

# 考虑后悔厌恶的私募股权基金投资组合优化模型

胡支军<sup>1,2</sup>, 贺 阳<sup>1</sup>

(1. 贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025;  
2. 贵州省公共大数据重点实验室, 贵州 贵阳 550025)

**摘要:** 在经典的 Merton 连续时间资产组合框架内引入非流动性的私募股权基金, 探讨流动性约束对投资组合配置的影响. 假设投资者具有终端投资组合财富的后悔厌恶型效用函数, 通过求解动态承诺与投资组合优化问题, 给出了投资者如何最优的向私募股权基金承诺资本, 以及如何在股票和债券之间进行最优的动态再调整. 通过数值模拟比较分析了后悔厌恶型投资者和 CRRA 型投资者的最优投资组合策略的变化情况. 结果发现, 由于私募股权基金非流动性的影响, 后悔厌恶型投资者对私募股权基金的承诺比率低于 CRRA 型投资者的承诺比率, 从而获得较低的投资组合财富.

**关键词:** 私募股权基金; 资产配置; 后悔厌恶; 承诺策略; 非流动性

中图分类号: F830; O221

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2018)03-0365-13

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2018.03.008

## Portfolio optimization with private equity funds considering regret aversion

Hu Zhijun<sup>1,2</sup>, He Yang<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China;

2. Guizhou Provincial Key Laboratory of Public Big Data, Guiyang 550025, China)

**Abstract:** This paper incorporates an illiquid private equity fund into the framework of Merton's classic theory on continuous time portfolio selection, to explore the impacts of illiquidity on the restricted investor's optimal portfolio allocations. Assuming an investor derives regret aversion utility from terminal portfolio wealth, the paper solves for a dynamic commitment and portfolio strategy that shows investors how to optimally commit capital to private equity fund and how to optimally rebalance between liquid stock and bonds over time. Furthermore, the optimal portfolio strategies of regret averse investors and CRRA investors are analyzed and compared. The numerical analysis demonstrates that, as a consequence from illiquidity, regret averse investors' commitment rate to private equity funds are lower than that of CRRA investors, and thus the regret averse investors get lower terminal portfolio wealth than the CRRA investors.

**Key words:** private equity funds; asset allocation; regret aversion; commitment strategy; illiquidity

## 1 引言

私募股权(private equity, PE)投资, 是指以非公开的方式向少数机构投资者或个人募集资金, 对未上市企业进行权益性投资, 通过被投资企业上市或转让退出, 获得高额资本回报的一种投资方式. PE 基金投资

收稿日期: 2016-11-14; 修订日期: 2017-11-07.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71361003); 贵州省教育厅人文社科规划资助项目(13S5D005).

与对公开证券市场投资的主要区别在于,它以放弃资本的流动性来换取追求长期投资的更高收益为特点.在过去的十几年间,私募股权投资在全球范围内获得了高速的发展.据普华永道2017年3月发布的一项报告显示,2016年,在人民币募资金额大幅增加的推动下,中国私募股权及风险投资基金募资创历史新高,达725.1亿美元.同时,2006年至2016年期间,中国大陆及香港市场总共募集资金超过5320亿美元,在亚洲私募股权/风险投资基金中依旧保持主导地位.

发展PE投资,对一个国家或地区的经济增长、技术创新与劳动就业都具有明显的正面促进效应.然而,尽管PE基金作为一种资产类别已经起到越来越重要的作用,但是目前学术界关于如何将PE基金纳入整体投资组合的研究工作还相当有限.

PE基金的三个特点使得相应的投资组合优化模型变得复杂<sup>[1]</sup>.首先,PE基金是非流动性投资,通常不能在其整个生命周期内(通常为10到14年)出售<sup>[2]</sup>.这种非流动性是由于缺乏一个成熟的二级市场,以及对出售PE基金的合同限制.其次,PE基金的股权不能像普通股票和债券那样可以立即购买.投资者首先做出一个初始资本承诺,并在随后的时间里,作为对资本募集的回应,转移特定数量的资金给普通合伙人.第三,PE基金的现金分红不能再投资于基金,而这些支出是重要的,因为基金的生命周期是有限的.这三个特点导致投资者不能直接控制他们对PE基金的投资组合权重,而只能选择对PE基金的新承诺的规模,这将在某些滞后时间间接的影响未来的投资组合权重<sup>[1]</sup>.这与现有的许多投资组合优化模型中研究的情况大不相同,在这些模型中,投资者可以动态地再调整其投资组合中所有资产的权重.

