

# 均值函数对随机波动率短期利率模型的影响分析

江良<sup>1,2</sup>, 林鸿熙<sup>3</sup>, 宋丽平<sup>1,2</sup>

(1. 莆田学院数学与金融学院, 福建莆田 351100;

2. 福建省高校金融数学重点实验室(莆田学院), 福建莆田 351100; 3. 莆田学院商学院, 福建莆田 351100)

**摘要:** 构建均值函数随机波动率短期利率模型, 利用核估计和 Kalman 滤波器给出拟极大似然估计方法. 实证结果表明引入均值函数改善了模型的似然率估计值, 也减少了随机波动率估计值, 同时对衍生品价格也产生较大的影响. 这些结果揭示了均值函数对于短期利率模型的冲击较大. 此外, 也发现不同均值函数模型之间对于衍生价格影响还是比较显著的, 而比较常系数模型之间所得衍生价格差异比较小.

**关键词:** 均值函数; 随机波动率; 核估计方法; Kalman 滤波器.

中图分类号: F830.9; O212.7      文献标识码: A      文章编号: 1000-5781(2018)05-0662-12

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2018.05.009

## Impact analysis of mean reverting function to short term rate model with stochastic volatilities

Jiang Liang<sup>1,2</sup>, Lin Hongxi<sup>3</sup>, Song Liping<sup>1,2</sup>

(1. School of Mathematics and Finance, Putian University, Putian 351100, China;

2. Key Laboratory of Financial Mathematics of Universities in Fujian Province, Putian University, Putian 351100, China;

3. School of Business, Putian University, Putian 351100, China)

**Abstract:** This paper presents a short term rate model with mean reverting function and stochastic volatilities (ESV). The quasi-maximum likelihood (QML) estimator is developed by using kernel estimator and Kalman filter. The empirical evidences support that the likelihood function will be improved and the estimates of the stochastic volatilities will also dramatically decrease for our ESV model, compared with the constant mean-reverting (CSV). Meanwhile, the mean reverting function affects contingent claims pricing. These implies that the mean reverting function has a substantial impact on the dynamic process of short term rate. Moreover, there are slight differences between the prices of the contingent claims of short term rates given by the CSV models, but there are obvious differences between the prices given by ESV models.

**Key words:** mean reverting function; stochastic volatility; kernel estimator; Kalman filter.

## 1 引言

由于短期利率在衍生品定价和风险管理中是一个非常重要的指标, 因此研究短期利率模型在当前金融工程领域中是一项重要的工作, 特别是连续模型. 目前, 已有一些短期利率模型得到非常好地应用和研究<sup>[1-6]</sup>.

收稿日期: 2015-12-22; 修订日期: 2016-09-05.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471175); 福建省自然科学基金资助项目(2015J05012; 2016J01677); 莆田学院育苗基金资助项目(2014060; 2014061).

上述模型在业界或学术界已被广泛地应用和研究,但比较它们动态变化仍然是一个问题.原因之一是缺少一般框架下的模型来刻画短期利率动态过程.为了解决此问题,Chan等<sup>[7]</sup>考虑了具有弹性系数短期利率模型(CEV),使得该模型能够嵌入更多经典的模型.Durham<sup>[8]</sup>考虑更一般非线性短期利率模型能嵌入更多的短期利率模型,郑挺国等<sup>[9]</sup>引入跳的因素研究了随机波动率CEV模型.这些研究者考虑CEV模型动机是希望找到更好的模型来刻画短期利率动态行为.

基于常系数模型是无法对冲远期利率衍生品的风险.如Li等<sup>[10]</sup>得出一般的短期利率模型很难对冲远期利率衍生品(Cap产品)的风险.Andersen等<sup>[11]</sup>研究发现随机波动率模型虽然能够很好地拟合数据,但是也很难对冲收益率风险,他们建议引入其它宏观状态变量,其原因之一是上述模型和远期利率模型(HJM)是不相容的.为了克服这个困难,Hull等<sup>[12]</sup>在Chan等<sup>[7]</sup>模型中引入均值函数,以至于模型能够相容于HJM模型和短期利率期限结构问题,而且他们也发现均值函数对于衍生品价格的影响也是不可忽视的,特别是具有长期期限结构的衍生品价格.Chiarella等<sup>[13]</sup>通过HJM模型推导更一般的单因子均值函数短期利率模型,也发现均值函数模型能更好地刻画市场价格风险.Valchev<sup>[14]</sup>在HJM模型框架下给出了具有均值函数和跳的随机波动率高斯模型,他们说明了模型能更好地刻画波动率期限结构问题.Filipović等<sup>[15]</sup>基于均值函数短期利率模型研究了银行隔夜拆借的风险问题.值得一提的是,Maghsoodi<sup>[16]</sup>发现对于均值函数的单因子CIR模型(ECIR)可以转化为高维常系数的CIR模型,然而高维的问题不仅在参数估计上变得困难,而且相应的衍生定价也变得更加困难.这就说明了ECIR模型在技术方面上具有操作的优势.

综上所述,本文将考虑更一般的短期利率模型来兼容上述的问题.在该模型中引入均值函数和随机波动率,保证了短期利率模型和HJM模型相容.在模型中,可通过弹性系数的约束条件,获得一系列的短期利率模型,这就保证了本文的模型更具一般化而且也能够相容于HJM模型和利率期限结构问题.虽然郑挺国等<sup>[9]</sup>引入跳的因素来改善拟合结果,但是该作者也得出随机波动率因素比跳的因素影响更大,Li<sup>[10]</sup>也检验了在CEV模型中引入跳的因素可能是没有必要的,他也表明跳的现象可通过增大模型弹性系数来实现,因此本文考虑短期利率样本路径具有连续性的性质,排除了跳的可能性.

为了给出参数估计和模型统计检验问题,将应用极大似然估计方法.由于本文主要目标测试引入均值函数是否对随机波动率短期利率模型产生影响,因此首先应用核估计方法给出了均值函数的估计.这里值得一提的是,对于CIR模型,本文也考虑约束条件的核估计方法.由于随机波动率是隐含状态变量,也是不可观测的,因此极大似然函数需对该变量积分.然而对于CEV模型,该积分可能没有显示的表达式,因此需要一种可行的技术方法来给出参数的估计.根据极大似然估计方法一步向前预测误差分解,基于Kalman滤波器可以给出相应的似然函数.因此将基于Kalman滤波器通过拟极大似然估计法给出模型的参数估计,并相应地给出统计检验.

## 2 随机波动率模型

基于Chiarella等<sup>[13]</sup>和Valchev<sup>[14]</sup>的研究结果,在风险中性测度下,考虑短期利率模型满足下面的随机微分方程(ECEV-SV)

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sqrt{h_t}r_t^\gamma dW_t^1, \quad (1)$$

$$d \ln h_t = \alpha(\beta - \ln h_t)dt + \eta dW_t^2, \quad (2)$$

其中 $\theta(t)$ 和 $\beta$ 分别表示短期利率均值函数和随机波动率均值, $a$ 和 $\alpha$ 分别表示短期利率和随机波动率回归速率, $\eta$ 表示随机波动率的波动率, $h$ 是瞬时波动率, $\gamma$ 是弹性系数.假设 $dW_t^1 dW_t^2$ 的期望值 $E[dW_t^1 dW_t^2] = 0$ .

在ECEV-SV模型中,对不同约束条件 $\gamma$ 可获的一些相容性模型,其结果在表1中.根据Durham<sup>[8]</sup>的论述,随机波动率模型更好地刻画短期利率动态变化,因此本文不考虑单因子模型.

