第 33 卷第 6 期
2018 年 12 月

系 统 工 程 学 报
JOURNAL OF SYSTEMS ENGINEERING

Vol.33 No.6
Dec. 2018

基于混频数据抽样的已实现波动率长记忆模型

王天一[1], 刘 浩[2], 黄 卓[2*]

(1. 对外经济贸易大学金融学院, 北京 100029;
2. 北京大学国家发展研究院, 北京 100871)

摘要: 基于已实现 GARCH 模型和混频数据抽样(MIDAS)结构, 提出了已实现混频数据抽样 GARCH 模型. 该模型使用混频数据抽样结构从已实现测度中提取长短期波动率信息以提升模型对波动率的拟合和预测能力. 基于指数和个股数据的实证分析表明, 相比传统的已实现 GARCH 模型, 新模型的样本内拟合能力更强, 对长记忆性的捕捉更好. 样本外结果表明, 新模型显著提升了波动率的多步预测效果,并且改进效果随着预测期的延长而增强.

关键词: 已实现 GARCH; 长记忆性; 混频数据抽样; 多步波动率预测
中图分类号: F830 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2018)06−0812−11
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2018.06.010

Model for the long memory of realized volatility based on mixed data sampling

Wang Tianyi[1], **Liu Hao**[2], **Huang Zhuo**[2*]

(1. School of Banking and Finance, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China;
2. National School of Development, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: This paper proposed a realized MIDAS GARCH model based on the realized GARCH model and the mixed data sampling (MIDAS) regression structure. The model uses MIDAS structure to extract long and short term information from realized measures to improve the model’s ability to fit and forecast volatility process. Empirical results based on indices and stocks data show that, compared with the classical realized GARCH model, the new model is better in in-sample data fitting and replicating long memory feature. The out-of-sample forecasting results show that the new model significantly improves the multi-period out-of-sample volatility forecast. The improvement is more pronounced in longer horizons.

Key words: realized GARCH; long memory; mixed data sampling; multi-period volatility forecast

1 引 言

资产收益的波动率在资产定价, 风险管理, 资产配置等领域占有重要地位. 由于波动率本身有很强的时变性, 其建模和预测问题一直是金融计量领域的核心问题之一. 自 ARCH 和 GARCH 模型以来[1,2], 有大量文献开始对其进行研究, 并拓展出适应诸如杠杆效应, 厚尾以及长记忆等收益率和波动率的常见特征的 GARCH 类模型[3]. 随着资产价格高频数据获取难度的降低, 利用高频数据估计波动率的研究开始大量出现. 其中, 传统的 GARCH 模型和新出现的已实现测度如何结合成为一个研究热点. Engle 等[4], Shephard

收稿日期: 2016−11−15; 修订日期: 2017−10−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71301027; 71671004; 71871060).
*通信作者

等[5], Hansen 等[6]的研究分别提出了三种不同的利用已实现测度对收益率和波动率进行联合建模的方法. 这三类方法中, 以已实现 GARCH 模型的结构最为简洁. 实证结果表明, 已实现 GARCH 模型在波动率预测方面可以显著地超越传统的 GARCH 模型[6].

文献中对已实现 GARCH 模型进行的研究主要有分布拓展和模型结构拓展等方面. 分布拓展方面, Watanabe[7]研究了有偏分布的已实现 GARCH 模型对于 SP500 指数的在险价值和预期损失的预测能力. 模型结构拓展方面, Hansen 等[8]提出了能够引入多个已实现测度的已实现E GARCH 模型, 该模型能够更加灵活地对收益率和波动率之间的关系进行建模. Lunde 等[9]对比了已实现E GARCH 模型同 EGARCH 模型在预测 NOMXC 远期合约波动率上的表现. 国内相关研究也已经起步(如文献[10–12]).

相比之下, 既有研究对已实现 GARCH 模型在长记忆性建模方面的讨论相当缺乏. 所谓长记忆性, 是指波动率序列的自相关系数下降缓慢,显示出很强的持续性[13]. 实证研究表明, 波动率的长记忆性对于其在多步预测[14], 衍生品定价[15], 风险管理[16] 等问题上的表现有关键性的影响. 国内亦有针对股票市场和期货市场长记忆性的研究[17,18]. 然而, 已实现 GARCH 模型的约简形式比较简单, 对波动率相关性的刻画存在限制. 以文献中最常用的已实现 GARCH (1,1)模型为例, 其针对条件方差的约简形式基本上是 ARMA(1,1)结构, 而该结构本身并不能产生足够的记忆性. 本文的实证结果指出, 已实现 GARCH 模型参数隐含的“条件方差的理论自相关函数”与模型估计出来的“条件方差的样本自相关函数”之间有巨大的差异, 说明在建模长记忆性上现有模型设定存在不足, 有必要讨论如何改进.

现有的关于波动率长记忆性的模型基本上分成两大类: 一类是 GARCH 类模型中的基于分数阶差分的 FIGARCH 模型[19], 基于长短期成分建模的成分 GARCH 模型[20]等. 另一类是直接使用已实现测度, 忽略 GARCH 结构的 ARFIMA 模型[21], 基于混频数据抽样的 MIDAS 模型[22], 基于波动率瀑布效应(volatility cascade) 的异质性自回归模型(HAR) 模型[23]等. 国内也有相关文献对这两类模型进行研究(如文献[24,25]等).

已实现 GARCH 模型作为 GARCH 族模型中的一员, 最直接的提升记忆性的办法就是引入FI GARCH 或者成分 GARCH 结构. 但FI GARCH 结构估计过程复杂, 数据需求量大, 经济意义不明显[23]. 成分 GARCH 模型的长短期效应并不能直接被观测, 不容易在已实现测度的层面找到对应的可观测量. 相比之下, 引入混频数据抽样结构改进已实现 GARCH 模型是一种更为有效的方法. 首先, 混频数据抽样结构使用的是一个已实现测度的多期历史数据, 而不是多个已实现测度的历史数据, 因此改进后的已实现 GARCH 模型并不需要多个测量方程, 模型结构简单, 经济意义清晰. 其次, 混频数据抽样结构作为一种参数节约的设定, 使用少量形状参数配合权重函数就可以给出对历史较长时间内已实现测度的加权系数. 由于权重函数形式较 HAR 模型更加灵活, 且形状参数本身也是待优化系数之一, 这种方式可以有效地抽取数据中的长期波动信息. 而这一成分是对传统已实现 GARCH 模型短期波动成分的重要补充.

