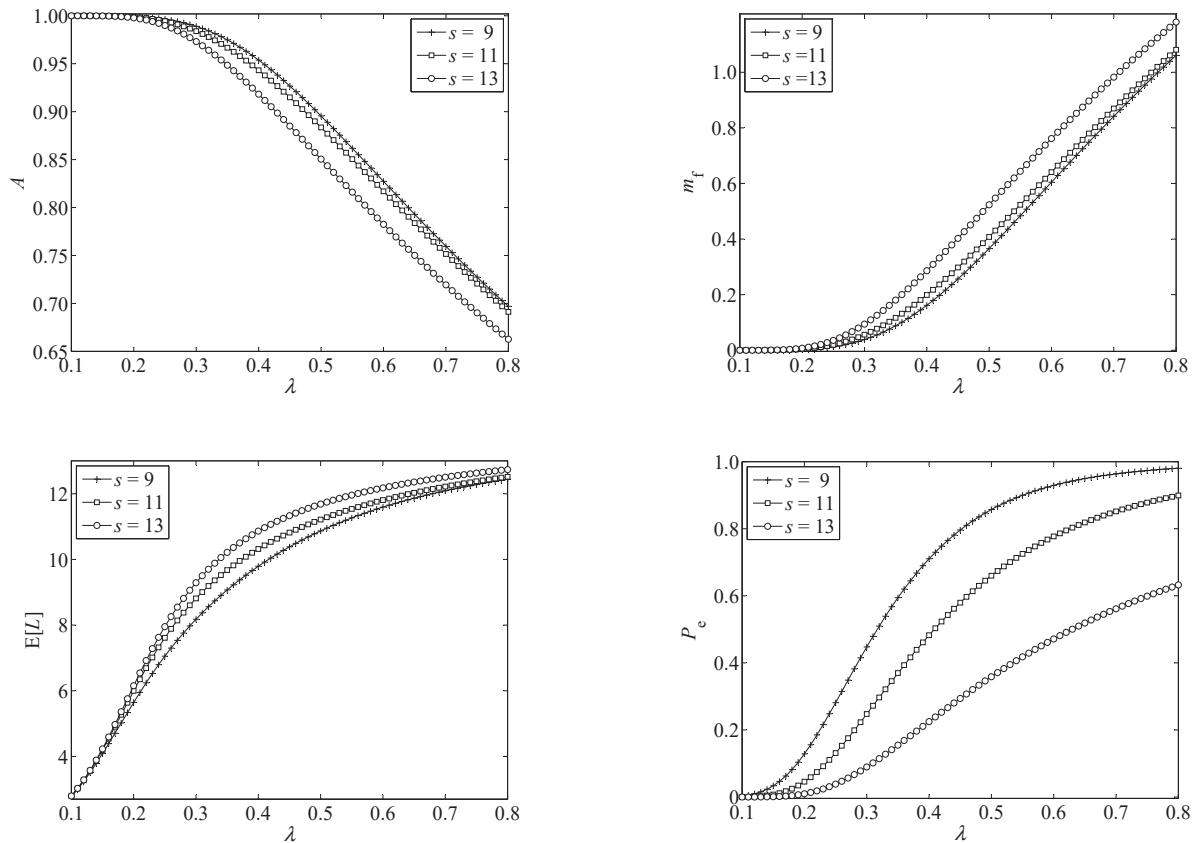


图2 不同参数 λ 和 s 下 $5/18(G)$ 表决系统可靠性指标变化曲线

Fig. 2 System performance measures of $5/18(G)$ system versus (λ, s)

算例2 令 $k = 1$, 则 $k/n(G)$ 表决系统退化为经典的机器维修模型. 付永红等^[20] 获得了机器模型稳态下故障机器数的概率分布及相关指标的递推表达式. 为了验证本文表达式的正确性, 取文献^[20] 的相关参数值: $n = 12, \lambda = 0.1, \mu_1 = 0.5, \mu = 0.7, r = 4, s = 8$. 利用 MATLAB 编写相应的数值计算程序, 得到的具体结果见表3. 从表中可看出, 本文表达式的数值结果与文献^[20] 的表达式的数值结果吻合.