Fong等<sup>[5]</sup>研究了FV-SV模型.由于该模型是高斯类型,所以 $r_t$ 可能取值为负的.若波动是常数时,

BS-SV 模型退化为 Brennan 等<sup>[17]</sup>所论述的模型,他们基于该模型给出可转债的数值方法.在 CIR-SV 模型中,虽然保证了短期利率非负,但是债券价格不具有仿射性结构的性质,导致了参数估计和衍生品定价只能应用数值方法或者蒙特卡罗方法.郑挺国等<sup>[9]</sup>引入跳的因素考虑 CIR-SV 和 CEV-SV 模型的拟合效果.Cotton 等<sup>[18]</sup>利用微分算子展开研究了 FV-SV 和 CIR-SV 模型的衍生品定价.Andersen 等<sup>[6]</sup>和 Ball 等<sup>[19]</sup>分别研究了 CEV-SV 模型,他们的实证结果表明了该模型具有更好的拟合效果.值得一提的是,Liu 等<sup>[20]</sup>考虑了 ECIR-SV 期权定价问题.

表 1 短期利率模型和相应的参数

Table 1 Short-term interest rate model and the corresponding Parameter

模型	参数	$\gamma$	
FV-SV	$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sqrt{h_t}dW_t^1$	$\theta, a$ 是常数	0
EFV-SV	$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sqrt{h_t}dW_t^1$	$a$ 是常数	0
CIR-SV	$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sqrt{h_t}\sqrt{r_t}dW_t^1$	$\theta, a$ 是常数	1/2
ECIR-SV	$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sqrt{h_t}\sqrt{r_t}dW_t^1$	$a$ 是常数	1/2
BS-SV	$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sqrt{h_t}r_t dW_t^1$	$\theta, a$ 是常数	1
EBS-SV	$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sqrt{h_t}r_t dW_t^1$	$a$ 是常数	1
CEV-SV	$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sqrt{h_t}r_t^\gamma dW_t^1$	$\theta, a$ 是常数	待定
ECEV-SV	$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sqrt{h_t}r_t^\gamma dW_t^1$	$a$ 是常数	待定

弹性系数实际上是刻画了短期利率和随机波动率之间变化的一种关系,这种关系在经济学上是非常清晰的.如考虑短期利率条件分布均值  $E[\cdot]$  和方差  $\text{Var}(\cdot)$ ,即  $E[dr_t|r_t, h_t] = (\theta(t) - ar_t)dt$ ,  $\text{Var}(dr_t|r_t, h_t) = h_t r_t^{2\gamma} dt$ ,那么可得  $\left(\frac{d\text{Var}(dr_t|r_t, h_t)/dr_t}{\text{Var}(dr_t|r_t, h_t)/r_t}\right) = 2\gamma$ .当  $\gamma < 1/2$  时,若利率增加的百分比相应波动率减少  $2\gamma$  倍;若  $\gamma > 1/2$  相应地增加  $2\gamma$  倍;而  $\gamma = 1/2$  时,其波动率和瞬时利率同倍增加.

### 3 参数估计方法

#### 3.1 Kalman 滤波器

Kalman 滤波器基本思想是在  $t$  时刻根据  $t-1$  之前的信息,利用预测误差分解求出状态变量最优的线性估计.关于 Kalman 滤波器方法对预测误差的分解是两步的过程:第一步,在  $t$  时刻根据  $t-1$  之前的信息,给出预测状态变量的均值和方差;第二步,根据  $t$  时刻的信息,修正第一步中所求的预测值.

考虑式(1)和式(2)的离散形式

$$\Delta r_i = (\theta_i - ar_i)\Delta t + \sqrt{h_i}r_i^\gamma \sqrt{\Delta t}\varepsilon_{i+1}^1, \quad (3)$$

$$\Delta \ln h_i = \alpha(\beta - \ln h_i)\Delta t + \eta\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{i+1}^2, \quad (4)$$

其中  $\Delta$  是差分算子,  $r_i = r(t_i)$ ,  $h_i = h(t_i)$ ,  $\varepsilon_{i+1}^1$  和  $\varepsilon_{i+1}^2$  是相互独立的高斯过程,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ .

由于式(3)是一个非高斯过程.根据 Durham<sup>[21]</sup>的论述,若离散模型是高斯过程将会改善参数估计结果,而且 Kalman 滤波器对线性方程是有效的,而对于非线性模型性能较低<sup>[22]</sup>.因此需对式(3)转化为高斯过程.

定义  $x_i = (\Delta r_i - (\theta_i - ar_i)\Delta t)/\sqrt{\Delta t}$ ,式(3)转化为  $x_i = \sqrt{h_i}r_i^\gamma \varepsilon_{i+1}^1$ .对  $x_i$  平方后取对数,可得

$$\ln x_i^2 = \ln h_i + 2\gamma \ln r_i + \ln(\varepsilon_{i+1}^1)^2. \quad (5)$$

根据 Ball 等<sup>[19]</sup>和 Jacquier 等<sup>[23]</sup>的论述,式(5)可以由下面高斯过程近似,即

$$\ln x_i^2 = \ln h_i + 2\gamma \ln r_i - 1.27 + z_{i+1}, \quad (6)$$

其中  $z_{i+1} \sim N(0, \pi^2/2)$ .

由于  $z_{i+1}$  是高斯过程,可使用 Kalman 滤波器估计参数.设  $V_i = \ln h_i$ ,  $y_i = \ln x_i^2$ ,那么均方差最优估计(线性投影)为  $\hat{V}_{i+1|i} = \hat{E}[V_{i+1}|Y_i]$ ,其中  $Y_i = \{y_1, y_2, \dots, y_i\}$ ,  $\hat{E}$  表示线性投影算子,相应的均值平方误

差(MSE)为  $\Omega_{i+1|i} = E[(V_{i+1} - \hat{V}_{i+1|i})^2]$ . 根据式(4), 设  $\delta = 1 - \alpha\Delta t$ , 那么  $\hat{V}_{i+1|i}$  和  $\Omega_{i+1|i}$  回归方程分别为

$$\hat{V}_{i+1|i} = \beta\alpha\Delta t + \delta \hat{E}(V_i|2018_i) + \eta\sqrt{\Delta t}\hat{E}(\epsilon_{i+1}^2|Y_i) = \alpha\beta\Delta t + \delta\hat{V}_{i|i}, \tag{7}$$

$$\Omega_{i+1|i} = \delta^2\Omega_{i|i} + \eta^2\Delta t. \tag{8}$$

式(7)和式(8)就是 Kalman 滤波器预测方程, 但是式(7)中的  $\hat{V}_{i|i}$  和式(8)中的  $\Omega_{i|i}$  仍然是不知道的. 因此, 下面将给出修正方程.

根据上述的状态变量的预测,  $y_{i+1}$  在信息  $Y_i$  条件下的线性投影为  $\hat{y}_{i+1|i} = \hat{E}[\hat{E}[y_{i+1}|V_{i+1}, Y_i]|Y_i] = \hat{V}_{i+1|i} + 2\gamma \ln r_i - 1.27$ , 相应 MSE 估计为  $E[(y_{i+1} - \hat{y}_{i+1|i})^2] = \Omega_{i+1|i} + \pi^2/2$ . 由于  $\hat{V}_{i|i}$  基于信息  $Y_i$  的投影, 有

$$\hat{V}_{i|i} = \hat{E}[V_i|y_i, Y_{i-1}] = \hat{V}_{i|i-1} + \frac{\Omega_{i|i-1}(y_i + 1.27 - \hat{V}_{i|i-1} - 2\gamma \ln r_i)}{\Omega_{i|i-1} + \pi^2/2}, \tag{9}$$

$$\Omega_{i|i} = E[(V_i - \hat{V}_{i|i})^2] = \Omega_{i|i-1} \left(1 - \frac{\Omega_{i|i-1}}{\Omega_{i|i-1} + \pi^2/2}\right), \tag{10}$$

式(9)和式(10)称为 Kalman 滤波器的修正方程.