基于以上观察, 本文将混频数据抽样结构引入已实现 GARCH 模型中, 构造出同时包含长短期已实现测度信息, 能对波动率长记忆性进行建模的已实现混频数据抽样 GARCH 模型. 对于指数和个股的实证结果表明, 相比于已实现 GARCH 模型, 新模型能够: 1)显著提升模型拟合优度以及对波动率长记忆性的捕捉能力; 2)显著提升波动率多步预测的精度.

2 已实现混频数据抽样 GARCH 模型

令 r_t 表示资产在 t 期的收益率, x_t 表示 t 期已实现测度, h_t 表示 r_t 的条件方差, Hansen 等[6]提出的已实现 GARCH 模型可以写成如下形式

$$r_t = \sqrt{h_t} z_t, \tag{1}$$

$$\ln(h_t) = \omega + \beta \ln(h_{t-1}) + \gamma \ln(x_{t-1}), \tag{2}$$

$$\ln(x_t) = \xi + \phi \ln(h_t) + \tau(z_t) + u_t, \tag{3}$$

其中 $z_t \sim N(0,1), u_t \sim N(0,\sigma_u^2)$, 两者独立.

式(1)和式(2)分别对应传统 GARCH 模型中的均值方程和方差方程, 式(2)中的波动率更新项由传统的"收益率平方" 改成了信息更为丰富和准确的"已实现测度". 已实现 GARCH 关键特点是在均值方程和方差方程外, 加入了"测量方程"(式(3)). 其主要作用是连接已实现测度和条件方差, 从而实现对收益率和已实现测度的联合建模.

相比 GARCH–X 模型, 已实现 GARCH 模型可以实现波动率的多步预测. 一般称 $\tau(z_t)$为杠杆函数, 用来刻画金融市场中普遍存在的收益率与波动率的非对称关系, $\tau(z_t) = \tau_1 z_t + \tau_2(z_t^2 - 1)$.

Ghysels 等[22]提出的混频数据抽样方法可以利用较少的参数来赋权历史信息, 基于前 K 期的已实现测度预测本期的已实现测度的混频数据抽样回归如下

$$x_t = m + \theta \sum_{k=1}^{K} \psi_k(\omega_1) x_{t-k}, \tag{4}$$

其中 $\psi_k(\omega_1)$为各期已实现测度的赋权函数, 其设定依赖于具体的抽样方法.

在波动率建模和预测的文献中常用的函数形式有指数型函数, Beta 型函数等. 本文使用 21 阶单参数 Beta 函数来对数据进行赋权[1], 其具体形式如下

$$\psi_k(\omega_1) = \frac{(1-k/21)^{\omega_1 - 1}}{\sum_{i=1}^{21}(1-i/21)^{\omega_1 - 1}}. \tag{5}$$

向方差方程式(2)中加入经过 $\psi_k(\omega_1)$赋权的长期波动信息后, 已实现 GARCH 模型的方差方程式变为

$$\ln(h_t) = \omega + \beta \ln(h_{t-1}) + \gamma_1 \ln(x_{t-1}) + \gamma_2 \sum_{k=1}^{21} \psi_k(\omega_1) \ln(x_{t-k-1}), \tag{6}$$

该模型称为已实现混频数据抽样 GARCH 模型.

与传统的已实现 GARCH 模型相比, 新模型引入了过去 22 天(约合一个月的交易时间)的已实现测度信息, 并且这种引入不以大量增加模型参数为代价. 由于只使用了一个已实现测度, 测量方程(3)不需要做任何调整. 权重函数的定义保证各阶滞后项权重和为 1, 因此模型的稳定性条件为

$$\beta + \phi(\gamma_1 + \gamma_2) < 1. \tag{7}$$

将测量方程(3)代入方差方程(6)可得

$$\ln(h_t) = \mu_h + \tilde{\beta} \ln(h_{t-1}) + \tilde{\gamma}_2 \sum_{k=1}^{21} \psi_k(\omega_1) \ln(h_{t-k-1}) + \gamma_1 \epsilon_{t-1} + \gamma_2 \sum_{k=1}^{21} \psi_k(\omega_1) \epsilon_{t-k-1}, \tag{8}$$

$$\ln(x_t) = \mu_x + \tilde{\beta} \ln(x_{t-1}) + \tilde{\gamma}_2 \sum_{k=1}^{21} \psi_k(\omega_1) \ln(x_{t-k-1}) + \epsilon_t - \beta \epsilon_{t-1}, \tag{9}$$

其中 $\epsilon_t = \tau(z_t) + u_t, \mu_k = \omega + \xi(\gamma_1 + \gamma_2), \mu_x = \phi\omega + \xi(1-\beta), \tilde{\beta} = \beta + \phi\gamma_1, \tilde{\gamma}_2 = \phi\gamma_2$.

式(8)表明对数波动率服从带参数约束的类 ARMA(22,22)结构, 式(9)表明对数已实现测度服从带参数约束的 ARMA(22,1) 结构. 这个结果说明在描述以实现测度动态的问题上, 已实现混频数据抽样 GARCH 模型和传统的混频数据抽样回归本质上不一样[2]. 在后文实证部分可以看到, 得益于上述更加丰富的结构, 新

[1]虽然双参数 Beta 函数有更丰富的函数结构, 但其参数估计稳定性较差, 而且实证结果上与单参数 Beta 函数几乎没有差别, 因此采用单参数 Beta 函数进行建模.

[2]相同滞后阶的混频数据抽样回归实际上对应的是已实现测度的带参数约束的 AR(22)模型.

模型相比已实现 GARCH 模型可以更好地描述 $\ln(h_t)$和 $\ln(x_t)$的动态.

