

基于双重反馈机制的语言型动态群体评价方法

董庆兴¹, 朱克毓², 梁昌勇²

(1. 华中师范大学信息管理学院, 湖北 武汉 430079;
2. 合肥工业大学管理学院, 过程优化与智能决策教育部重点实验室, 安徽 合肥 230009)

摘要: 针对语言型动态群体评价问题, 提出了基于双重反馈机制的群体评价方法。在未满足共识要求时, 按照自动化观点反馈机制向共识程度最低的专家提供修改建议, 在该专家拒绝修改的情况下, 按照专家权重反馈机制调整专家权重。然后依据新的专家意见或专家权重集结群体意见, 检查群体共识程度并进行新一轮的共识提升, 直到满足终止条件要求。由此可得最终专家评价意见和群体评价结果。本文证明了方法的收敛性并用一个算例验证了方法的可行性。

关键词: 综合评价; 群体评价; 语言信息; 共识达成

中图分类号: TP273 文献标识码: A 文章编号: 1000-5781(2018)05-0710-11

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2018.05.013

Linguistic dynamic group evaluation method based on dual feedback mechanism

Dong Qingxing¹, Zhu Keyu², Liang Changyong²

(1. School of Information Management, Central China Normal University, Wuhan 430079, China;
2. The MOE Key Laboratory of Process Optimization and Intelligent Decision-making, School of Management, Hefei
University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: A method based on dual feedback mechanism is proposed for linguistic dynamic group evaluation. If group consensus level does not reach a certain level, revision is suggested to the most incompatible expert according to the automatic opinion feedback mechanism. If this expert insists on his non-consensus opinion and refuses to revise, the weights of experts will be reallocated according to the weight feedback mechanism. Then, recalculate the group opinion with the updated opinions or weights. Next check the group consensus level and improve the overall consensus level repeatedly until each terminal condition is fulfilled. Thus the experts' opinions as well as the group evaluation results are obtained. The paper also proves the convergence of the proposed method and validates its feasibility with a numerical example.

Key words: comprehensive evaluation; group evaluation; linguistic information; consensus reaching

1 引言

人们描述自己的偏好时, 往往使用自然语言中的词语。近年来学界提出的二元语义处理方法在自然语言信息与数值计算方面取得了一定进展, 并且已经被广泛应用到综合评价(多属性决策)和群体评价(群决策)的

收稿日期: 2015-12-25; 修订日期: 2016-07-25。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71501080; 71501054; 71871102); 国家社会科学基金重大资助项目(13&ZD183); 中央高校基本科研业务费教育科学专项资助项目(CCNU17TS0009)。

研究领域^[1,2]. 基于二元语义表示模型的群体评价方法首先专家采用自然语言短语表达偏好, 然后通过二元语义模型将之转换为实数并进行集结处理得到最终的群体语言偏好以得到评价结果. 在群体评价中, 随着个人意识的逐步觉醒和专业分工的加剧, 群体成员间的观点产生分歧的可能性越来越大. 从而, 研究具有协商交互特征的群体评价方法成为解决群体意见分歧、增进群体共识的重要手段, 也是一项具有理论价值和实际意义的重要课题.

近年来, 具有协商交互特征的群体评价问题的研究已经取得了一些进展, 具体可分为两类: 一类是针对群体交互的动态过程中的信息集结和交互方式研究^[3,4]. 董庆兴等^[5]提出了利用差异驱动思想集成来自主观客体双方信息的群体评价交互方法. 张发明等^[6]开发了基于区间数的交互式群体评价方法, 通过专家间的信息交互寻找稳定的评价信息; 另一类是针对动态群体评价过程中面临专家意见发散这一问题, 考虑引导群体评价的共识达成. Herrera 等^[7]构建了一个基于语言信息的群体共识达成模型, 采用观点反馈调整机制帮助专家更改判断以形成群体共识. Dong 等^[8]针对群体 AHP 评价问题, 提出了基于行几何平均值法的群体 AHP 共识达成方法, Dong 等^[9]开发了一个基于 peer to peer 交互的共识达成方法, Wu 等^[10]提出了一个基于互反判断矩阵的提升专家判断矩阵一致性和共识程度的算法. Palomares 等^[11]提出了一个面向大规模群体中非合作个体检测和管理的共识达成模型.

上述动态群体评价方法主要通过对群体内成员的观点进行修改以提升群体共识程度, 专家权重在多阶段的群体评价过程中保持恒定不变. 而在现实多轮协商过程中, 专家的权重往往随着专家的表现动态变化, 因此需要在动态群体评价过程中引入对专家权重的调整机制. 其次, 传统动态群体评价方法给出观点反馈意见后要求专家必须按照意见修改观点. 但是, 在群体中往往存在一些专家坚持自己的“非共识”观点, 而且这类观点的存在也可以避免一些群体极化现象, 因此在动态群体评价过程中应当避免对专家的强迫. 为此, 本文针对上述问题, 提出了一种基于双重反馈机制的语言型动态群体评价方法. 该方法提出包括专家观点反馈机制和专家权重反馈机制在内的自动化双重反馈机制, 首先通过观点反馈机制向专家提供自动化的反馈修改建议指导专家修改观点; 如果专家坚持自己的“非共识”观点, 则通过专家权重反馈机制调节群体内专家权重分布, 通过上述双重机制引导专家达成共识, 顺利完成动态群体评价. 进一步地, 通过方法收敛性证明, 表明了该方法在提升群体共识上面的有效性.