然而为了计算式(7)~式(10)的递归方程, 仍需初始条件. 假设  $V_i$  是平稳过程, 因此  $E(V_0) = \beta$  且  $\hat{V}_{1|0} = \delta E(V_0) + \alpha\beta\Delta t = \beta$ . 相应的  $\Omega_{1|0} = E[(V_1 - \hat{V}_{1|0})(V_1 - \hat{V}_{1|0})] = \eta^2\Delta t / (1 - \delta^2)$ , 其中假设  $V_0$  和  $\epsilon_1^2$  是不相关的.

### 3.2 基于 Kalman 滤波器拟极大似然估计

根据前面的论述及预测误差分解, 可得对数似然函数

$$\ln L(\Theta, \omega|Y_N) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln f_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{e_i^2}{f_i}, \tag{11}$$

其中  $f_i = \Omega_{i|i-1} + \pi^2/2$  表示方差预测误差,  $e_i = y_i + 1.27 - \hat{V}_{i|i-1} - 2\gamma \ln r_i$  表示一步向前预测误差,  $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1})$ ,  $\omega = (a, \gamma, \alpha, \beta, \eta)$ , 其统计性质可参考文献[24].

为了简化对式(11)的估计, 根据 Maghsoodi<sup>[16]</sup>的方法, 对式(6)两边取无条件期望, 那么有

$$E[\ln x_i^2] = \beta + 2\gamma E[\ln r_{t-1}] - 1.27, \tag{12}$$

对式(2)中用样本均值近似期望, 可得  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i^2 = \beta + \frac{2\gamma}{N} \sum_{i=1}^N \ln r_{i-1} - 1.27$ , 从而获得  $\beta$  的估计值. 那么极大似然估计转化为只估计参数  $(\gamma, \alpha, \eta)$ , 该估计得到的参数是相容的<sup>[25]</sup>.

最大化式(11)仍需给出  $y_i = \ln x_i^2$  的值. 根据 Ball 等<sup>[19]</sup>的研究, 对  $\theta(t)$  的估计可先通过最小二乘法估计, 即

$$(\Delta r_i - (\theta_i - ar_i)\Delta t)^2 / N. \tag{13}$$

若直接优化问题(13)可得  $\theta_i$  的最优解为  $\theta_i\Delta t = \Delta r_i + ar_i\Delta t$ , 显然估计值和市场观察值呈现一样的震荡. 然而考虑 ECIR-SV 模型时, 上述的最优解可能产生负的值, 而 Feller 条件说明了  $\theta(t)$  一定是非负的, 因此需通过技术性处理, 给出光滑解. 另一方面, 关于  $\theta(t)$  是在无限维空间中选取, 而插值方法依赖于数据的节点数, 是一个有限维问题. 因此当零假设是常数和备择假设是函数时, 其统计量是很难给出的, 原因是无法给出精确地给出这两种假设之间的关系. 所以有必要考虑一种可行的方法来解决上述问题.

### 3.3 Nadaraya-Watson 核估计方法

本文将选取核估计方法, 因为该方法仅仅在每个节点上加权平均, 而且选取不同的核函数, 相应的最优窗口仅差一个常数因子<sup>[26]</sup>.

为了估计  $\theta(t)$  (其离散  $\theta_i$ ), 引入众所周知 Nadaraya-Watson 核函数估计器<sup>[26]</sup>, 那么  $\theta(t)$  近似为

$$\theta_h(t) = \sum_{i=0}^{N-1} W_i(t) Y_i, \quad (14)$$

其中  $Y_i = (r_{i+1} - r_i(1 - a\Delta t))/\Delta t$ ,  $W_i(t) = K_h(t - t_i) \left( \sum_{i=0}^{N-1} K_\lambda(t - t_i) \right)^{-1}$  是权重函数,  $\lambda$  是众所周知窗口,  $K_\lambda(s) = \lambda^{-1} K(s\lambda^{-1})$ ,  $K(\cdot)$  是核函数. 本文将选取高斯核函数, 即  $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ .

然而对于 ECIR-SV 模型, 为了保证短期利率  $r_t$  非负, 需满足 Feller 约束条件, 即  $2\theta(t) \geq h_t$ . 事实上, Cotton 等<sup>[18]</sup>也论述了, 如果 Feller 条件不满足, 那么  $r_t$  就没有强解, 因此需要应用具有约束条件下的核估计方法.

首先, 根据 Du 等<sup>[27]</sup>和 Hall 等<sup>[28]</sup>的研究, 式(14)改写为一般的形式

$$\theta_h(t) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i \hat{W}_i(t) Y_i, \quad (15)$$

其中  $\hat{W}_i(t) = NW(t)$  是权重函数<sup>1</sup>,  $p_i$  是定义在  $Y_i$  上的概率. 当不考虑约束条件时, 显然  $p_i = 1/N$ , 那么基于式(15)的估计  $\theta(t)$  为式(14). 如果存在一些  $i$  使得  $p_i \neq 1/N$ , 可得在约束条件下 Nadaraya-Watson 核函数估计.

由于  $p_i$  是概率, 因此需要满足  $0 \leq p_i \leq 1$  且  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . 根据 Du 等<sup>[27]</sup>的研究, 可以舍去前一个条件, 即  $p_i$  可取负的或正的数, 但要满足  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . 虽然需估计  $N$  个  $p_i$  的值, 但可把上述约束条件写成  $p_1 = 1 - \sum_{i=2}^N p_i$ , 因此只需估计  $p_2, p_3, \dots, p_N$ .

根据 Du 等<sup>[27]</sup>, 定义距离  $D(\mathbf{p})$  为

$$D(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_u)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_u), \quad (16)$$

其中  $\mathbf{p}_u = (1/N, 1/N, \dots, 1/N)^T$  和  $\mathbf{p}$  分别是  $N - 1$  维的列向量. 现在约束问题可化为求极小问题(16)的权重  $\mathbf{p}$  且满足  $2\theta(t) \geq h_t$ . 由于  $\ln h_t$  是不可观测的, 将使用相应  $\hat{V}_{i+1|i}$  近似.<sup>2</sup> 考虑到优化问题(16)计算量, 让  $\theta(t) > 0$  作为约束条件, 其次再估计其它参数时, 使用约束条件  $2\theta(t) \geq h_t$ . 一旦求出  $\mathbf{p}$  代入式(15)可得在约束条件下的  $\theta(t)$  值. 这就完成了对 ECIR-SV 模型的参数给出了估计方法.

综上所述, 相应的估计算法如下:

**步骤 1** 基于核估计方法通过最小化式(13)给出  $\Theta$  的估计;

**步骤 2** 求最大化式(11) 给出  $\omega$  估计;

**步骤 3** 重复步骤 1 和步骤 2 直到收敛.

注意在使用算法时, 需要回答两个主要的问题: 步骤 1 和步骤 2 是否相容; 步骤 2 的渐近性质. 显然根据 Härdle 等<sup>[26]</sup>的研究结果, 步骤 1 估计是相容的. 而步骤 2 的渐进性的性质可参考 Hamilton<sup>[24]</sup>. 结合 Thomas 等<sup>[30]</sup>的研究结果, 可以证明算法是收敛的.