表3 $1/12(G)$ 表决系统稳态概率分布及相关指标的数值结果

Table 3 Steady-state probabilities and performance measures of $1/12(G)$ system

(i, j)	$p_{i,j}$	(i, j)	$p_{i,j}$	(i, j)	$p_{i,j}$
(0, 0)	0.002 402 02	(3, 1)	0.042 659 86	(9, 2)	0.090 571 99
(1, 0)	0.002 620 38	(4, 1)	0.082 552 59	(10, 2)	0.038 816 57
(1, 1)	0.005 764 85	(5, 1)	0.132 084 15	(11, 2)	0.011 090 45
(2, 0)	0.002 882 42	(6, 1)	0.184 917 81	(12, 2)	0.001 584 35
(2, 1)	0.018 447 51	(7, 1)	0.221 901 37		
(3, 0)	0.003 202 69	(8, 2)	0.158 500 98	MTTF	1.095 923 91
A	0.998 415 65	m_f	0.001 109 04	$E[L]$	6.454 408 92
Φ	0.462 132 59	P_o	0.688 328 15	P_e	0.300 564 34

算例3 令 $r = 1, \mu_1 = \mu$, 则模型退化为经典的 $k/n(G)$ 表决可修系统. 曹晋华等^[2]利用马尔可夫分析方法得到了此系统稳态下的可靠性指标的表达式

$$A^a = \sum_{i=k}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i \left(\sum_{i=k-1}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i\right)^{-1}, \quad m_f^a = \frac{\mu}{(k-1)!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k-1} \left(\sum_{i=k-1}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i\right).$$

为了说明本文所得表达式的正确性, 选取 $k = 3, \lambda = 0.55, \mu_1 = \mu = 2.5$. 通过 MATLAB 编写数值计算程序, 得到具体的数值结果见表4. 从表中可以看出, 本文表达式的数值结果与文献[2]给出的表达式的数值结果吻合.

表4 不同 n 值下 $k/n(G)$ 表决系统稳态可靠性指标的数值结果

Table 4 System reliability measures for different values of n

n	A	A^a	m_f	m_f^a	n	A	A^a	m_f	m_f^a
4	0.763 231	0.763 979	0.570 172	0.590 052	10	0.882 123	0.882 585	0.293 546	0.293 537
5	0.827 542	0.827 650	0.434 874	0.430 874	11	0.883 184	0.883 155	0.292 342	0.292 113
6	0.856 124	0.856 896	0.357 432	0.357 759	12	0.883 362	0.883 369	0.291 534	0.291 577
7	0.872 141	0.871 099	0.323 325	0.322 251	13	0.883 413	0.883 444	0.293 491	0.291 390
8	0.877 532	0.877 981	0.301 150	0.305 048	14	0.883 421	0.883 468	0.291 240	0.291 330
9	0.881 122	0.881 184	0.297 045	0.297 039	15	0.883 474	0.883 475	0.291 323	0.291 312

算例4 本算例通过 Monte Carlo 仿真对本文解析结果的正确性进行验证. 取 $k = 2, n = 3, \mu_1 = 2.0, \mu = 3.5, r = 1$, 和 $s = 2$; λ 的取值从 0.5 到 1.0, 利用 MATLAB 编写相应的程序, 运行 500 000 次后所得结果见图3和表5. 这里, 相对误差 = |理论结果 - 仿真结果| / 理论结果. 从表5和图3可知本文表达式是可信的.

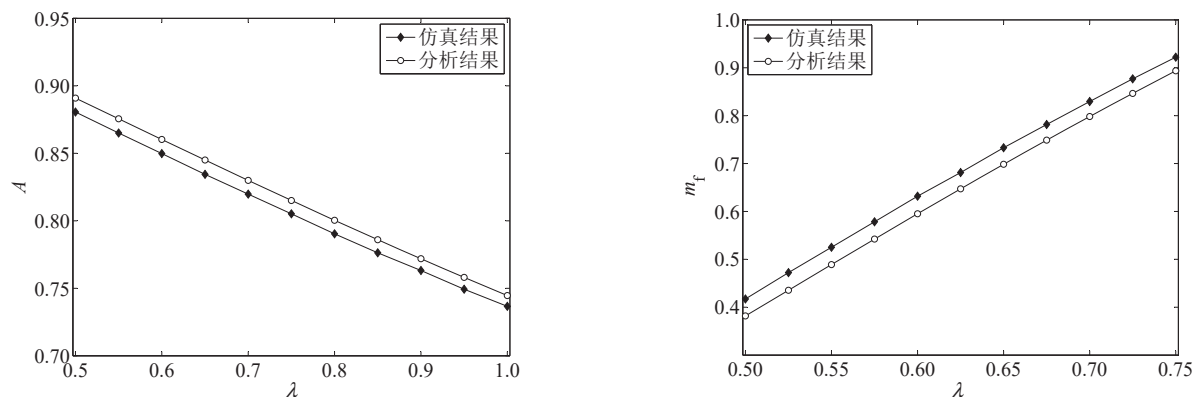


图3 不同参数 λ 下系统可靠性指标变化曲线

Fig. 3 System reliability measures for different values of λ

5 结束语

本文研究了两水平修理策略的表决可修系统, 利用马尔可夫过程理论, 建立了系统稳态概率满足的方程组, 并采用求解经典生灭过程的思路获得了一系列刻画系统性能绩效指标的表达式. 在此基础上, 通过 MATLAB 软件编程给出了在不同条件下系统相关可靠性指标的数值结果. 最后, 通过 Monte Carlo 数值仿真和对特殊情形的讨论数值验证了所得表达式的有效性. 在今后的研究中, 引入修理工休假策略(多重休假, 单重休假)是一个值得考虑的问题.