由于加入混频数据抽样项并没有改变误差项(z,u)可以观测的事实, 已实现混频数据抽样 GARCH 模型仍然可以沿用最大似然估计法(MLE)进行估计[6]. 在(z,u)相互独立的假设下, 联合似然函数 $l(r,x)$可以分成两部分: 对应收益率残差 z 的部分记为 $l(r)$; 对应已实现测度残差 u 的部分记为 $l(x|r)$, 即

$$l(x,r)=\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln(2\pi)+\ln(h_t)+\frac{r_t^2}{h_t}\right)\right)}_{=l(r)}+\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln(2\pi)+\ln(\sigma_u^2)+\frac{u_t^2}{\sigma_u^2}\right)\right)}_{=l(x|r)},\tag{10}$$

其中 $l(r)$部分在后文中被称为半似然函数, 可以显示出模型对于收益率分布拟合的情况. 初始条件波动率 h_0 作为参数一并进行估计.

3 实证结果

3.1 数　据

本文使用的数据包括五只个股(IBM, INTC, MSFT, WMT, XOM)以及 SP500 指数 ETF(SPY)的日度数据[3], 时间跨度为 2002–01–02～2013–12–31. 收益率为使用对数收益率计算的“收盘价–收盘价”收益率[4], 数据来源为 Yahoo Finance 网站. 已实现测度采用已实现核估计(realized kernel, RK) 进行估计[26], 数据由 Asger Lunde 提供. 其计算方法如下

$$\mathrm{RK}_t=\sum_{h=-H}^{H}K\left(\frac{h}{H+1}\right)\delta_h,\tag{11}$$

$$\delta_h=\sum_{i=|h|+1}^{m}r_{i,t}r_{i-h,t},\tag{12}$$

其中 $K(\cdot)$是核函数, H 是核函数的带宽, m 是每天取样的个数, $r_{i,t}$ 是第 t 日的第 i 个日内收益率.

由于显式地考虑了日内收益之间的相关性问题, RK 对于高频数据中存在的市场微观噪音有很强的免疫能力. 表 1 给出了本文使用数据的描述性统计量[5]. 其中 SPY, INTC 和 XOM 呈现负偏度, 其余呈现正偏度, 超额峰度均大于 0, 说明各个序列均有一定的厚尾现象.

表 1　描述性统计

Table 1　Descriptive statistics

	SPY		IBM		INTC		MSFT		WMT		XOM	
	r_t	$\ln(x_t)$	r_t	$\ln(x_t)$	r_t	$\ln(x_t)$	r_t	$\ln(x_t)$	r_t	$\ln(x_t)$	r_t	$\ln(x_t)$
均值	0.025	−0.624	0.029	0.092	0.000	0.827	0.022	0.431	0.017	0.062	0.040	0.242
标准差	1.305	1.005	1.498	0.853	2.187	0.796	1.799	0.806	1.315	0.818	1.609	0.871
偏度	−0.022	0.816	0.149	1.065	−0.578	0.758	0.110	0.804	0.169	0.900	−0.017	0.874
峰度	11.678	0.832	6.301	1.700	7.812	0.757	8.534	0.751	5.422	1.067	12.637	1.399
Q25	−0.496	−1.355	−0.680	−0.498	−1.043	0.281	−0.822	−0.150	−0.669	−0.493	−0.733	−0.360
中位数	0.075	−0.800	0.025	−0.069	0.043	0.709	0.000	0.277	0.024	−0.073	0.064	0.131
Q75	0.595	−0.036	0.748	0.53	1.104	1.242	0.844	0.898	0.663	0.473	0.857	0.686

注: Q25 和 Q75 为 25％ 和 75% 分位数, 峰度为超额峰度, 各阶矩均为中心矩

3.2 样本内估计结果

表 2 给出了已实现混频数据抽样 GARCH 模型的全样本估计结果, 括号中是稳健性标准误. 为了进行

[3]其中 SPY 是对应 SP500 指数的 ETF, 对整个市场有代表性. XOM为成分股中的大市值股票. IBM 为成分股中的大权重股票. INTC, MSFT 属于科技类股票. WMT 代表的零售业相对周期性较弱.

[4]作者同样试验过基于“开盘价-开盘价”收益率和 5 min 已实现方差(RV)的实证结果, 结果并无明显差异.

[5]收益率的单位为百分之一, 已实现测度亦做相应的调整.

对比, 对应已实现 GARCH 模型的全样本估计结果一并给出.下文为简洁起见, 将已实现 GARCH 模型记为 RG, 已实现混频数据抽样 GARCH 模型记为 RMG.

从表 2 中可以看出, 相比于 RG 模型, RMG 模型 β 系数的数值显著减小. 这说明加入长期波动信息以后, 条件方差一阶滞后项蕴含的长期波动信息被混合数据抽样项提供的信息替代了, 因此其重要性相对下降. 相比之下 γ_1 变化不大, 说明以滞后一期已实现测度衡量的短期信息并没有受到显著的影响. 测量方程中系数 ϕ 的数值集中在 1 附近, 说明对数 RK($\ln(x_t)$)可以近似作为对数条件波动率($\ln(h_t)$)的一个无偏估计量[6]. 另外 $\tau_1 < 0, \tau_2 > 0$ 说明全部序列都存在显著的杠杆效应. RG 模型的 $\beta + \gamma\phi$ 以及 RMG 模型的 $\tilde{\beta}$ 的数值均接近于 1, 说明对数条件波动率以及对数已实现核估计都具有很强的持续性. 半似然函数取值方面, RMG 显著大于 RG, 说明加入长期波动信息使得标准化收益率更接近正态分布的状况.