2 二元语义信息及其计算

二元语义是由西班牙学者 Herrera 等^[12]提出的一种语言信息表达模型, 采用语言短语和数值组成的二元数组表示语言评价信息并进行计算, 可以有效的避免信息集成和运算过程中出现的信息损失和扭曲问题. 二元语义信息是建立在符号转换的概念基础之上的, 一个语言短语可以被标识为一个二元组 (s_k, α_k) , 其中 s_k 表示语言短语集 S 中的第 k 个短语, 而 α_k 表示符号转移值, 满足 $\alpha_k \in [-0.5, 0.5]$, 表示评价结果与 s_k 的偏差. 设有序语言短语集为 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$, 其中 s_i 表示语言短语集 S 中的第 i 个短语, $i \in \{0, 1, \dots, g\}$. 例如, 一个由 7 个语言短语组成语言短语集可以定义为

$$\begin{aligned} S = \{s_0 &= \text{Very Poor(VP)}, s_1 = \text{Poor(P)}, s_2 = \text{Slightly Poor(SP)}, s_3 = \text{Fair(F)}, \\ s_4 &= \text{Slightly Good(SG)}, s_5 = \text{Good(G)}, s_6 = \text{Very Good(VG)}\}. \end{aligned}$$

一般要求 S 具有如下性质^[13-15]:

- 1) 有序性: 当 $i \geq j$ 时, 有 $s_i \succeq s_j$, “ \succeq ”表示“好于或等于”;
- 2) 存在逆运算算子“neg”: $\text{neg}(s_i) = s_{g-i}$;
- 3) 极大化运算: 当 $s_i \succeq s_j$ 时, 有 $\max\{s_i, s_j\} = s_i$;
- 4) 极小化运算: 当 $s_i \succeq s_j$ 时, 有 $\min\{s_i, s_j\} = s_j$.

设 $s_i \in S$ 为一个语言短语, 则相应的二元语义形式可由以下函数 θ 得到

$$\theta(s_i) = (s_i, 0), \quad s_i \in S. \quad (1)$$

设实数 $\beta \in [0, g]$ 为语言短语集经某集结方法得到的结果, 则可由如下函数表示为二元语义信息形式^[14,15], 即

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha) = \begin{cases} s_i, & i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-0.5, 0.5], \end{cases} \quad (2)$$

其中 round 表示“四舍五入”取整算子.

二元语义 (s_i, α) 可由下式转化成相应的实数 β , $\beta \in [0, g]$ ^[14,15]:

$$\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta. \quad (3)$$

假设 $(s_k, \alpha_1), (s_l, \alpha_2)$ 为任意两个二元语义信息, 则关于二元语义的比较有如下规定^[14,15]:

- 1) 如果 $k < l$, 那么 $s_k \prec s_l$, 这里符号“ \prec ”表示“劣于”;
- 2) 如果 $k = l$, 那么有如下三种情况: a) 若 $\alpha_1 = \alpha_2$, 那么 $s_k \sim s_l$, 这里符号“ \sim ”表示等于; b) 若 $\alpha_1 < \alpha_2$, 那么 $s_k \prec s_l$; c) 若 $\alpha_1 > \alpha_2$ 那么 $s_k \succ s_l$, “ \succ ”表示“好于”.

为便于集结, 下面分别给出二元语义算术平均算子和二元语义加权算术平均算子的定义.

定义 1 设 $(s_1, \alpha_1), (s_2, \alpha_2), \dots, (s_n, \alpha_n)$ 是一组二元语义信息, 则该组二元语义信息的算术平均算子为^[15]

$$(\bar{s}, \bar{\alpha}) = \Delta \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i) \right) = \Delta \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \right), \quad (4)$$

其中 β_i 为 (s_i, α_i) 对应的实数, $\bar{s} \in S$, $\bar{\alpha} \in [-0.5, 0.5]$.

定义 2 设 $(s_1, \alpha_1), (s_2, \alpha_2), \dots, (s_n, \alpha_n)$ 是一组二元语义信息, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为相应的权重向量, 则二元语义加权算术平均算子为^[15]

$$(\tilde{s}, \tilde{\alpha}) = \Delta \left(\sum_{i=1}^n \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i) w_i \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^{-1} \right) = \Delta \left(\sum_{i=1}^n \beta_i w_i \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^{-1} \right), \quad (5)$$

同样地, β_i 为 (s_i, α_i) 对应的实数, $\tilde{s} \in S$, $\tilde{\alpha} \in [-0.5, 0.5]$.

3 基于语言信息的动态群体评价方法

3.1 问题描述

设某群体综合评价问题, 其方案集合为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 属性集合为 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, 属性权重向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$, 满足 $w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m, \sum_{j=1}^m w_j = 1$. 评价者(专家)集合为 $D = \{DM_1, DM_2, \dots, DM_s\}$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)^T$ 为专家对应的权重向量, λ_k 代表初始状态下专家 DM_k 的重要性, 满足 $\lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, s, \sum_{k=1}^s \lambda_k = 1$. 令 $\mathbf{S}_k = (s_{ij(k)})_{n \times m}$ 为专家 DM_k 给出的评价矩阵, 其中 $s_{ij(k)}$ 表示专家 DM_k 给出的方案 A_i 关于属性 C_j 表现的语言评价信息, $s_{ij(k)}$ 为预先定义好的语言评价术语集 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ 中的一个元素. 利用式(1)将语言评价矩阵 $\mathbf{S}_k = (s_{ij(k)})_{n \times m}$ 转换为二元语义评价矩阵 $\mathbf{R}_k = ((r_{ij(k)}, \alpha_{ij(k)}))_{n \times m}$, 采用式(5)中二元语义加权算术平均算子, 即可求得群体二元语义评价矩阵 $\tilde{\mathbf{R}} = ((\tilde{r}_{ij}), \tilde{\alpha}_{ij}))_{n \times m}$, 有

$$(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\alpha}_{ij}) = \Delta \left(\sum_{k=1}^s \lambda_k \Delta^{-1} (r_{ij(k)}, \alpha_{ij(k)}) \right) = \Delta \left(\sum_{k=1}^s \lambda_k \beta_{ij(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

由于群体内成员观点经常难以保持一致,从而群体共识成为了群体评价中的一个研究热点. Kacprzyk 等^[16]采用模糊多数的概念定义了一个软的共识的概念, Bryson^[17]定义了群体共识指数和群体分歧指数来测量群体共识程度, Herrera-Viedma 等^[18]通过比较方案在专家的排序向量的位置差别测量共识程度, 王丹力等^[19]分别定义了群体和个体的强一致性指标和强不一致性指标以衡量群体共识程度. 基于前述研究, 本文有如下定义.