对于 ECIR-SV 模型, 算法步骤 1 改求式(15)和式(16)优化问题给出  $\Theta$  的估计, 其他的步骤类似. 关于式(15)和式(16)相容性问题及渐近性可参考 Du 等<sup>[27]</sup>.

<sup>1</sup> 虽然 Hall 等<sup>[28]</sup>提出不同权重函数, 然而这些权重函数关于  $p_i$  是一个非线性问题, 从而无法使用标准的二次型现有的软件包, 如在 MATLAB 中 quadprog 函数. 事实上, 若使用非线性权重函数计算, 当  $N$  足够大时, 优化问题(16)数值计算速度非常慢. Du 等<sup>[27]</sup>也论述了若使用  $NW(t)$  作为权重函数, 即使  $N$  足够大, 但是由于是标准的二次型, 其数值计算的速度也非常快. 因此选择  $NW(t)$  权重函数.

<sup>2</sup> 一个合理的近似可能使用实际波动率. 如 Ait-Sahalia 等<sup>[29]</sup>的论述, 实际波动率为  $\int_t^{t+\Delta t} h_t r_t dt \approx (\Delta r_t - (\theta(t) - ar_t)\Delta t)^2$ . 通过初等运算可得, 若满足 Feller 条件, 则有  $(\theta(t)\Delta t - (r_t\Delta t + \Delta r_t + ar_t\Delta t))^2 \leq r_t\Delta t(r_t\Delta t + 2\Delta r_t + 2ar_t\Delta t)$ . 显然, 不等式右边有负的值产生, 因此本文将不使用实际波动率近似.

虽然 Härdle 等<sup>[26]</sup>已经给出了最优选择  $\lambda$  的计算方法. 然而对于本文的问题, Härdle 等<sup>[26]</sup>计算方法可能是不适应的, 因为根据式(13) 最优的窗口不一定是式(11) 的最优结果. 如极端情况下选择  $\lambda \rightarrow 0$ , 显然  $y_i \rightarrow \infty$ , 那么式(11)趋近于负的无穷大. 因此需要其他的标准来选择窗口. 这里将最大化式(11)作为标准来计算窗口. 对于  $\lambda$  的选取用线性搜索的方法给出.

### 4 实证结果

为了更好地统计分析, 本文将使用 3 月到期每周交易美国国债(T-Bill)数据近似短期利率<sup>3</sup>. 时间从 2000-01-03~2014-12-26, 总的数据为 781(数据来源于 <http://research.stlouisfed.org/>). 图 1 给出了短期利率和相应的  $\Delta r = r_i - r_{i-1}$  的图形.

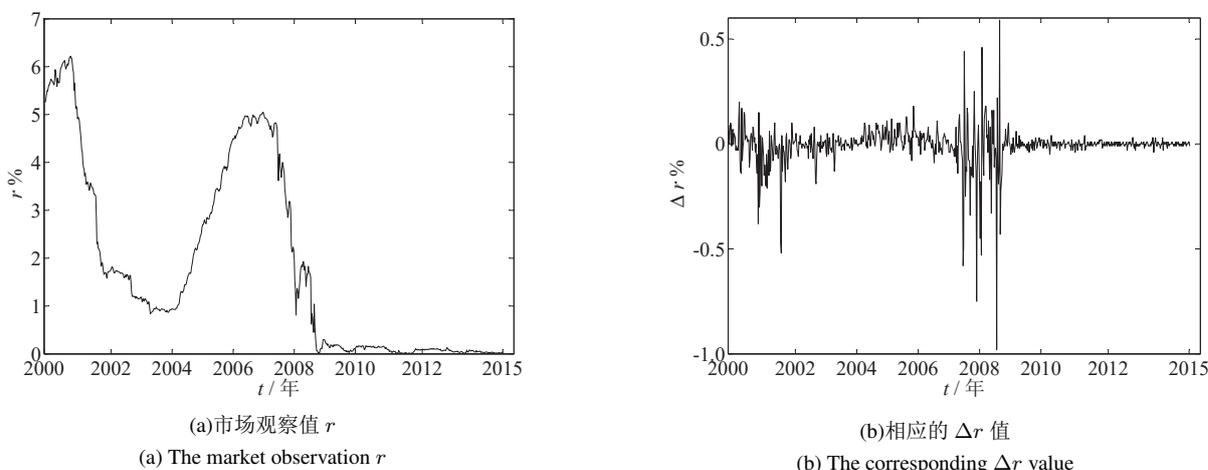


图 1 市场观察值  $r$  和相应的  $\Delta r$  值  
Fig. 1 The market observation  $r$  and corresponding  $\Delta r$  value

首先, 先测试是否对于均值约束条件是必要的. 图 2 给出不同窗口选取所对应的权重函数的权重  $p$  的估计值.

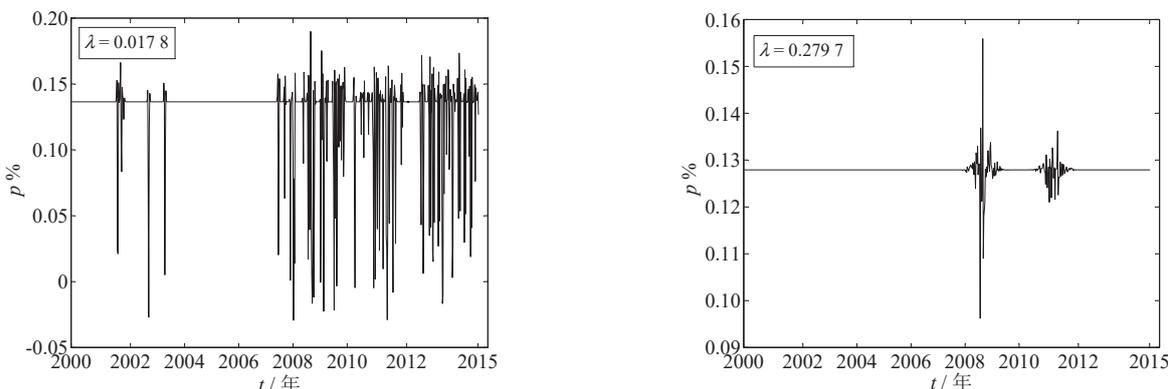


图 2 对于不同窗口  $\lambda$  选取所对应  $p$  的数值结果  
Fig. 2 The numerical results  $p$  for the different bandwidth  $\lambda$

观察图形可得, 显然存在一些  $p_i \neq 1/N$ . 这就说明了约束条件是有效的, 即不加约束条件下, 均值函数的估计值有负的值. 然而对于 ECIR-SV 模型而言, Feller 条件说明了均值函数一定是非负的. 因此考虑约束

<sup>3</sup> 由于对于我国国债每周交易频率的数据, 作者无法获得, 但是, 若能够获得该数据可直接应用本文方法也可以给出对于不同模型的参数估计和相应的统计检验. Ball 等<sup>[19]</sup> 和 Andersen 等<sup>[6]</sup> 也使用每周交易美国国债数据近似短期利率.