表 2 全样本参数估计结果

Table 2 Full sample parameter estimates

	SPY		IBM		INTC		MSFT		WMT		XOM	
	RG	RMG	RG	RMG	RG	RMG	RG	RMG	RG	RMG	RG	RMG
ω	0.285	0.407	0.173	0.286	0.166	0.282	0.202	0.305	0.081	0.158	0.135	0.240
	(0.021)	(0.049)	(0.027)	(0.049)	(0.033)	(0.060)	(0.043)	(0.073)	(0.016)	(0.037)	(0.018)	(0.034)
β	0.442	0.207	0.523	0.198	0.520	0.129	0.512	0.222	0.616	0.230	0.501	0.100
	(0.028)	(0.086)	(0.030)	(0.078)	(0.037)	(0.068)	(0.039)	(0.109)	(0.027)	(0.114)	(0.025)	(0.066)
γ_1	0.547	0.581	0.455	0.491	0.506	0.575	0.464	0.515	0.332	0.391	0.456	0.508
	(0.036)	(0.035)	(0.038)	(0.035)	(0.044)	(0.036)	(0.044)	(0.041)	(0.030)	(0.029)	(0.026)	(0.025)
γ_2	—	0.203	—	0.269	—	0.360	—	0.245	—	0.280	—	0.323
	—	(0.077)	—	(0.070)	—	(0.070)	—	(0.088)	—	(0.093)	—	(0.061)
ω_1	—	3.347	—	4.924	—	3.293	—	2.691	—	3.621	—	6.079
	—	(1.702)	—	(1.182)	—	(0.724)	—	(1.307)	—	(1.059)	—	(1.092)
ξ	−0.523	−0.520	−0.354	−0.354	−0.263	−0.260	−0.378	−0.364	−0.228	−0.225	−0.262	−0.259
	(0.032)	(0.033)	(0.054)	(0.055)	(0.064)	(0.067)	(0.091)	(0.087)	(0.046)	(0.045)	(0.037)	(0.037)
ϕ	0.965	0.973	0.989	1.007	0.894	0.895	0.983	0.976	1.096	1.100	1.031	1.030
	(0.044)	(0.046)	(0.051)	(0.051)	(0.047)	(0.048)	(0.058)	(0.055)	(0.061)	(0.062)	(0.037)	(0.037)
τ_1	−0.146	−0.148	−0.065	−0.066	−0.034	−0.036	−0.028	−0.028	−0.027	−0.026	−0.109	−0.111
	(0.009)	(0.009)	(0.008)	(0.008)	(0.007)	(0.007)	(0.009)	(0.010)	(0.009)	(0.009)	(0.007)	(0.007)
τ_2	0.029	0.027	0.035	0.036	0.033	0.030	0.029	0.030	0.060	0.059	0.050	0.049
	(0.009)	(0.009)	(0.005)	(0.005)	(0.006)	(0.005)	(0.007)	(0.007)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)
σ_u^2	0.144	0.141	0.141	0.139	0.131	0.127	0.140	0.138	0.144	0.142	0.129	0.127
	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)
$l(x,r)$	−5 331.0	−5 256.5	−6 078.4	−5 993.3	−7 094.9	−6 981.1	−6 614.4	−6 513.2	−5 842.4	−5 762.9	−6 016.4	−5 941.5
$l(r)$	−4 011.4	−3 975.4	−4 799.5	−4 744.7	−5 918.4	−5 854.5	−5 339.1	−5 273.9	−4 526.9	−4 480.7	−4 860.8	−4 818.6

注: 括号里是稳健标准误, $l(x,r)$是完整似然函数的值, $l(r)$ 是收益率对应的半似然函数值.

借助全样本估计结果, 可以计算各个序列对应的单参数 Beta 函数权重. 如图 1 所示, 不同模型的权重分布虽然都呈现下降的趋势, 但是其下降速度和形状各不相同. 这说明 $\psi_k(\omega_1)$虽然只有一个参数, 但是其能体现的权重形式并不单一.

由于 RG 模型内嵌于 RMG 模型, 因此长期波动信息的显著性检验可以直接借助表 2 中汇报的似然函数值进行计算. 具体的, 针对"长期波动信息对波动率估计没有贡献"的零假设 $\gamma_2 = 0$, 构造如下统计量

$$\mathrm{LR} = -2(\tilde{l}(x,r) - l(x,r)), \tag{13}$$

[6]由于本文使用的是日间收益率, 因此估计得到的条件波动率为日间波动率. 因其包含了隔夜收益率变化, 理论上该条件波动率会比已实现核测度更大一点.

其中 $\tilde{l}(x,r)$和 $l(x,r)$分别对应 RG 模型(有约束模型)和RMG模型(无约束模型)的似然函数值. 在零假设下 LR 服从 $\chi^2(2)$分布. 表 3 显示全部序列的统计量值均远超过临界值. 这从另一个方面说明加入长期波动信息对于模型的改进是重要的.

表 3 对数似然函数值以及似然比检验结果

Table 3 Log-likelihood and the results of likelihood ratio test

	SPY	IBM	INTC	MSFT	WMT	XOM
RG	−5 331.0	−6 078.4	−7 094.9	−6 614.4	−5 842.4	−6 016.4
RMG	−5 256.5	−5 993.3	−6 981.1	−6 513.2	−5 762.9	−5 941.5
LR	149.0***	170.2***	227.5***	202.4***	159.0***	149.9***

注: ***表示统计量在 1 %水平下显著.

3.3 波动率的长记忆性

波动率长记忆性的一个表现就是波动率的自相关函数(ACF)下降速度缓慢. 图 2 给出了不同模型拟合的对数条件方差的 ACF(实线)与模型估计系数下计算的理论 ACF(虚线)之间的比较[7]. 左边的图对应 RG 模型, 右边的图对应 RMG 模型. 如果模型有较好的内部一致性, 两条 ACF 曲线的差距应该较小. 从结果中可以看出, RG模型系数隐含的 ACF 显著地偏离了其条件方差拟合值的 ACF. 相比之下, RMG 模型对 RG 模型有明显的改善, 模型系数隐含的 ACF 序列下降速度的比 RG 对应序列慢, 而且和模型条件方差拟合值的 ACF 更接近.