定义 3 采用表示个体评价矩阵与群体评价矩阵之间的距离表示专家与群体观点的共识程度, 即定义

$$\text{GCI}_k = d(\mathbf{R}_k, \tilde{\mathbf{R}}) = \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\Delta^{-1}(r_{ij(k)}, \alpha_{ij(k)}) - \Delta^{-1}(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\alpha}_{ij})|, \quad (7)$$

为专家 DM_k 的群体共识指数(group consensus index, GCI), $k = 1, 2, \dots, s$.

由式(7)可知, 1) $\text{GCI}_k \in [0, 1]$; 2) $\text{GCI}_k = 0$, 当且仅当 $\mathbf{R}_k = \tilde{\mathbf{R}}$.

令 γ 为专家共识程度可接受阈值, 如果有 $\text{GCI}_k \leq \gamma$, 则称 \mathbf{R}_k 与 $\tilde{\mathbf{R}}$ 之间的共识程度是可接受的; 如果有 $\text{GCI}_k > \gamma$, 则称 \mathbf{R}_k 与 $\tilde{\mathbf{R}}$ 之间的共识程度是不可接受的. 在实际应用中, γ 的取值可由评价协调人根据实际评价需要事先确定. γ 越小, 则对共识达成的要求越高, 适合于时间充裕, 评价结果关系重大, 代表利益广泛的大型群体评价. 而对于应急方案评价等需要快速做出反应的群体评价, 则可以将 γ 设置的略高一些, 以尽快达成共识并作出评价.

3.2 协商规则和终止条件

群体共识达成流程中最为重要的就是协商交互过程, 其目的是极大化群体共识, 使群体评价结论达到稳定一致状态. 目前, 群体评价协商交互过程一般通过信息反馈机制来解决. 反馈机制也是通过信息交互促使专家们达成共识, 通常由评价协调人负责从各专家处收集评价信息并将之发布给相关专家. 一般地, 本文假设评价协调人本身不参与评价, 相当于信息发布平台; 专家成员均为认真负责的评价成员, 没有私下联盟勾结情形, 否则无法入选专家群体. 为更准确的说明问题, 本文假定评价群体成员愿意接受协商交互过程中的如下规则:

协商规则 1 如果专家给出的评价矩阵与群体评价矩阵之间的共识程度是可接受的, 则专家不再修改自身的评价矩阵.

协商规则 2 如果专家给出的评价矩阵与群体评价矩阵之间的共识程度是不可接受的, 同时专家愿意修正自己的评价矩阵, 则应采取本文给出的自动观点修改反馈机制修改其评价矩阵.

协商规则 3 如果专家给出的评价矩阵与群体评价矩阵之间的共识程度是不可接受的, 则专家可以在付出一定代价(权重减少)的情形下, 坚持自己的“非共识”观点. 权重的调整应采用本文给出的权重调整反馈机制进行调整.

在协商交互过程中, 终止条件扮演着一个重要角色. 本文设定协商交互终止条件如下:

终止条件 1 如果在第 t 次协商交互过程结束后, 对于所有 $k = 1, 2, \dots, s$ 都有 DM_k 拒绝修改自身观点, 则可结束协商交互过程, 输出 $t = t^*$.

终止条件 2 如果在第 t 次协商交互过程结束后, 对于除坚持自己“非共识”观点的专家外的其他所有专家 DM_l ($\text{DM}_l \in D$), 均有 $\text{GCI}_l^{(t)} \leq \gamma$ 成立, 则算法结束, 输出 $t = t^*$.

终止条件 3 如果达到了预先规定的算法最大迭代次数 T , $T \geq 1$ 且为正整数, 算法结束. 在协商交互过程中, 满足以上三条协商交互终止条件中的任意一条即可判定算法终止.

3.3 算法步骤

本文提出的方法具体流程如下:

输入 专家集合, 专家原始语言评价矩阵 $\mathbf{S}_k = (s_{ij(k)})_{n \times m}$, $k = 1, 2, \dots, s$, 专家初始权重 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)^T$, 专家群体共识指数可接受阈值 γ , 算法最大迭代次数 T .

输出 专家最终二元语义评价矩阵 $\mathbf{R}_k^* = ((r_{ij(k)}^*, \alpha_{ij(k)}^*))_{n \times m}$, $k = 1, 2, \dots, s$, 未拒绝修改的专家集合 D^* , 专家最终权重 $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_s^*)^T$, 群体最终评价矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}^* = ((\tilde{r}_{ij}^*, \tilde{\alpha}_{ij}^*))_{n \times m}$.

步骤1 根据式(1)对专家原始语言信息矩阵转换为二元语义形式的评价矩阵 $\mathbf{R}_k = ((r_{ij(k)}, \alpha_{ij(k)}))_{n \times m}$, 其中 $(r_{ij(k)}, \alpha_{ij(k)})$ 对应的数值为 $\beta_{ij(k)}$, $k = 1, 2, \dots, s$; 令 $t = 0$, $D^{(0)} = D$, $D^{(0)}$ 为 $t = 0$ 时未拒绝修改的专家集合. $\mathbf{R}_k^{(0)} = \mathbf{R}_k$, $k = 1, 2, \dots, s$; 确定专家群体共识指数可接受阈值 γ ;

步骤2 利用式(6)得到群体评价矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}^{(t)}$. 然后根据式(7)计算 $D^{(t)}$ 中每一个专家的评价矩阵 $\mathbf{R}_k^{(t)} = ((r_{ij(k)}^{(t)}, \alpha_{ij(k)}^{(t)}))_{n \times m}$ 与群体评价矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}^{(t)} = ((\tilde{r}_{ij}^{(t)}, \tilde{\alpha}_{ij}^{(t)}))_{n \times m}$ 的距离得到 $\text{GCI}_k^{(t)}$, $\text{DM}_k \in D^{(t)}$. 判断是否满足协商交互终止条件, 如果满足则转步骤 5, 否则转步骤 3;