条件核估计是必要的. 另一方面, 观察图 2 可得, 当  $\lambda \rightarrow 0$  时,  $p_i$  呈现更大的变化, 隐含着  $\theta(t)$  可能有更多点取到负的值. 反之, 当窗口足够大时,  $\theta(t)$  有更少点是负的值.

由于本文主要分析均值对于随机波动率的影响, 因此模型的参数估计可分为两步骤进行估计. 第一步, 根据式(13)给出  $\theta(t)$  和  $a$  的估计; 第二步, 根据第一步估计的结果, 然后通过式(11) 估计其它参数.

表 2 给出了不同模型参数估计. 从表中数据可看出, 均值  $\theta/a = 0.0166$  非常接近样本均值  $0.0183$ . 因此可以说明均值在约束条件是可行的. 而在非约束条件下计算获得, 均值  $\theta/a < 0$  明显和样本均值大于零矛盾. 若考虑常数均值时, CEV-SV 模型弹性系数非常接近 0.5, 也就是 CIR-SV 模型的弹性系数. 事实上, 基于 Ball 等<sup>[9]</sup>的结果也发现, 他们所得弹性系数估计值为 0.6510 非常接近本文所得估计值为 0.6350, 这也足于说明估计方法是正确的. 整体上, 引入均值函数其似然值将被改善, 从而说明引入均值函数确实是必要的, 而且也发现, 当考虑均值函数时, 当  $0 < \gamma < 0.5$  时, ECEV-SV 模型的弹性系数趋近于零, 意味着模型和 EFV-SV 非常接近.

表 2 不同模型的参数估计  
Table 1 Parameters estimates for the different models

Model	$\lambda$	$\theta$	$a$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\eta$	$-\ln L$
FV-SV	—	0.032 2	1.944 9	0	0.076 0	-10.836	1.350 3	909.57
EFV-SV	6.693 9	—	1.132 0	0	0.878 4	-10.142	0.820 5	837.50
CIR-SV	—	0.032 2	1.944 9	0.5	0.317 8	-5.665 3	0.834 9	894.20
ECIR-SV	6.693 9	—	1.132 0	0.5	0.173 4	-4.970 9	1.147 1	849.83
BS-SV	—	0.032 2	1.944 9	1	0.530 9	-0.494 6	1.312 3	912.66
EBS-SV	6.693 9	—	1.132 0	1	0.114 8	0.199 8	2.005 7	877.62
CEV-SV <sup>1</sup>	—	0.032 2	1.944 9	0.635 0	0.896 5	-4.269 5	0.860 2	893.34
ECEV-SV <sup>1</sup>	6.693 9	—	1.132 0	0.500 0	0.647 7	-4.970 9	1.690 8	853.06
CEV-SV <sup>2</sup>	—	0.032 2	1.944 9	0.500 0	0.431 4	-5.665 3	0.791 1	894.47
ECEV-SV <sup>2</sup>	6.693 9	—	1.132 0	0.076 0	0.878 7	-9.355 4	0.803 8	836.29

注: 上标 1 表示弹性系数  $\gamma \geq 0.5$ ; 上标 2 表示弹性系数  $0 < \gamma < 0.5$ .

观察表 2 中第三列数据, 显然均值函数模型具有更强的持续现象, 归咎于一个低回归速率  $a$ . 事实上, 根据式(13)可得, 短期利率的衰减速率为  $1 - a\Delta t$ , 因此低的  $a$  值导致了衰减速率趋近 1. 因此当在时刻  $t$ , 短期利率  $r_t$  变化时, 对于在下一时刻  $t + \Delta t$ , 短期利率  $r_{t+\Delta t}$  的影响不是那么明显. 观察表中对于随机波动率均值的估计值, 当弹性系数较大时, 相应的估计值也变大, 这个归因于  $\beta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i^2 - \frac{2\gamma}{N} \sum_{i=1}^N \ln r_{i-1} + 1.27$ . 显然当  $\gamma$  大时, 因为  $\gamma$  的系数项是小于零, 因此  $\beta$  估计值也变大, 这就不难理解对于 EBS-SV 模型  $\beta$  估计值大于零.

#### 4.1 似然率测试

为了诊断模型的有效性, 使用似然率测试. 对于全参模型, 设  $L(\theta, h)$  和  $\tilde{L}(\theta, h)$  分别为无约束条件和有约束条件的对数极大似然值, 似然率为

$$LR = -2 \left( \tilde{L}(\theta, h) - L(\theta, h) \right) \sim \chi^2(v), \quad (17)$$

其中  $v$  是约束条件的个数.

通过式(17)的数值与相应的  $\chi^2$  分布的临界值比较, 可以判断是否拒绝给定的约束条件假设.

而对于具有时间变量系数的模型, 根据 Härdle 等<sup>[26]</sup>论述, 当窗口  $h \rightarrow \infty$  时,  $\theta(t) = \text{const}$  为常数. 而当  $h \neq \infty$  时相应的估计是一个函数. 因此可以给出下面的假设

$$H_0: \theta(t) = \text{const}, h = \infty; \quad H_1: \theta(t) \neq \text{const}, h \in [0, \infty).$$

虽然  $\theta(t)$  选取在一个无限维的函数空间中, 但是上面假设说明了这个选取仅依赖于窗口的两种状态, 即,  $h \rightarrow \infty$  或  $h \neq \infty$ , 因此似然率式(17)近似为自由度 1 的  $\chi^2$  分布.

表 3 给出不同模型之间的似然率和相应的统计检验. 这里将不给出模型和相应延拓模型的似然率, 如 FV-SV 和 EFV-SV 模型的似然率, 因为本文主要是分析 CEV 模型检验, 当然从表 2 中似然函数值可直接得出, 常数均值模型可能是错误的.

表 3 不同模型之间似然率 LR 估计值  
Table 1 Log-Likelihood ratio between the different models

	FV-SV	CIR-SV	BS-SV	CEV-SV <sup>1</sup>	CEV-SV <sup>2</sup>	EFV-SV	ECIR-SV	EBS-SV
CEV-SV <sup>1</sup>	32.468 7**	1.734 1	38.645 7**	—	—	—	—	—
CEV-SV <sup>2</sup>	30.196 0**	-0.538 5	36.373 0**	—	—	—	—	—
ECEV-SV <sup>1</sup>	—	—	—	80.554 8**	—	-31.111 6	-6.467 6	49.113 6**
ECEV-SV <sup>2</sup>	—	—	—	—	116.372 2**	2.433 2	27.077 2**	82.658 4**

注: 标有\*\*的数据表示似然比统计量在 5% 显著水平下拒绝约束条件下的模型, 即拒绝零假设.

从表 3 中的数据可得, 当考虑常数均值时, 无法区分 CEV-SV 模型和 CIR-SV 模型, 但是有理由拒绝 FV-SV 和 EBS-SV 模型. 这个结论和表 2 中的似然函数值相符. 结合表 2 中的数据, 事实上 CIR-SV 和 CEV-SV 模型弹性系数几乎是相同的, 因此无法区分这两个模型. 然而也发现它们之间还是有一些本质上的不同, 基于 CEV-SV 模型, 短期利率和随机波动率具有更少的持续现象, 归因于高的回归速率  $\alpha$  值. 根据 Fouque 等<sup>[31]</sup>论述(见该书的第 3 章), 具有高的回归速率值的标的物动态行为表现出更好的随机性, 因此归咎于该原因, 接受了 CEV-SV 的模型, 而不是 CIR-SV 模型.