表 5 不同 λ 值下系统稳态可靠性指标的数值结果
Table 5 System reliability measures for different values of λ

λ	A			m_f		
	仿真结果	理论结果	相对误差	仿真结果	理论结果	相对误差
0.50	0.880 611	0.890 909	0.011 559	0.417 239	0.381 818	0.092 771
0.55	0.865 048	0.875 599	0.012 051	0.472 239	0.435 401	0.084 608
0.60	0.849 854	0.860 285	0.012 125	0.525 229	0.489 004	0.074 081
0.65	0.834 443	0.845 049	0.012 550	0.578 339	0.542 329	0.066 399
0.70	0.819 818	0.829 959	0.012 219	0.631 805	0.595 142	0.061 604
0.75	0.805 200	0.815 068	0.012 107	0.681 293	0.647 260	0.052 580
0.80	0.790 366	0.800 416	0.012 556	0.733 099	0.698 545	0.049 466
0.85	0.776 318	0.786 032	0.012 358	0.781 504	0.748 889	0.043 551
0.90	0.763 199	0.771 938	0.011 320	0.829 541	0.798 217	0.039 242
0.95	0.749 330	0.758 151	0.011 634	0.876 895	0.846 472	0.035 941
1.00	0.736 686	0.744 681	0.010 736	0.922 121	0.893 617	0.031 897

参考文献:

- [1] Kuo W, Zuo M J. Optimal Reliability Modelling: Principles and Applications. New York: John Wiley & Sons, 2003.
- [2] 曹晋华, 程 侃. 可靠性数学引论. 北京: 高等教育出版社, 2006.
Cao J H, Cheng K. Mathematical Theory of Reliability. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [3] 陈 童, 黄 卓, 谭 林, 等. 考虑库存损耗的单部件系统可修备件需求模型. 系统工程学报, 2012, 27(2): 270–278.
Chen T, Huang Z, Tan L, et al. Repairable spare parts demand model of single unit system with perishable inventory. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(2): 270–278. (in Chinese)
- [4] 刘仁彬, 邓朝晖, 刘 锋. 一类多级适应性休假的串联可修系统分析. 系统工程学报, 2014, 29(1): 126–134.
Liu R B, Deng Z H, Liu F. Analysis of a series repairable system with multiple adaptive vacations. Journal of Systems Engineering, 2014, 29(1): 126–134. (in Chinese)
- [5] 刘仁彬. 多级适应性休假的两部件系统及其优化应用. 系统工程学报, 2016, 31(2): 281–288.
Liu R B. Two-unit system with multiple adaptive vacations and its optimization application. Journal of Systems Engineering, 2016, 31(2): 281–288. (in Chinese)
- [6] Chang G J, Cui L R, Hwang F R. Reliabilities for (n, f, k) system. Statistics & Probability Letters, 1999, 43(3): 237–242.
- [7] 李春洋, 陈 循, 易晓山, 等. 基于马尔可夫过程的 $k/n(G)$ 系统共因失效分析. 系统工程与电子技术, 2009, 31(11): 2789–2792.
Li C Y, Chen X, Yi X S, et al. Analysis of k -out-of- n : G systems subject to common cause failures based on Markov process. System Engineering and Electronics, 2009, 31(11): 2789–2792. (in Chinese)
- [8] 吴文青, 唐应辉, 姜 颖. 修理工多重休假且修理设备可更换的 $k/n(G)$ 表决可修系统研究. 系统工程理论与实践, 2013, 33(10): 2604–2614.
Wu W Q, Tang Y H, Jiang Y. Study on a k -out-of- n : G repairable system with multiple vacations and one replaceable repair facility. System Engineering: Theory & Practice, 2013, 33(10): 2604–2614. (in Chinese)
- [9] 陈 童, 黎 放, 狄 鹏. 基于 PH 分布的 n 中取 k 系统可靠性模型研究. 系统工程理论与实践, 2015, 35(1): 260–266.
Cheng T, Li F, Di P. The reliability analysis of k -out-of- n system based on phase-type distribution. System Engineering: Theory & Practice, 2015, 35(1): 260–266. (in Chinese)
- [10] Zhang Y L, Wu S M. Reliability analysis for a $k/n(F)$ system with repairable repair-equipment. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(7): 3052–3067.
- [11] Krishnamoorthy A, Ushakumari P V. k -out-of- n : G system with repair: The D -policy. Computers & Operations research, 2001, 28(10): 973–981.
- [12] Krishnamoorthy A, Rekha A. k -out-of- n system with repair: T -policy. The Korean Journal of Computational and Applied Mathematics, 2001, 8(1): 199–212.
- [13] Krishnamoorthy A, Ushakumari P V, Lakshmy B. k -out-of- n system with repair: The N -policy. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2002, 19(1): 47–61.
- [14] Wu W Q, Tang Y H, Yu M M, et al. Computation and profit analysis of a k -out-of- n : G repairable system under N -policy with multiple vacations and one replaceable repair facility. RAIRO: Operations Research, 2015, 49(4): 717–734.