步骤3 设专家 DM_h 与群体评价矩阵距离最大, 即 $\text{GCI}_h^{(t)} = \max_{\text{DM}_l \in D^{(t)}} \{\text{GCI}_l^{(t)}\}$. 则 DM_h 需调整自己的评价矩阵以提升其与群体评价矩阵的一致程度, 如果 DM_h 不愿做出上述修改, 转步骤 4. 如果接受修改建议, 则可得到 $\boldsymbol{\lambda}^{(t+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(t)}$, $\mathbf{R}_k^{(t+1)} = ((r_{ij(k)}^{(t+1)}, \alpha_{ij(k)}^{(t+1)}))_{n \times m}$, 其中

$$\left(r_{ij(k)}^{(t+1)}, \alpha_{ij(k)}^{(t+1)}\right) = \begin{cases} \Delta \left(\Delta^{-1} \left(r_{ij(k)}^{(t)}, \alpha_{ij(k)}^{(t)}\right) \eta^{(t)} + \Delta^{-1} \left(\tilde{r}_{ij}^{(t)}, \tilde{\alpha}_{ij}^{(t)}\right) (1 - \eta^{(t)})\right), & k = h \\ \left(r_{ij(k)}^{(t)}, \alpha_{ij(k)}^{(t)}\right), & \text{DM}_k \in D, k \neq h, \end{cases} \quad (8)$$

令 $t = t + 1$, $D^{(t+1)} = D^{(t)}$, 转步骤 2;

步骤4 DM_h 在交互过程中坚持自身观点, 不愿意做出式(8)中的修改, 则需为坚持自己的“非共识”观点需要付出专家权重减小的代价, 并且将其减少的权重平均分配给 D 中其他专家, 则有 $\mathbf{R}_k^{(t+1)} = \mathbf{R}_k^{(t)}$, $k = 1, 2, \dots, s$. DM_h 在下一轮协商交互过程中的专家权重可调整为

$$\lambda_h^{(t+1)} = \left(\theta^{(t)} + \lambda_h^{(t)}(1 - \theta^{(t)})\right) \lambda_h^{(t)}, \quad (9)$$

其中 $\theta^{(t)} \in (0, 1)$, D 中其余专家 DM_k 在下一轮协商交互过程中的权重可调整为

$$\lambda_k^{(t+1)} = \lambda_k^{(t)} + \lambda_h^{(t)}(1 - \theta^{(t)}) \lambda_k^{(t)}, \quad \text{DM}_k \in D, k \neq h, \quad (10)$$

从而有 $\boldsymbol{\lambda}^{(t+1)} = (\lambda_1^{(t+1)}, \lambda_2^{(t+1)}, \dots, \lambda_s^{(t+1)})^T$, 其中

$$\lambda_k^{t+1} = \begin{cases} \left(\theta + \lambda_h^{(t)}(1 - \theta^{(t)})\right) \lambda_h^{(t)}, & k = h \\ \left(1 + \lambda_h^{(t)}(1 - \theta^{(t)})\right) \lambda_k^{(t)}, & \text{DM}_k \in D, k \neq h, \end{cases} \quad (11)$$

可知, 满足 $\lambda_k^{(t+1)} \geq 0$, $\sum_{k=1}^s \lambda_k^{(t+1)} = 1$. 令 $t = t + 1$, $D^{(t+1)} = D^{(t)} \setminus \{\text{DM}_h\}$. 转步骤 2;

步骤5 $t \leftarrow t^*$, 协商交互过程结束, 群体观点已经达到稳定一致状态. 输出 $\tilde{\mathbf{R}}^* = ((\tilde{r}_{ij}^*, \tilde{\alpha}_{ij}^*))_{n \times m}$, 求得方案 A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ 的二元语义综合评价值为

$$y_i = (s_p, \alpha_p) = \Delta \left(\sum_{j=1}^m \Delta^{-1} \left(\tilde{r}_{ij}^{(t*)}, \tilde{\alpha}_{ij}^{(t*)}\right) w_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad p = 0, 1, \dots, g, \quad (12)$$

转步骤 6;

步骤6 计算 y_i 并据此对方案 A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ 进行排序并择优, 评价过程结束.

3.4 收敛性

本文所给出的基于双重反馈机制的语言型动态群体评价方法是收敛的,能够有效提升群体共识水平。由算法步骤中描述可知,本文方法运行过程中的每一轮都会在尚未拒绝修改的专家中挑出群体共识程度最差的专家,并按照本文所给规则向该专家提供评价矩阵修改建议。如果该专家同意,那么修改评价矩阵后继续运行算法;如果该专家不同意,则保持其评价矩阵不变,调整群体权重分布并继续运行算法。另外,在本文所给出的调整机制中, η 代表专家保留自己观点的程度, η 越小说明专家需要对其评价矩阵修改的越多,做出的妥协越多; θ 为权重代价系数, θ 越小则专家坚持“非共识”观点所付出的代价越大。 η 和 θ 的取值应由具体评价环境制定,但为防止追求共识而对专家修改产生过度要求,应根据群体内其他专家的共识水平以及群体共识达成的需求制定 η 和 θ 的取值范围。由调整机制可知, η 和 θ 的取值直接影响到群体共识达成方法运行的效果、快慢和群体内专家的接受程度,从而会对算法的收敛性产生影响。在证明算法的收敛性之前,首先通过如下假设限定 η 和 θ 的取值。

假设 1 不失一般性,假设 $\eta^{(t)}, \theta^{(t)} \in (\max\{\tau^{(t)}, 0\}, 1)$, 其中

$$\tau^{(t)} = 1 - \frac{GCI_h^{(t)} - \max_{DM_l \in D^{(t)}, l \neq h} \{GCI_l^{(t)}\}}{\lambda_h^{(t)} GCI_h^{(t)}}. \quad (13)$$