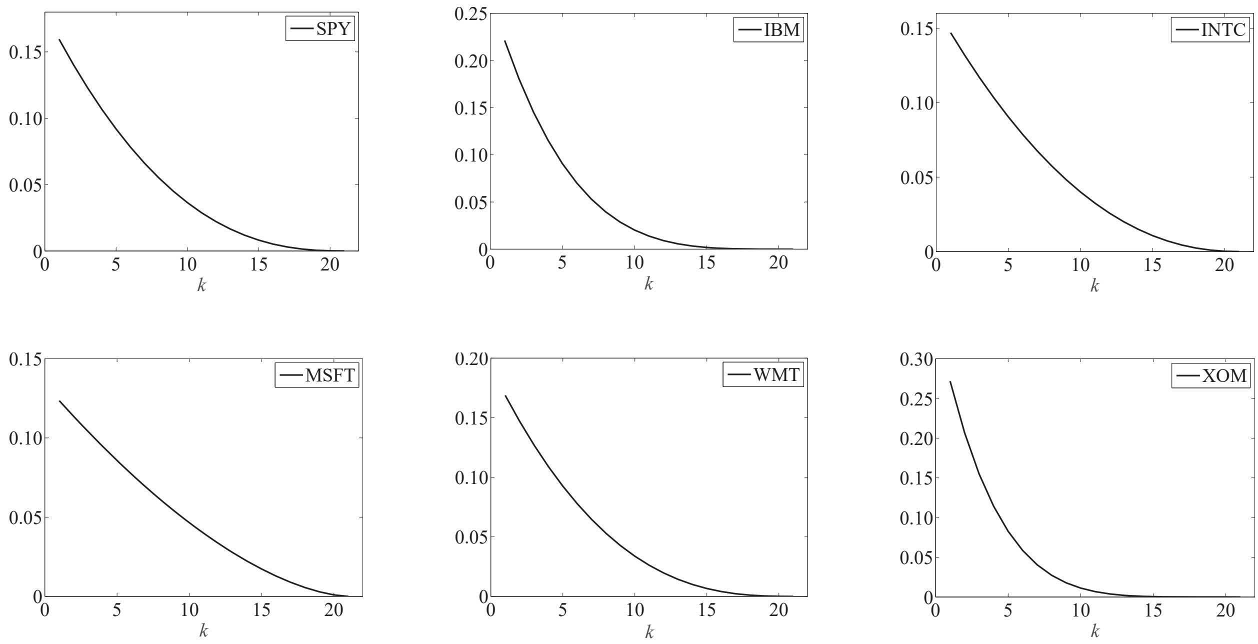

图 1 全样本估计的混合频率抽样项权重图

Fig. 1 Full sample MIDAS weights

图 3 给出了模型系数隐含的对数已实现测度的 ACF(虚线)与真实对数已实现测度 ACF(实线)之间的比较. 其中短点虚线对应 RMG 模型, 长点虚线对应 RG 模型. 如果模型隐含的 ACF 能贴近真实的 ACF, 模型捕捉长记忆性的能力就更强. 从结果上看, RMG模型至少可以拟合 20 期的真实 ACF, 而 RG 模型在 10 期左右就开始出现偏差了.

[7]理论 ACF 的计算方式基于式(8)和式(9), 使用 ARMA 模型 ACF 计算公式计算. 对于 lnh 而言, 由于其没有当期冲击, 计算公式做了相应调整. 为节约空间这里仅给出指数 ETF 序列 SPY 的结果, 其他序列的结果类似, 如需要可向作者索取.

3.4 样本外预测比较

测量方程的引入使得已实现混频数据抽样 GARCH 能够进行多步预测. 为了表述的方便, 令 $\tilde{h}_t = \ln(h_t), \tilde{x}_t = \ln(x_t)$. 将方差方程代入到测量方程中, 可以得到如下等式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{h}_t \\ \tilde{x}_t \\ \tilde{x}_{t-1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{t-21} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta & \gamma_1 & \gamma_2\psi_1(\omega_1) & \cdots & \gamma_2\psi_{21}(\omega_1) \\ \phi\beta & \phi\gamma_1 & \phi\gamma_2\psi_1(\omega_1) & \cdots & \phi\gamma_2\psi_{21}(\omega_1) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{h}_{t-1} \\ \tilde{x}_{t-1} \\ \tilde{x}_{t-2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{t-22} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \omega \\ \xi + \phi\omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau(z_t) + u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}_t}, \tag{14}$$

即 $\boldsymbol{P}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{t-1} + \boldsymbol{C}_t$, 对应已实现 GARCH 模型的类似结构可以参见 Hansen 等[6]. $\boldsymbol{P}_t$ 的 k 步的预测为

$$\boldsymbol{P}_{t+k} = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{P}_t + \sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^j \boldsymbol{C}_{t+j+1}. \tag{15}$$

条件方差 h_t 的一步预测直接使用式(6)就可以获得, 多步预测相对复杂. 由于模型使用的是对数线性模型设定, 式(15)可以给出的是对数条件方差的预测值 $\mathrm{E}[\ln(h_{t+k})]$, 简单取指数之后并不等于条件方差的期望 $\mathrm{E}[h_{t+k}]$. 因此在进行多步测时, 不能借助式(15)直接求取期望, 而是需要前计算式(15)指数值再计算结果的期望值, 而这需要用到 z_t 和 u_t 的分布信息. 考虑到直接根据(z_t, u_t)的分布来推导 h_t 的计算复杂性较高.

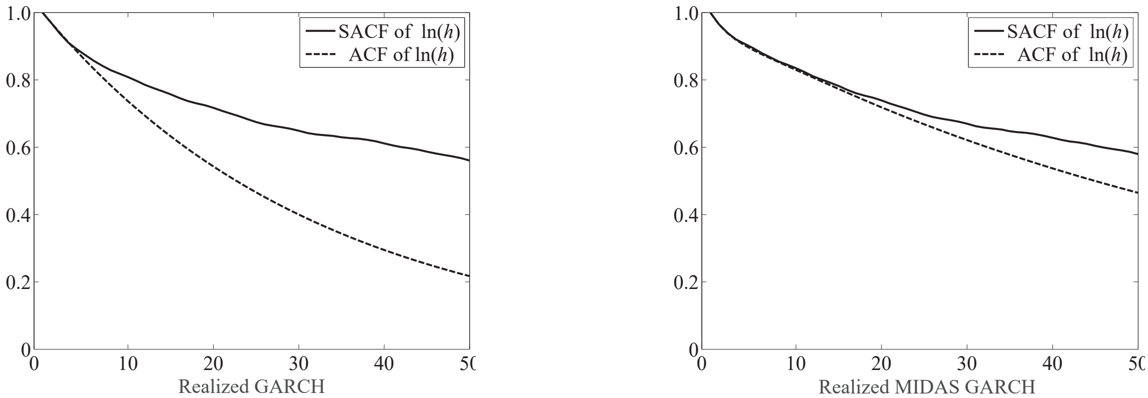

图 2 已实现混频数据抽样 GARCH 和已实现 GARCH 对于SPY 日波动率的ACF拟合

Fig. 2 The fitted ACF of SPY's daily volatility for realized MIDAS GARCH and realized GARCH