- [15] Li X H, Zuo M J, Yam C M R. Reliability analysis of a repairable k -out-of- n system with some components being suspended when the system is down. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, 91(3): 305–310.
- [16] Chakravarthy S R, Gomez-Corral A. The influence of delivery times on repairable K -out-of- N systems with spares. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(5): 2368–2387.
- [17] Moghaddass R, Zuo M J, Qu J. Reliability and availability analysis of a repairable k -out-of- n : G system with R repairmen subject to shut-off rules. *IEEE Transactions on Reliability*, 2011, 60(3): 658–666.
- [18] Ruiz-Castro J E, Li Q L. Algorithm for a discrete k -out-of- n : G system subject to several types of failure with an indefinite number of repairpersons. *European Journal of Operational Research*, 2011, 211(1): 91–111.
- [19] Eryilmaz S, Xie M. Dynamic modeling of general three-state k -out-of- n : G systems: Permanent-based computational results. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 272(15): 97–106.
- [20] 付永红, 余妙妙, 唐应辉, 等. 两水平维修策略下的 $M/(M_r, M_s)/1/N/N$ 机器维修模型稳态概率算法与性能分析. *山东大学学报(自然科学版)*, 2009, 44(4): 72–78.
Fu Y H, Yu M M, Tang Y H, et al. Steady-state probability algorithm and performance evaluation for $M/(M_r, M_s)/1/N/N$ machine repair model under bi-level repair facility. *Journal of Shangdong University (Natural Science Edition)*, 2009, 44(4): 72–78. (in Chinese)
- [21] Tian N S, Zhang Z G. *Vacation Queueing Models: Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag, 2006.

作者简介:

吴文青(1986—), 男, 四川达州人, 博士, 讲师, 研究方向: 系统可靠性, 排队理论, Email: wwqing0704@swust.edu.cn;

唐应辉(1963—), 男, 四川广安人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 系统可靠性, 排队论, 决策理论及应用, Email: tangyh@sicnu.edu.cn;

张元元(1990—), 女, 四川万源人, 硕士, 研究方向: 系统可靠性, Email: zhyy0601@163.com.

(上接第 833 页)

- [15] 张李浩, 范体军, 杨惠霄. 基于RFID技术的供应链投资决策及协调策略研究. *中国管理科学*, 2015, 23(8): 112–121.
Zhang L H, Fan T J, Yang H X. Decision-making and coordination of supply chain with an investment on RFID technology. *Chinese Journal of Management Science*, 2015, 23(8): 112–121. (in Chinese)
- [16] Wang L, Kwok S K, Ip W H. A radio frequency identification and sensor-based system for the transportation of food. *Journal of Food Engineering*, 2010, 101(1): 120–129.
- [17] Karlsen K M, Donnelly K A M, Olsen P. Granularity and its importance for traceability in a farmed salmon supply chain. *Journal of Food Engineering*, 2011, 102(1): 1–8.
- [18] Jedermann R, Ruiz-Garcia L, Lang W. Spatial temperature profiling by semi-passive RFID loggers for perishable food transportation. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2009, 65(2): 145–154.
- [19] 李琳, 范体军. 基于RFID技术应用的鲜活农产品供应链决策研究. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(4): 836–844.
Li L, Fan T J. Research on decision-making of fresh agricultural product supply chain with RFID technology. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2014, 34(4): 836–844. (in Chinese)
- [20] Wang Y. Joint pricing-production decisions in supply chains of complementary products with uncertain demand. *Operations Research*, 2006, 54(6): 1110–1127.
- [21] Cachon G P. Supply chain coordination with contracts. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 2003, 11: 227–339.

作者简介:

杨亚(1981—), 女, 甘肃兰州人, 博士生, 副教授, 研究方向: 物流供应链优化决策, Email: qhdxjjxyy@126.com;

范体军(1967—), 男, 湖北洪湖人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 运作管理, 物流供应链优化决策, Email: tjfan@ecust.edu.cn;

张磊(1988—), 男, 安徽阜阳人, 硕士生, 研究方向: 供应链管理及协调优化, Email: zhanglei@ecust.edu.cn.