由上式可知, $\tau^{(t)} \in (-\infty, 1)$, $\tau^{(t)}$ 的取值取决于被选中专家的群体共识指数、群体内部其他成员与被选中专家间共识程度的差异和被选中专家的权重三个参数,反映了当时的群体评价环境。实际上,由于 $\tau^{(t)}$ 可能取负值,所以 $\eta^{(t)}, \theta^{(t)} \in (\max\{\tau^{(t)}, 0\}, 1)$ 。由式(13)知,如果被选中的共识程度最低的专家比其他专家的共识程度明显低很多(即 $GCI_h \gg GCI_l, h \neq l$),则其调节参数的下界就低一些,就可能选取一个较低的调节参数(对应较大的调整量)。反之则下界就高一些,只能选取一个相对较高的调节参数(对应相对较小的调整量)。这种根据群体评价共识环境的需求自适应调节机制能够更好的保证群体共识达成过程的顺利完成。从而,如果假设 1 成立,那么有如下定理。

定理 1 在第 t 轮被选中的专家 DM_h 按本算法中式(8)修改评价矩阵,那么有

$$\max_{DM_l \in D^{(t+1)}} \{GCI_l^{(t+1)}\} < \max_{DM_l \in D^{(t)}} \{GCI_l^{(t)}\}.$$

定理 1 证明见附录。该定理说明如果被选中的专家愿意按照本文给出的修改规则修改自身判断,那么经过修改之后,群体共识水平会提升,本算法收敛。

定理 2 如果在第 t 轮被选中的专家 DM_h 拒绝修改观点,则按照本文所给出的权重调节机制对专家权重进行调整之后,依然有

$$\max_{DM_l \in D^{(t+1)}} \{GCI_l^{(t+1)}\} < \max_{DM_l \in D^{(t)}} \{GCI_l^{(t)}\}.$$

定理 2 证明见附录。该定理说明如果被选中的专家愿意保持自身的“非共识”观点,则经过权重调整之后,群体共识水平仍然会提高。综合考虑以上两定理可知,本文所给出的群体共识达成方法是收敛的,也就是如果方法运行足够多次,总能达到规定的群体共识水平。

4 数值算例

在复杂产品开发工程中,供应商参与的协同开发是由核心制造企业与供应商形成动态联盟,进行群组开发工作。这样能够大幅缩短产品开发周期,降低开发成本,推动产品快速上市。以安徽省某汽车制造企业供应商选择为背景,以某款车型底盘设计为例,在四家潜在供应商(A_1, A_2, A_3, A_4)中选取一家参与其复杂产品协同开发。拟从设计能力(C_1)、交货期(C_2)、质量能力(C_3)、成本情况(C_4)等四项属性出发对潜在供应商进行考察。从项目开发团队各个部门中选择五位专家 $\{DM_1, DM_2, \dots, DM_5\}$ 对四个供应商协同开发能力进行

评价. 专家权重向量为 $\lambda = (0.30, 0.15, 0.20, 0.25, 0.10)^T$, 属性权重向量为 $w = (0.25, 0.15, 0.2, 0.40)^T$. 经过专家组讨论, 选用 9 粒度语言短语评价集合为

$$S = \{s_0 = \text{None}(N), s_1 = \text{Very Low(VL)}, s_2 = \text{Low(L)}, s_3 = \text{Slightly Low(SL)}, s_4 = \text{Medium(M)}, \\ s_5 = \text{Slightly High(SH)}, s_6 = \text{High(H)}, s_7 = \text{Very High(VH)}, s_8 = \text{Perfect(P)}\}.$$

五位专家所给的语言评价短语矩阵如下

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ \begin{matrix} A_1 & \begin{pmatrix} H & SH & VH & L \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} M & L & SH & H \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} VH & VH & M & SL \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} VL & P & H & VH \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}, \quad S_2 = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ \begin{matrix} A_1 & \begin{pmatrix} P & L & M & VL \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} SL & VH & H & H \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} VL & VL & VH & M \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} H & H & P & P \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}, \\ S_3 &= \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ \begin{matrix} A_1 & \begin{pmatrix} L & SH & VH & SH \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} M & SL & SL & SH \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} H & VH & SH & VH \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} M & H & VH & SH \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}, \quad S_4 = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ \begin{matrix} A_1 & \begin{pmatrix} H & SL & SL & H \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} L & SH & H & P \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} M & VL & P & VH \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} VH & P & L & SL \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}, \\ S_5 &= \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ \begin{matrix} A_1 & \begin{pmatrix} VL & VH & L & VH \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} VH & M & VH & SL \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} M & H & L & SL \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} L & SL & M & SH \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}. \end{aligned}$$

利用式(1)将专家语言评价信息矩阵转换为二元语义形式的评价矩阵. 令专家共识程度可接受阈值 $\gamma = 0.2$, $D^{(0)} = D$. 利用式(6)得到群体评价矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}^{(0)}$, 并计算得到 $D^{(0)}$ 中每一个专家的群体共识指数有 $GCI_1^{(0)} = 0.1559$, $GCI_2^{(0)} = 0.2198$, $GCI_3^{(0)} = 0.1420$, $GCI_4^{(0)} = 0.2149$, $GCI_5^{(0)} = 0.2531$. 由于 $d_2^{(0)}, d_4^{(0)}, d_5^{(0)}$ 大于专家一致性可接受阈值 γ , 从而需要继续执行共识达成算法. 可知共识程度最低的专家为 DM₅, 并可由式(13)计算可得 $\tau^{(0)} = -0.32$. 选取 $\eta^{(0)} = 0.8$, $\theta^{(0)} = 0.8$, 按照式(8)向专家 DM₅ 提供评价矩阵修改建议, 专家 DM₅ 接受修改观点, 从而有

$$\mathbf{R}_5^{(1)} = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ \begin{matrix} A_1 & \begin{pmatrix} (s_2, -0.2) & (s_6, 0.45) & (s_3, -0.39) & (s_6, 0.39) \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} (s_6, 0.33) & (s_4, -0.02) & (s_7, -0.36) & (s_4, -0.4) \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} (s_4, 0.17) & (s_6, -0.3) & (s_3, -0.31) & (s_3, 0.39) \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} (s_2, 0.39) & (s_4, -0.24) & (s_4, 0.26) & (s_5, 0.11) \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}.$$