当考虑均值函数时, 如果  $\gamma \geq 0.5$ , 此时应选择 EFV-SV 模型; 如果  $0 < \gamma < 0.5$  时, 可接受 EFV-SV 和 ECEV-SV 模型, 而拒绝 ECIR-SV 和 EBS-SV 模型. 事实上, 从表 2 中的数据可得, 对于 ECEV-SV 模型的弹性系数  $\gamma = 0.076 0$  值接近零, 因此它们的似然函数值也几乎相同.

#### 4.2 均值函数的估计

根据表 2 的数据结果, 为了简化说明, 设 ESV 表示模型中均值为函数, 而常数均值模型记做 CSV. 定义均方误差(RMSE)来判断拟合效果, 即

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta r_i - (\hat{\theta}_i - \hat{a}r_i)\Delta t)^2}, \tag{18}$$

其中  $\hat{\theta}_i, \hat{a}$  是通过最小化式(13) 估计获得. 定义残差  $RSS = \Delta y - (\theta(t) - ay_t)\Delta t$ .

根据式(13), 可知基于 ESV 和 CSV 模型所得的 RMSE 值稍微有点不同. 但从表 2 中可以看出, 引入均值函数明显地改变了模型的似然估计及参数估计值.

图 3 和图 4 分别给出了残差和相应的密度函数估计, 这里应用 MATLAB 中的 Ksdensity 函数估计密度函数.

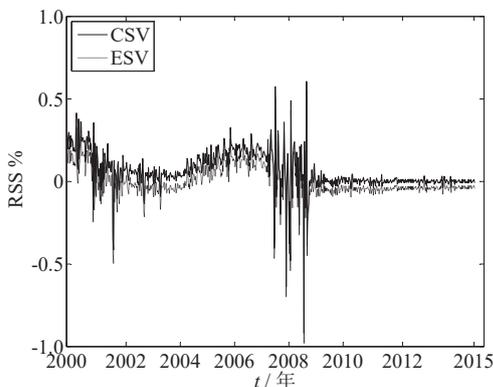


图 3 残差估计

Fig. 3 Residual error estimate

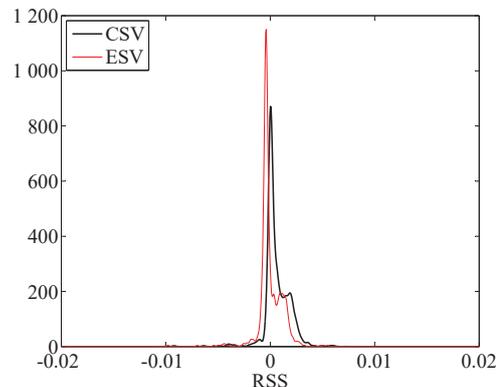


图 4 残差密度函数估计

Fig. 4 Residual density function estimation

从图3可看出,基于CSV模型所得残差绝对值几乎都高于ESV模型,这就表明引入均值函数确实提高了拟合的精度.观察图4,两个模型的残差都向右偏移,但是CSV模型偏移更加明显,同时也发现基于CSV模型最大残差值比ESV模型要小,这进一步说明对于CSV模型波动率可能高估了.因此有理由接受均值函数模型.

图5和图6分别表示拟合结果和相应均值函数 $\theta/a$ 的估计.

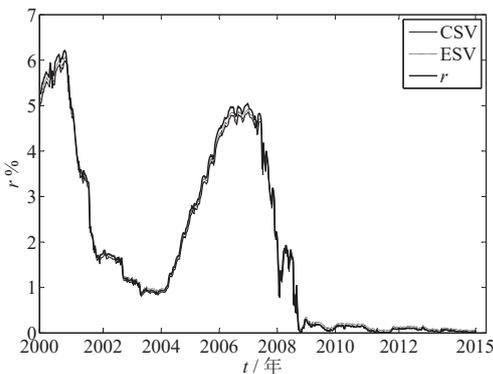


图5 比较估计结果

Fig. 5 Comparison of estimation results

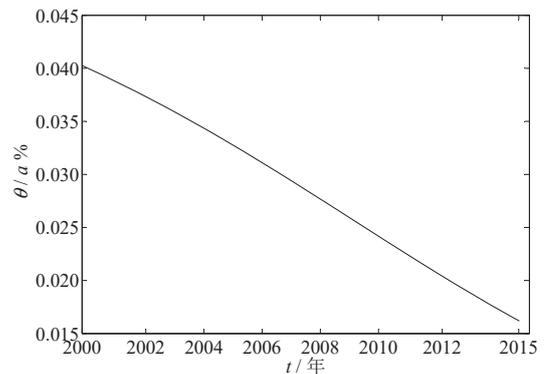


图6  $\theta/a$  的估计结果

Fig. 6 The estimated results of  $\theta/a$

观察图5,虽然整体上ESV模型和CSV模型拟合效果没有明显的差别,但是在2000年~2002年和2006年~2008年之间,ESV模型比CSV模型拟合效果稍微好一点.因此引入 $\theta(t)$ 还是会改善拟合的效果.观察图6, $\theta(t)$ 是递减函数,这个性质和Balduzzi等<sup>[32]</sup>结果是一样的<sup>4</sup>,因此有理由相信递减的趋势是正确的.从经济学角度上看,当时间越长时,短期利率变化不确定性越强,隐含着未来的短期利率波动越大,从而导致投资需要更多的风险补偿而不是更高的期望收益.

### 4.3 波动率估计

根据前面似然率测试结果,将考虑CIR-SV<sup>1</sup>,CEV-SV<sup>1</sup>,ECEV-SV<sup>1</sup>和ECEV-SV<sup>2</sup>模型的随机波动率估计,相应的预测估计通过式(7)和式(9)递归计算.

图7给出不同模型的波动率预测估计.从图形可看出,引入 $\theta(t)$ 将减少了波动率的估计值,归因于对式(13)估计所得残差较小.此外,在整体上随着时间增加波动率估计值也相应的增加,导致了短期利率未来的变化越不确定,因此投资者需要更大的风险补偿.

结合图1中 $\Delta r$ 的图形,ECEV-SV<sup>2</sup>模型所得波动率更好地描述其增量的变化.观察图1中 $\Delta r$ 变化可知,在2008年金融危机发生前后,短期利率增量出现大的变动,从而导致了在相应时间点上具有较高的波动率值.然而对于其它模型,高的波动率值发生在2012年左右.因此从这方面也说明了考虑ESV模型是有必要的.

## 5 零息债券和债券看涨期权定价

根据Chan等<sup>[7]</sup>和Hull等<sup>[12]</sup>研究结果可得,对于一些模型,即使在拟合效果上没有差异,但对短期利率比较敏感的衍生品定价就有显著的区别.而且Chan等<sup>[7]</sup>也通过其它经济指标来进一步说明模型之间的区别,如波动率预测.因此在这部分将给出不同模型对于债券和债券期权价格的影响.由于所考虑的模型是在风险中性测度下,因此参数的估计结果可直接用来定价衍生品<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>对于Balduzzi等<sup>[32]</sup>模型均值函数期望可得 $dE[\theta_t] = a(b - E[\theta_t])dt$ ,其中 $a, b$ 分别表示回归速率和相应的均值.显然当初值 $\theta_0 \geq b$ 时, $E\theta_t$ 是关于时间递减的函数.如果 $\theta_0 < b$ 时,在Balduzzi等<sup>[32]</sup>模型中均值就有可能产生负的值.因此初值 $\theta_0 \geq b$ 是均值大于零必要的条件.