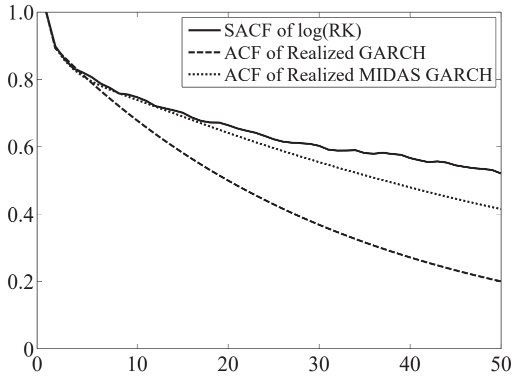

图 3 已实现混频数据抽样 GARCH 和已实现 GARCH 对于SPY 已实现测度的ACF拟合

Fig. 3 The fitted ACF of SPY's realized volatility for realized MIDAS GARCH and realized GARCH

本文采用更加简便的蒙特卡洛模拟方法来获得预测值. 关于随机数的生成方式, 本文沿袭 Lunde 等[9], 采取 bootstrap 的方法从样本内估计出残差中抽样, 进而模拟出 h_{t+k} 的分布. 这样的做法较直接从正态分布里面抽样更贴近实际数据.

样本外预测采用滚动窗口方式进行, 以最后的 500 个交易日为样本外数据, 最大样本外预测步长为 20 步, 考虑到数据集的总长度, 估计窗口设定为 2 400 个交易日. 对于每个交易日而言, 本文模拟 $M = 5\,000$ 条未来 20 日的收益率/已实现测度序列, 使用的 $\boldsymbol{C}_{t+j+1}$(记为 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{t+j+1}$)从估计窗口中的 2 400 组残差中有放回抽样计算得到. 对于给定的时刻 t 的 k 步样本外预测, 直接使用平均值来模拟期望值, 即

$$\hat{h}_{t+k} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\exp\left(\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}_t + \sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^j\tilde{\boldsymbol{C}}_{t+j+1}\right)\right), \tag{16}$$

其中 22 维向量 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} = (1, 0, \dots, 0)$.

需要指出的是, 这里的多步预测是指未来“第 k 天”的波动率水平, 而不是未来“k 天累计”的波动率水平[8].

关于波动率代理变量的选择, 传统文献中通常选用的是收益率平方. 但这种代理变量本身噪音很大, Andersen 等[27]建议使用已实现测度作为真实波动率的代理变量[9]. 本文为简便起见, 选择已实现核估计作为代理变量. 由于本文使用的收益率数据为基于“收盘价-收盘价”收益率, 而已实现核估计覆盖的是“开盘价–收盘价”收益率, 故需要对其进行比例变换, 将其均值调节到和“收盘价-收盘价”收益率的方差一致[10].

遵循 Patton[29]的建议, 使用稳健损失函数(robust loss function)的进行评价, 这种损失函数结合已实现测度, 可以给出预测能力的一致排序. 在稳健损失函数族中, 选取均方根误差[11](RMSE)和准似然函数(QLIKE)两个损失函数作为评价指标. 其中 RMSE 是对称损失函数, QLIKE 是非对称损失函数, 前者对波动率高估和低估惩罚力度相同, 后者对波动率低估有着更大的惩罚力度. 本文使用 Diebold-Mariano(DM)统计量来刻画不同模型损失函数差别的显著性.

表 4 和表 5 分别给出了模型在以 RMSE 和 QLIKE 为评价指标下的多步预测的结果. 其中包括波动率多步预测的损失函数值, 差距值以及 DM 统计量数值和显著性.

表 4 以RMSE为损失函数的多步预测结果

Table 4 Loss of multi-steps forecasts based on RMSE

	1 day	10 day	20 day		1 day	10 day	20 day
IBM				**SPY**			
RG	0.451	0.593	0.714	RG	0.277	0.431	0.553
RMG	0.446	0.571	0.675	RMG	0.271	0.396	0.482
Ratio	0.40 %	3.70 %	5.50 %	Ratio	2.00 %	8.10 %	12.90 %
DMs	1.935*	5.066***	6.795***	DMs	2.635***	4.534***	6.500***
INTC				**WMT**			
RG	0.943	1.225	1.543	RG	0.475	0.576	0.644
RMG	0.928	1.104	1.249	RMG	0.469	0.554	0.6
Ratio	1.60 %	9.90 %	19.10 %	Ratio	1.20 %	3.90 %	6.80 %
DMs	1.996**	4.925***	8.216***	DMs	2.131**	3.954***	7.602***
MSFT				**XOM**			
RG	0.728	0.964	1.061	RG	0.36	0.614	0.83
RMG	0.724	0.922	0.98	RMG	0.35	0.591	0.786
Ratio	0.70 %	4.40 %	7.60 %	Ratio	2.70 %	3.80 %	5.30 %
DMs	0.954	2.933***	4.674***	DMs	3.326***	4.986***	6.927***

注: RMG表示已实现混频数据抽样 GARCH 模型

[8]“k 天累计”存在高估低估相互抵消的状况, 并不如直接考察“第 k 天”更准确.

[9]由于比较的两个模型都使用了该已实现测度, 因此这样的选择并不偏向于某一个模型. 使用 5 min RV 并不改变结果.

[10]关于类似调节的更多信息, 可以参见文献[28].