令 $D^{(1)} = D^{(0)}$, $\mathbf{R}_k^{(1)} = \mathbf{R}_k^{(0)}$, $k = 1, \dots, 4$, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)}$, 计算新一轮的专家共识指数有 $GCI_1^{(1)} = 0.1558$, $GCI_2^{(1)} = 0.2188$, $GCI_3^{(1)} = 0.1440$, $GCI_4^{(1)} = 0.2128$, $GCI_5^{(1)} = 0.2076$. 可知共识程度最低的专家为 DM₂, 计算可得 $\tau^{(1)} = 0.82$. 选取 $\eta^{(1)} = 0.85$, $\theta^{(1)} = 0.85$, 向专家 DM₂ 提供评价矩阵修改建议, 专家 DM₂ 接受修改观点, 从而有

$$\mathbf{R}_2^{(2)} = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ \begin{matrix} A_1 & \begin{pmatrix} (s_8, -0.44) & (s_2, 0.33) & (s_4, 0.17) & (s_1, 0.43) \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} (s_3, 0.09) & (s_7, -0.47) & (s_6, -0.13) & (s_6, 0.01) \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} (s_2, -0.42) & (s_2, -0.48) & (s_7, -0.22) & (s_4, 0.15) \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} (s_6, 0.30) & (s_6, 0.13) & (s_8, -0.40) & (s_8, -0.37) \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}.$$

令 $D^{(2)} = D^{(1)}$, $\mathbf{R}_k^{(2)} = \mathbf{R}_k^{(1)}$, $k = 1, 3, 4, 5$, $\boldsymbol{\lambda}^{(2)} = \boldsymbol{\lambda}^{(1)}$, 计算新一轮的专家共识指数有

$$\text{GCI}_1^{(2)} = 0.1546, \text{GCI}_2^{(2)} = 0.1909, \text{GCI}_3^{(2)} = 0.1409, \text{GCI}_4^{(2)} = 0.2147, \text{GCI}_5^{(2)} = 0.2060.$$

由于 $\text{GCI}_4^{(2)}, \text{GCI}_5^{(2)}$ 大于专家一致性可接受阈值 γ , 从而需要继续执行共识达成算法, 计算得 $\tau^{(2)} = 0.84$. 选取 $\theta = 0.85, \eta = 0.85$, 向专家 DM_4 提供评价矩阵修改建议, 专家 DM_4 拒绝修改, 则应采用式(10)和式(11)调整专家权重, 有 $\boldsymbol{\lambda}^{(2)} = (0.3113, 0.1556, 0.2075, 0.2219, 0.1038)^T$.

令 $D^{(3)} = D^{(2)} - \text{DM}_4$, $\mathbf{R}_k^{(3)} = \mathbf{R}_k^{(2)}$, $k = 1, 2, \dots, 5$, 计算 $D^{(3)}$ 中的专家共识指数有

$$\text{GCI}_1^{(3)} = 0.1478, \text{GCI}_2^{(3)} = 0.1925, \text{GCI}_3^{(3)} = 0.1378, \text{GCI}_5^{(3)} = 0.2047.$$

可知共识程度最低的专家为 DM_5 , 并可由式(13)计算可得 $\tau^{(3)} = 0.43$.

选取 $\eta^{(3)} = 0.8, \theta^{(3)} = 0.8$, 按照式(8)向专家 DM_5 提供评价矩阵修改建议, 专家 DM_5 接受修改观点, 从而有

$$\mathbf{R}_5^{(4)} = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} (s_2, 0.44) & (s_6, 0.02) & (s_3, 0.13) & (s_6, -0.11) \\ (s_6, -0.20) & (s_4, -0.06) & (s_6, 0.33) & (s_4, 0.08) \\ (s_4, 0.33) & (s_6, -0.50) & (s_3, 0.23) & (s_4, -0.30) \\ (s_3, -0.32) & (s_4, 0.38) & (s_4, 0.49) & (s_5, 0.21) \end{array} \right).$$

令 $D^{(4)} = D^{(3)}$, $\mathbf{R}_k^{(4)} = \mathbf{R}_k^{(3)}$, $k = 1, 2, \dots, 4$, $\boldsymbol{\lambda}^{(4)} = \boldsymbol{\lambda}^{(3)}$, 计算 $D^{(4)}$ 中专家共识指数可得

$$\text{GCI}_1^{(4)} = 0.1475, \text{GCI}_2^{(4)} = 0.1915, \text{GCI}_3^{(4)} = 0.1393, \text{GCI}_5^{(4)} = 0.1680.$$

至此 $D^{(4)}$ 内所有专家的群体共识指数均小于专家共识程度可接受阈值 γ , 从而共识达成, 算法结束.

根据式(12)即可求得方案 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的二元语义综合评价值为

$$y_1 = (s_4, 0.48), y_2 = (s_5, -0.10), y_3 = (s_5, 0.03), y_4 = (s_5, 0.33),$$

从而可知, 供应商 A_4 是专家眼中参与协同开发的最优选择, 评价过程结束.

5 结束语

面向群体共识的动态群体评价方法研究具有重要的理论意义和实际应用价值. 本文考虑了语言环境下的动态群体评价问题, 提出了一种基于专家观点修改反馈机制和专家权重调整反馈机制的动态群体评价方法并证明了该方法在提升群体共识方面的有效性. 该方法建立了专家观点反馈机制引导共识程度最低的专家修改其评价矩阵, 提升群体共识水平. 并且利用专家权重反馈机制依据专家表现动态调整专家权重加速群体共识达成. 与已有的研究相比, 本文不仅提供了专家观点反馈机制, 还给出了专家权重反馈机制, 从两方面考虑群体动态评价过程; 其次, 专家可以在评价过程中选择按照反馈修改自己的意见, 也可以坚持自身的“非共识”意见, 避免了对专家的强迫; 最后, 本文提出的方法具有自适应特征. 在今后的研究工作中, 需要考虑具有不确定信息的动态群体评价问题.