<sup>5</sup>根据Pan<sup>[33]</sup>结果,式(1)可以写成为 $dr_t = (\theta(t) - \phi h_t r_t^{2\gamma} - ar_t)dt + \sqrt{h_t} r_t^\gamma dW_t^{1,*}$ ,其中 $W_t^{1,*}$ 表示风险中性测度下布朗运动, $\phi$ 是风险补偿因子系数.如果 $\phi = 0$ ,意味着风险补偿为零.在Chan等<sup>[7]</sup>文章中,他们也假设风险补偿因子为零.因此,可直接假设风险补偿因子为零.

首先, 考虑不同模型的债券价格定价公式, 即到期日为  $T$ , 债券价格  $P(0, T)$  为

$$P(0, T) = E \left[ e^{-\int_0^T r_t dt} \right]. \tag{19}$$

相应债券  $P(0, T)$  到期时间为  $\tau$  年, 敲定价格为  $K$  的看涨期权为

$$C(0, \tau) = E \left[ e^{-\int_0^\tau r_t dt} \max(0, P(\tau, T) - K) \right]. \tag{20}$$

虽然对 FV-SV 模型具有显示解的表达式, 但是为了方便和比较, 将使用蒙特卡洛方法对于不同模型估计式(19)和式(20)衍生品价格. 为了减少方差偏误, 应用对偶技巧方法模拟<sup>[34]</sup>. 考虑到文章篇幅问题, 省略式(19)和式(20)的蒙特卡洛数值计算方法. 事实上, 该方法可以直接从文献[34]中获得. 在数值计算过程中, 抽取 1000 个样本点, 债券价格到期日时间定在  $T = 1, 2, 3, 5, 7, 10$  年上. 由于本文主要目的不是短期利率衍生品定价, 因此为了简化, 仅考虑到期日为 10 年的债券, 以及相应的 2 年期的看涨期权. 在所有的计算中设债券面值为 100. 考虑前面似然率测试, 不考虑 BS-SV 和 EBS-SV 模型的衍生品定价.

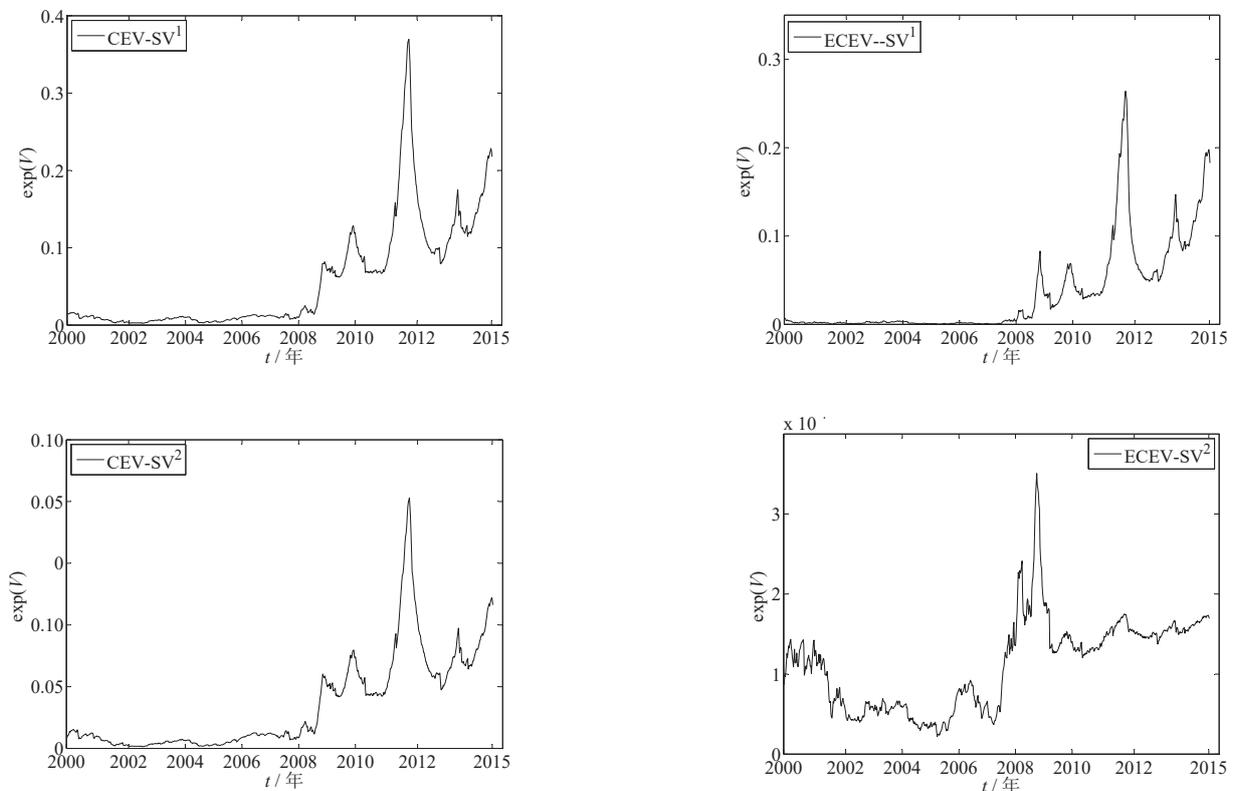


图 7 不同模型的波动率预测估计

Fig. 7 Volatility forecast estimates for different models

表 4 给出不同模型的债券价格. 从表 4 中的数据可以看出, 当考虑 CSV 模型时, 所得债券价格几乎是等同的. 然而引入均值函数, 债券价格有明显的不同. 此外对于 ESV 模型, 所有模型对于债券价格影响都很小. 这些现象主要归因于债券价格对于短期利率不是很敏感. 如 Dungey 等<sup>[35]</sup>也说明了这种现象, 而且他们也说明了引入跳对于一些短期利率不太敏感的衍生品其定价也是没有明显的不同. 然而, 比较 CSV 模型和 ESV 模型所得债券价格, 显然其数值结果有着明显不同, 从而说明均值函数在很大程度上改变了短期利率动态变化.

表 5 给出不同敲定价格的债券期权定价. 观察表 5 中的数据, 显然引入均值函数债券期权价格改变了非常大, 同时也发现不同系数模型所得的债券期权价格变化不大. 然而基于均值函数的模型, 它们之间还是有本质上的区别. 如在敲定价格为 80 时, ECEV-SV<sup>1</sup> 的价格为 0.160 2 而 ECEV-SV<sup>2</sup> 模型价格为零. 因此均

值函数将会改变对于比较敏感的衍生品价格. 从而说明了引入均值函数不仅改善了似然率估计值, 而且对于衍生品的价格也产生影响.