[11]文献[29]指出的是稳健损失函数是 MSE, 由于 RMSE 更常用且是 MSE 的保序变换, 本文汇报结果时使用的 RMSE, 计算统计显著性时基于 MSE. 常见的平均绝对误差(MAE)指标并不是稳健损失函数. 因篇幅所限, 本文仅选取了代表性的对称和非对称损失函数作为标准.

表 5 以 QLIKE 为损失函数的多步预测结果

Table 5 Loss of multi-steps forecasts based on QLIKE

	1 day	10 day	20 day		1 day	10 day	20 day
IBM				**SPY**			
RG	0.091	0.145	0.192	RG	0.109	0.206	0.297
RMG	0.09	0.139	0.178	RMG	0.106	0.189	0.249
Ratio	1.30 %	4.50 %	7.20 %	Ratio	3.10 %	8.40 %	16.20 %
DMs	1.670*	4.624***	7.072***	DMs	2.874***	3.319***	5.323***
INTC				**WMT**			
RG	0.076	0.13	0.195	RG	0.131	0.197	0.24
RMG	0.075	0.112	0.143	RMG	0.129	0.187	0.215
Ratio	1.20 %	13.90 %	26.70 %	Ratio	1.20 %	5.20 %	10.20 %
DMs	0.729	4.426***	7.617***	DMs	1.038	3.289***	6.896***
MSFT				**XOM**			
RG	0.078	0.129	0.153	RG	0.078	0.183	0.275
RMG	0.079	0.126	0.138	RMG	0.076	0.174	0.254
Ratio	−0.20 %	2.80 %	9.50 %	Ratio	2.90 %	5.20 %	7.40 %
DMs	−0.088	0.696	2.202**	DMs	2.285**	4.646***	7.103***

注: *, **, ***分别代表 10 %, 5 %, 1 % 的显著性水平, RG 表示原始的已实现 GARCH 模型, RMG 表示已实现混频数据抽样 GARCH 模型.

为了直观的定义 RG 模型以及 RMG 模型在波动率预测上的差距, 给定损失函数的值, 定义差距为

$$\mathrm{Ratio} = (\mathrm{Loss}_{\mathrm{RG}} - \mathrm{Loss}_{\mathrm{RMG}})/\mathrm{Loss}_{\mathrm{RG}}, \tag{17}$$

可以看出, RMG 模型除了对 MSFT 在 QLIKE 指标下一步预测损失函数较 RG 高 $0.2\,\%$ 以外(该差距对应的 DM 统计量仅为 0.088, 并不显著), 对于其余所有预测期, 所有序列的两种损失函数下, RG 的损失函数都比 RMG 大. 并且这种差距随着预测期的拉长而进一步加大. DM 检验的结果显示, 在绝大多数情况下, 两个模型波动率预测能力的差距至少在 $5\,\%$ 水平上是显著的.

多步预测的差异的一个重要原因是 RMG 模型的长期波动信息加权的系数经过历史数据的训练, 能够更好的捕捉波动率序列的相关性. 加入长期波动信息还有另外的一个好处: 由于本质上是已实现测度的加权平均, 其变动较原始波动率更为平缓, 在波动率剧烈变化的时候可以提供更稳定的信息, 防止条件方差的预测对短期异常波动反应过度.

4 结束语

本文在 Hansen 等[6]提出的已实现 GARCH 模型的基础上, 提出了在波动率长记忆性建模和多步预测上更具有优势的已实现混频数据抽样 GARCH 模型, 模型在仅增加两个系数的情况下可以容纳更丰富的自相关结构. 基于指数和个股的实证结果表明, 相比于已实现 GARCH 模型, 已实现混频数据抽样 GARCH 模型对数据的拟合能力更强, 模型的内部一致性更好, 能够更好的描述实际数据中波动率相关性缓慢下降的现象. 在常用的稳健损失函数下, 已实现混频数据抽样 GARCH 模型的样本外多步预测能力优于已实现 GARCH 模型, 并且这种优势在统计上显著, 改进幅度随着预测天数的增加而增大.

参考文献:

[1] Engle R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. Econometrica, 1982, 50(4): 987–1007.

[2] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 1986, 31(3): 307–327.

[3] Bollerslev T. Glossary in ARCH(GARCH) Volatility and Time Series Econometrics, Oxford: Oxford University Press, 2010: 281–323.

[4] Engle R, Giampiero G. A multiple indicators model for volatility using intra-daily data. Journal of Econometrics, 2006, 131(1): 3–27.

[5] Shephard N, Sheppard K, Realising the future: Forecasting with high-frequency-based volatility (HEAVY) models. Journal of Applied Econometrics, 2010, 25(2): 197–231.

[6] Hansen P, Huang Z, Shek H. Realized GARCH : A joint model for returns and realized measures of volatility. Journal of Applied Econometrics, 2012, 27(6): 877–906.

[7] Watanabe T. Quantile forecasts of financial returns using realized GARCH models. Japanese Economic Review, 2012, 63(1): 68–80.

[8] Hansen P, Zhuo H. Exponential GARCH modeling with realized measures of volatility. Journal of Business & Economic Statistics, 2016, 34(2): 269–287.

[9] Lunde A, Olesen V. Modeling and Forecasting the Volatility of Energy Forward Returns: Evidence from the Nordic Power Exchange. Denmark: Aarhus University, 2013.

[10] 王天一, 黄 卓. 高频数据波动率建模: 基于厚尾分布的 realized GARCH 模型. 数量经济技术经济研究, 2012(5): 149–160.
Wang T Y, Huang Z. High frequency volatility modelling: A fat-tail distribution based realized GARCH model. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2012(5): 149–160. (in Chinese)

[11] 马 锋, 魏 宇, 黄登仕, 等. 隔夜收益率能提高高频波动率模型的预测能力吗. 系统工程学报, 2016, 31(6): 783-797.
Ma F, Wei Y, Huang D S, et al. Can overnight returns improve the forecasting performance of high-frequency volatility models. Journal of Systems Engineering, 2016, 31(6): 783–797. (in Chinese)

[12] 黄友珀, 唐振鹏, 唐 勇. 基于藤 copula–已实现 GARCH 的组合收益分位数预测. 系统工程学报, 2016, 31(1): 45–54.
Huang Y P, Tang Z P, Tang Y. Portfolio quantile forecasts based on vine copula and realized GARCH. Journal of Systems Engineering, 2016, 31(1): 45–54. (in Chinese)

[13] Bollerslev T, Chou R, Kroner K. ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. Journal of Econometrics, 1992, 52(1): 5–59.