参考文献:

- [1] 姜艳萍, 樊治平. 基于不同粒度语言判断矩阵的群决策方法. 系统工程学报, 2006, 21(3): 249–253.
Jiang Y P, Fan Z P. Approach to group decision making with multi-granularity linguistic comparison matrices. Journal of Systems Engineering, 2006, 21(3): 249–253. (in Chinese)
- [2] 王坚强, 陈晓红. 信息不完全确定的多准则语言区间群决策方法. 系统工程学报, 2010, 25(2): 190–195.
Wang J Q, Chen X H. Group multi-criteria linguistic interval decision-making method with incompletely certain information. Journal of Systems Engineering, 2010, 25(2): 190–195. (in Chinese)

- [3] 彭 怡, 胡 杨. 考虑群体一致性的动态群体决策方法. *运筹与管理*, 2004, 13(4): 69–72.
Peng Y, Hu Y. Dynamic group decision making method considering group consensus. *Operations Research & Management Science*, 2004, 13(4): 69–72. (in Chinese)
- [4] 徐选华, 王敏赛, 陈晓红. 偏好冲突优化的多属性多阶段大群体决策方法. *系统工程学报*, 2014, 29(1), 48–55.
Xu X H, Wang M S, Chen X H. Multi-attribute & multi-stage large group decision-making method for preference conflict optimization. *Journal of Systems Engineering*, 2014, 29(1): 48–55. (in Chinese)
- [5] 董庆兴, 郭亚军, 马凤妹. 基于差异驱动的主客体协作式综合评价方法. *中国管理科学*, 2012, 20(1): 171–176.
Dong Q X, Guo Y J, Ma F M. Collaborative comprehensive evaluation approach based on differentiation principle. *Chinese Journal of Management Science*, 2012, 20(1): 171–176. (in Chinese)
- [6] 张发明, 孙文龙. 基于区间数的多阶段交互式群体评价方法及应用. *中国管理科学*, 2014, 22(10): 129–135.
Zhang F M, Sun W L. Multi-stage dynamic interactive group evaluation method based on interval information and its application. *Chinese Journal of Management Science*, 2014, 22(10): 129–135. (in Chinese)
- [7] Herrera F, Herrera-Viedma, E, Verdegay, J L. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(1): 73–87.
- [8] Dong Y C, Zhang G Q, Hong W C, et al. Consensus models for ahp group decision making under row geometric mean prioritization method. *Decision Support Systems*, 2010, 49(3): 281–289.
- [9] Dong Q X, Cooper O. A peer-to-peer dynamic adaptive consensus reaching model for the group AHP decision making. *European Journal of Operational Research*. 2016, 250(2): 521–530.
- [10] Wu Z B, Xu J P. A consistency and consensus based decision support model for group decision making with multiplicative preference relations. *Decision Support Systems*, 2012, 52(3): 757–767.
- [11] Palomares I, Martinez L, Herrera F. A consensus model to detect and manage noncooperative behaviors in large-scale group decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, 22(3), 516–530.
- [12] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach. *Information Sciences*, 1995, 85(4): 223–239.
- [13] Herrera F, Herrera-Viedma E. Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 115(1): 67–82.
- [14] Herrera F, Martinez L. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranular hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2001, 31(2): 227–234.
- [15] Herrera F, Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 746–752.
- [16] Kacprzyk J, Fedrizzi M, Nurmi H. Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 49(1): 21–31.
- [17] Bryson N. Group decision-making and the analytic hierarchy process: Exploring the consensus-relevant information content. *Computers & Operations Research*, 1996, 23(1): 27–35.
- [18] Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2002, 32(3): 394–402.
- [19] 王丹力, 戴汝为. 群体一致性及其在研讨厅中的应用. *系统工程与电子技术*, 2001, 23(7): 33–37.
Wang D L, Dai R W. Group consistency and application in the hall for workshop. *Systems Engineering and Electronics*, 2001, 23(7): 33–37. (in Chinese)

作者简介:

董庆兴(1988—), 男, 山东济宁人, 博士, 讲师, 研究方向: 评价理论与方法, Email: qxdong@mail.ccnu.edu.cn;
朱克毓(1983—), 男, 安徽肥西人, 博士, 讲师, 研究方向: 决策科学与方法, Email: cauchyandy@163.com;
梁昌勇(1965—), 男, 安徽肥西人, 博士, 教授, 研究方向: 管理信息系统, Email: cyliang@163.com.

附录

定理 1 证明 如果 DM_h 按照式(8)修改矩阵, 则有 $D^{(t+1)} = D^{(t)}$, 同时由式(8)可得新的综合评价矩阵

$$\mathbf{R}_h^{(t+1)} = \left((r_{ij(h)}^{(t+1)}, \alpha_{ij(h)}^{(t+1)}) \right)_{n \times m} = \left(\beta_{ij(h)}^{(t+1)} \right)_{n \times m},$$

其中

$$\beta_{ij(h)}^{(t+1)} = \eta^{(t)} \beta_{ij(h)}^{(t)} + (1 - \eta^{(t)}) \tilde{\beta}_{ij}^{(t)}.$$