表4 不同模型的债券价格

Table 4 Bond prices for different models

$T$	1	2	3	5	7	10
FV-SV	96.484 2	94.650 9	93.064 2	90.010 8	87.099 9	82.926 0
EFV-SV	94.886 3	90.744 7	87.017 4	80.232 8	74.087 8	65.877 0
CIR-SV	96.483 6	94.645 6	93.056 4	90.022 5	87.093 4	82.885 9
ECIR-SV	94.887 0	90.769 0	87.067 8	80.300 5	74.289 9	66.202 8
CEV-SV <sup>1</sup>	96.486 1	94.651 1	93.069 6	90.031 6	87.099 7	82.888 1
ECEV-SV <sup>1</sup>	94.888 5	90.780 6	87.069 0	80.310 3	74.205 7	66.016 6
CEV-SV <sup>2</sup>	96.482 1	94.644 7	93.061 4	90.015 7	87.089 3	82.874 3
ECEV-SV <sup>2</sup>	94.887 7	90.750 2	87.026 3	80.249 9	74.109 0	65.893 1

表5 不同模型的债券期权价格

Table 5 Pricing bond option from the different model

$K$	FV-SV	EFV-SV	CIR-SV	ECIR-SV	CEV-SV <sup>1</sup>	ECEV-SV <sup>1</sup>	CEV-SV <sup>2</sup>	ECEV-SV <sup>2</sup>
70	16.585 4	2.318 3	16.610 1	3.415 2	16.597 9	3.113 2	16.579 8	2.338 8
75	11.879 9	0.013 7	11.861 0	0.876 3	11.865 3	0.750 7	11.847 5	0.023 7
80	7.165 5	0.000 0	7.128 8	0.279 5	7.132 6	0.160 2	7.115 1	0.000 0

## 6 结束语

本文构建了 ECEV-SV 模型, 以至于一些经典的模型能够嵌入其中. 基于 3 个月到期的短期利率数据, 比较这些模型的拟合效果. 实证结果表明了引入均值函数改善了似然率估计值, 同时也减少了随机波动率的估计. 即使在似然率测试下, 一些模型没有明显的差异, 然而 ECEV-SV 模型更好地解释随机波动率期限结构(见图 7). 此外, 均值函数对利率衍生品的价格影响也比较大, 特别是对利率比较敏感的衍生品价格均值函数的冲击更加显著. 因此, 作为将来研究方向, 希望考虑基于截面数据对于均值函数的估计及它对于随机波动率的影响.

### 参考文献:

- [1] 范龙振, 程南雁. 一类均值为跳跃-均值回复过程的利率模型. 系统工程学报, 2011, 26(3): 298-305.  
Fan L Z, Cheng N Y. Interest rate model with jump-mean reverting stochastic mean. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(3): 298-305. (in Chinese)
- [2] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177-188.
- [3] Cox J, Ingersoll J, Ross S. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 1985, 53(2): 385-407.
- [4] Hull J, White A. Pricing interest-rate-derivative securities. The Review of Financial Studies, 1990, 3(4): 573-392.
- [5] Fong G H, Vasicek O A. Fixed-income volatility management. Journal of Portfolio Management, 1991, 7(4): 41-46.
- [6] Andersen T G, Lund J. Estimating continuous-time stochastic volatility methods of the short term interest rate. Journal of Econometrics, 1997, 77(2): 343-377.
- [7] Chan K R, Karolyi G A, Longstaff F, et al. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. Journal of Finance, 1992, 47(3): 1209-1228.
- [8] Durham G B. Likelihood-based specification analysis of continuous-time models of the short-term interest rate. Journal of Financial Economics, 2003, 70(3): 463-487.
- [9] 郑挺国, 刘金全. 随机波动和跳跃下的短期利率动态. 系统工程理论与实践, 2012, 32(11): 2372-2380.  
Zheng T G, Liu J Q. Short rate dynamics with stochastic volatilities and jumps. System Engineering: Theory & Practice, 2012, 32(11): 2372-2380. (in Chinese)

- [10] Li H, Zhao F. Unspanned stochastic volatility: Evidence from hedging interest rate derivatives. *The Journal of Finance*, 2006, 61(1): 341–378.
- [11] Andersen T G, Benzoni L. Do bonds span volatility risk in the U.S. treasury market: A specification test for affine term structure models. *Journal of Finance*, 2010, 65(2): 603–653.
- [12] Hull J, White A. One-factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1993, 28(2): 235–254.
- [13] Chiarella C, Kwon O K. Classes of interest rate models under the HJM framework. *Asia-Pacific Financial Markets*, 2001, 8(1): 1–22.
- [14] Valchev S. Stochastic volatility Gaussian Heath-Jarrow-Morton models. *Applied Mathematical Finance*, 2004, 11(4): 347–368.
- [15] Filipović D, Trolle A B. The term structure of interbank risk. *Journal of Financial Economics*, 2013, 109(3): 707–733.
- [16] Maghsoodi Y. Solutions of the extended CIR term structure and bond option valuation. *Mathematical Finance*, 1996, 6(1): 89–109.
- [17] Brennan M J, Schwartz E S. Analysing convertible bonds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1980, 15(4): 907–929.
- [18] Cotton P, Fouque J P, Papanicolaou G, et al. Stochastic volatility corrections for interest rate derivatives. *Mathematical Finance*, 2004, 14(2): 173–200.
- [19] Ball C A, Torous W N. The stochastic volatility of short-term interest rates: Some international evidence. *The Journal of Finance*, 1999, 54(6): 2339–2359.
- [20] Liu Z, Peng Q, Schellhorn H. A bond option pricing formula in the extended CIR model, with an application to stochastic volatility. <http://arxiv.org/pdf/1312.3661v2.pdf>
- [21] Duham G S. Monte Carlo method for estimating, smoothing, and filtering one and two-factor, stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, 2006, 133(1): 273–305.
- [22] 席燕辉, 彭 辉. 迭代扩展卡尔曼辅助粒子滤波及算法性能分析. *系统工程学报*, 2012, 27(5): 593–599.  
Xi Y H, Peng H. Iterated extended Kalman auxiliary particle filter and analysis of algorithm' performance. *Journal of Systems Engineering*, 2012, 27(5): 593–599. (in Chinese)
- [23] Jacquier E, Polson N, Rossi P. Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1994, 12(4): 371–417.
- [24] Hamilton J D. *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1994.
- [25] Ruiz E. Quasi-maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. *Journal of Econometric*, 1994, 63(1): 289–306.
- [26] Härdle W, Müller M, Sperlich S, et al. *Nonparametric and Semiparametric Models an Introduction*. Berlin: Springer, 2004.
- [27] Du P, Parmeter C, Racine J S. Nonparametric kernel regression with multiple predictors and multiple shape constraints. *Statistica Sinica*, 2013, 23(3): 1343–1372.
- [28] Hall P, Huang H. Nonparametric kernel regression subject to monotonicity constraints. *The Annals of Statistics*, 2001, 29(3): 624–647.
- [29] Aït-Sahalia Y, Jacod J. *High-Frequency Financial Econometrics*. Princeton: Princeton University Press, 2014.
- [30] Thomas A S, Wong W H. Profile likelihood and conditionally parametric models. *The Annals of Statistics*, 1992, 20(4): 1768–1802.
- [31] Fouque J P, Papanicolaou G, Sircar K R. *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. New York: Cambridge University Press, 2000.
- [32] Balduzzi P, Das S, Foresi S. The central tendency: A second factor in bond yield. *Review of Economics and Statistics*, 1998, 80(1): 62–72.
- [33] Pan J. The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study. *Journal of Financial Economics*, 2002, 63(1): 3–50.
- [34] Glasserman P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer Verlag, 2003.
- [35] Dungey M, McKenzie M, Smith L V. Empirical evidence on jumps in the term structure of the US Treasury market. *Journal of Empirical Finance*, 2009, 16(3): 430–445.

### 作者简介:

江 良(1978—), 男, 福建莆田人, 博士, 副教授, 研究方向: 金融计算, Email: ptjliang@163.com;  
林鸿熙(1969—), 男, 福建莆田人, 硕士, 教授, 研究方向: 演化博弈论, Email: linhongxi@163.com;  
宋丽平(1979—), 女, 福建莆田人, 博士, 副教授, 研究方向: 金融数学, Email: lipingsong@126.com.