[14] Zumbach G. Volatility processes and volatility forecast with long memory. Quantitative Finance, 2004, 4(1): 70–86.

[15] Taylor J. Consequences for option pricing of a long memory in volatility. Handbook of Financial Econometrics and Statistics, New York: Springer, 2015: 903–933.

[16] Chkili W, Hammoudeh S, Nguyen K. Volatility forecasting and risk management for commodity markets in the presence of asymmetry and long memory. Energy Economics, 2014, 41(1): 1–18.

[17] 曹广喜, 曹 杰, 徐龙炳. 双长记忆 GARCH 族模型的预测能力比较研究: 基于沪深股市数据的实证分析. 中国管理科学, 2012, 20(2): 41–49.
Cao G X, Cao J, Xu L B. Comparative research on forecasting ability of double-long-memory GARCH family models: Empirical analysis of Shanghai and Shenzhen stock markets. Chinese Journal of Management Science, 2012, 20(2): 41–49. (in Chinese)

[18] 庞淑娟, 刘向丽, 汪寿阳. 中国期货市场高频波动率的长记忆性. 系统工程理论与实践, 2011, 31(6): 1039–1044.
Pang S J, Liu X L, Wang S Y. Long memory of China futures markets volatility for high-frequency time series. Systems Engineering: Theory & Practice, 2011, 31(6): 1039–1044. (in Chinese)

[19] Baillie T, Bollerslev T, Ole Mikkelsen H. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 1996, 74(1): 3–30.

[20] Engle R, Lee G. A long-run and short-run component model of stock return volatility // Cointegration, Causality, and Forecasting, Oxford: Oxford University Press, 1999: 475–497.

[21] Andersen T, Bollerslev T, Diebold F, et al. Modeling and forecasting realized volatility. Econometrica, 2003, 71(2): 579–625.

[22] Ghysels E, Santa-Clara P, Valkanov R. There is a risk-return trade-off after all. Journal of Financial Economics, 2005, 76(3): 509–548.

[23] Corsi F. A Simple Approximate long-memory model of realized volatility. Journal of Financial Econometrics, 2009, 7(2): 174–196.

[24] 徐剑刚, 张晓蓉, 唐国兴. 混合数据抽样波动模型. 数量经济技术经济研究, 2007, 24(11): 77–85.
Xu J G, Zhang X R, Tang G X. Mixed data sampling volatility model. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2007, 24(11): 77–85. (in Chinese)

[25] 瞿 慧, 李 洁, 程 昕. HAR 族模型与 GARCH 族模型对不同期限波动率的预测精度比较: 基于沪深 300 指数高频价格的实证分析. 系统工程, 2015(3): 25–31.
Qu H, Li J, Cheng X. Comparison of HAR-family models' and GARCH -family models' forecasting preformances for volatilities of different terms: An empirical study using CSI300 index's high-frequency prices. Systems Engineering, 2015(3): 25–31. (in Chinese)

[26] Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Designing realized kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise. Econometrica, 2008, 76(6): 1481–1536.

[27] Andersen T, Bollerslev T. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. International Economic Review, 1998, 39(4): 885–905.

[28] Hansen P, Lunde A. A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data. Journal of Financial Econometrics, 2005, 3(4): 525–554.

[29] Patton A. Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. Journal of Econometrics, 2011, 160(1): 246–256.

作者简介:

王天一(1985—), 男, 北京人, 博士, 副教授, 研究方向: 金融计量, Email：tianyiwang@uibe.edu.cn;

刘 浩(1992—), 男, 安徽人, 硕士生, 研究方向: 金融计量, Email: haoliu512@pku.edu.cn;

黄 卓(1978—), 男, 湖北人, 博士, 副教授, 博士生导师, 研究方向: 金融计量, Email: zhuohuang@nsd.pku.edu.cn.

** *************************

(上接第 800 页)

[10] Liang J, Zhang X D, Zhao Y J. Utility indifference valuation of corporate bond with rating migration risk. Frontiers of Mathematics in China, 2015, 10(6): 1389–1400.

[11] 梁 进, 赵月涓, 张旭丹. 公司债券信用评级迁移的效用无差别定价方法. 经济建模, 2016, 54(4): 339–346.
Liang J, Zhao Y J, Zhang X D. Utility indifference valuation of corporate bond with credit rating migration by structure approach. Economic Modelling, 2016, 54(4): 339–346. (in Chinese)

[12] Hu B, Liang J, Wu Y. A free boundary problem for corporate bond with credit rating migration. Journal of Mathematical Analysis & Applications. 2015, 428(2): 896–909.

[13] Liang J, Hu B, Wu Y. Asymptotic traveling wave solution for a credit rating migration problem. Journal of Differential Equations, 2016, 261 (2): 1017–1045.

[14] Sadr A. Interest Rate Swaps and Their Derivatives: A Practitioner's Guide. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.

[15] Nunes J P V. American options and callable bonds under stochastic interest rates and endogenous bankruptcy. Review of Derivatives Research, 2011, 14(3): 283–332.

[16] Dixit A K, Pindyck R S. Investment under uncertainty. Economics Books, 2015, 39(5): 659–681.

[17] Krylov N V. Controlled Processes of Diffusion Type. Berlin: Springer, 2008.

作者简介:

梁 进(1958—), 女, 上海人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 信用衍生产品, 自由边界问题, Email: liang_jin@tongji.edu.cn;

包俊利(1994—), 男, 浙江温州人, 硕士生, 研究方向: 信用衍生产品定价, Email: 747649818@qq.com;

曾楚焜(1991—), 男, 湖北潜江人, 硕士, 研究方向: 信用衍生产品定价, Email: zengchukun@163.com.