由式(6)可计算得到群体评价矩阵

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(t+1)} = \left((\tilde{r}_{ij}^{(t+1)}, \tilde{\alpha}_{ij}^{(t+1)}) \right)_{n \times m} = \left(\tilde{\beta}_{ij}^{(t+1)} \right)_{n \times m},$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ij}^{(t+1)} &= \sum_{k=1}^s \beta_{ij(k)}^{(t+1)} \lambda_k^{(t+1)} = \sum_{k=1}^s \beta_{ij(k)}^{(t+1)} \lambda_k^{(t)} \\ &= \sum_{k=1, k \neq h}^s \beta_{ij(k)}^{(t)} \lambda_k^{(t)} + \beta_{ij(h)}^{(t+1)} \lambda_h^{(t)} \\ &= \sum_{k=1, k \neq h}^s \beta_{ij(k)}^{(t)} \lambda_k^{(t)} + \eta^{(t)} \beta_{ij(h)}^{(t)} \lambda_h^{(t)} + (1 - \eta^{(t)}) \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} \lambda_h^{(t)} \\ &= \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} - \lambda_h^{(t)} (1 - \eta^{(t)}) (\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)}). \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \text{GCI}_h^{(t+1)} &= \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \beta_{ij(h)}^{(t+1)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t+1)} \right| \\ &= \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \eta^{(t)} \beta_{ij(h)}^{(t)} + (1 - \eta^{(t)}) \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t+1)} \right| \\ &= \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \eta^{(t)} (\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)}) + \lambda_h^{(t)} (1 - \eta^{(t)}) (\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)}) \right| \\ &= \left(\eta^{(t)} + \lambda_h^{(t)} (1 - \eta^{(t)}) \right) \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| (\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)}) \right| \\ &< \text{GCI}_h^{(t)}. \end{aligned} \tag{14}$$

对于其他专家 $\text{DM}_k \in D^{(t)}$, $k \neq h$, 有

$$\begin{aligned} \text{GCI}_k^{(t+1)} &= \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \beta_{ij(k)}^{(t+1)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t+1)} \right| \\ &= \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| (\beta_{ij(k)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)}) + \lambda_h^{(t)} (1 - \eta^{(t)}) (\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)}) \right| \\ &\leq \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\left| \beta_{ij(k)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} \right| + \left| \lambda_h^{(t)} (1 - \eta^{(t)}) (\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)}) \right| \right) \\ &= \text{GCI}_k^{(t)} + \lambda_h^{(t)} (1 - \eta^{(t)}) \text{GCI}_h^{(t)} \\ &\leq \frac{\max_{\text{DM}_l \in D^{(t)}, l \neq h} \left\{ \text{GCI}_l^{(t)} \right\}}{\text{GCI}_h^{(t)}} \text{GCI}_h^{(t)} + \lambda_h^{(t)} (1 - \eta^{(t)}) \text{GCI}_h^{(t)} \\ &= \left(\frac{\max_{\text{DM}_l \in D^{(t)}, l \neq h} \left\{ \text{GCI}_l^{(t)} \right\}}{\text{GCI}_h^{(t)}} + \lambda_h^{(t)} (1 - \eta^{(t)}) \right) \text{GCI}_h^{(t)} < \text{GCI}_h^{(t)}, \end{aligned} \tag{15}$$

上式中最后一步由 $\eta^{(t)}$ 取值范围可推出。从而由式(14)和式(15)可知

$$\max_{\text{DM}_l \in D^{(t+1)}} \left\{ \text{GCI}_l^{(t+1)} \right\} < \max_{\text{DM}_l \in D^{(t)}} \left\{ \text{GCI}_l^{(t)} \right\}.$$

证毕。

定理2证明 如果 DM_h 拒绝按照本文所给出的规则修改自身评价矩阵, 可知 $D^{(t+1)} = D^{(t)} \setminus \{\text{DM}_h\}$. 由式(11)可得

$$\boldsymbol{\lambda}^{(t+1)} = \left(\lambda_1^{(t+1)}, \lambda_2^{(t+1)}, \dots, \lambda_s^{(t+1)} \right)^T.$$

由式(6)可得

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ij}^{(t+1)} &= \sum_{k=1}^s \beta_{ij(k)}^{(t+1)} \lambda_k^{(t+1)} = \sum_{k=1}^s \beta_{ij(k)}^{(t)} \lambda_k^{(t+1)} \\ &= \sum_{k=1, k \neq h}^s \beta_{ij(k)}^{(t)} \lambda_k^{(t)} \left(1 + \lambda_h^{(t)} \left(1 - \theta^{(t)} \right) \right) + \beta_{ij(h)}^{(t)} \left(\theta^{(t)} + \lambda_h^{(t)} \left(1 - \theta^{(t)} \right) \right) \lambda_h^{(t)} \\ &= \sum_{k=1}^s \beta_{ij(k)}^{(t)} \lambda_k^{(t)} + \lambda_h^{(t)} \left(1 - \theta^{(t)} \right) \sum_{k=1}^s \beta_{ij(k)}^{(t)} \lambda_k^{(t)} - (1 - \theta^{(t)}) \lambda_h^{(t)} \beta_{ij(h)}^{(t)} \\ &= \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} - \lambda_h^{(t)} (1 - \theta^{(t)}) \left(\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} \right), \end{aligned}$$

同样地, 对于 $\forall \text{DM}_k \in D^{(t+1)}$, 有

$$\begin{aligned} \text{GCI}_k^{(t+1)} &= \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \beta_{ij(k)}^{(t+1)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t+1)} \right| \\ &= \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \left(\beta_{ij(k)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} \right) + \lambda_h^{(t)} (1 - \theta^{(t)}) \left(\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{mn(g+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\left| \beta_{ij(k)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} \right| + \left| \lambda_h^{(t)} (1 - \theta^{(t)}) \left(\beta_{ij(h)}^{(t)} - \tilde{\beta}_{ij}^{(t)} \right) \right| \right) \\ &= \text{GCI}_k^{(t)} + \lambda_h^{(t)} (1 - \theta^{(t)}) \text{GCI}_h^{(t)} \\ &\leq \frac{\max_{\text{DM}_l \in D^{(t)}, l \neq h} \left\{ \text{GCI}_l^{(t)} \right\}}{\text{GCI}_h^{(t)}} \text{GCI}_h^{(t)} + \lambda_h^{(t)} (1 - \theta^{(t)}) \text{GCI}_h^{(t)} \\ &< \text{GCI}_h^{(t)}, \end{aligned}$$

可知 $\max_{\text{DM}_l \in D^{(t+1)}} \left\{ \text{GCI}_l^{(t+1)} \right\} < \max_{\text{DM}_l \in D^{(t)}} \left\{ \text{GCI}_l^{(t)} \right\}$.

证毕.