近年来,具有非流动性资产的投资组合问题引起了学术界的重视.Cumming等<sup>[3]</sup>给出了一个新的PE基准指数,讨论了新的指数如何改进包含PE基金的投资组合业绩,但该模型没有考虑PE基金投资的非流动性特征.Longstaff<sup>[4]</sup>在一个具有异质代理人的多资产交易经济中研究了市场非流动性对资产定价模型的影响.Ang等<sup>[5]</sup>给出了具有流动性资产和非流动性资产的投资组合选择模型,发现非流动性风险将导致递增的和状态依赖的风险厌恶并且减少对流动和非流动风险资产的配置.Sorensen等<sup>[6]</sup>通过求解具有风险厌恶的有限合伙人投资于由一个普通合伙人管理的PE基金的资产组合选择问题,给出了对PE基金投资的动态评价模型.Liu等<sup>[7]</sup>利用实物期权模型研究了非流动性和报酬结构对PE投资决策的影响,发现高度非流动性可能加速或延迟投资决策,管理费或提成费将导致对PE的低投资.但是,这些文献都是在经典的CRRA或HARA效用框架下研究投资者的最优投资决策问题.

在现实投资环境,投资者在投资前会对不同市场状态下各风险资产的价值进行预估,他们的判断与决策过程通常会受到认知、情绪等各种心理因素的影响,会表现出“有限理性”行为.后悔理论认为<sup>[8-10]</sup>,决策者在决策过程中会将自已考虑选择方案的结果与其他方案可能获得的结果进行比较,如果发现选择其他方案可以获得更好的结果,那么决策者会感到后悔,反之则会感到欣喜.文献[11]指出,后悔理论在应用上比展望理论更具有优势.因此,在包含PE基金的投资决策中,如何考虑投资者的后悔厌恶行为偏好,选择令投资者感到最为满意的一个或多个PE基金,是一个值得关注的问题,具有重要的理论价值和现实意义.

已有不少学者应用后悔理论研究只包括流动性资产的投资组合问题.例如,Michenaudc等<sup>[12]</sup>应用后悔理论导出了最优货币对冲决策的封闭解;Mulaudzi等<sup>[13]</sup>研究了具有后悔厌恶偏好的银行对贷款和国库卷的最优配置问题;Egozcue等<sup>[14]</sup>分析了一个后悔厌恶型投资者对两个流动性风险资产的最优投资选择问题,并对后悔厌恶投资者与风险厌恶投资者的投资行为进行了比较.目前,还尚未有文献在后悔理论框架下研究具有非流动性PE基金资产类的连续时间投资组合优化问题.

随着金融市场的迅速变化,投资者通常需要根据市场环境的变化不断调整投资策略,因此,连续时间投资组合问题成为学术界广为关注的研究领域.本文的主要贡献是:1)在经典的Merton投资组合模型<sup>[15]</sup>框架内,引入非流动的PE基金,并考虑具有后悔厌恶行为的投资组合问题,给出了投资者的动态资本承诺策略,以及如何在流动性股票和债券之间最优地进行再调整;2)比较分析了不同偏好假设下的最优投资组合策略.以往的文献几乎都只考虑单一的CRRA或HARA效用函数<sup>[16]</sup>,本文则同时选取CRRA和后悔厌恶两种效用函数,研究不同行为偏好对投资组合配置的影响.研究发现:后悔厌恶型投资者对PE基金的资本承诺比率低于CRRA型投资者的承诺比率,会以更谨慎的态度对待PE基金.此外,当股票与PE基金收益

的相关性水平由正变为负时, 后悔厌恶型投资者和 CRRA 型投资者对 PE 基金的承诺比率均由低到高逐渐增加.

## 2 经济环境与市场模型

### 2.1 经济环境

假设一个具有无限期投资机会的机构投资者(有限合伙人), 可以投资三种类型的资产: 无风险债券  $B$ , 公开上市的股票  $S$ , 非流动的 PE 基金  $F$ . 无风险债券和股票代表经典 Merton 模型<sup>[15]</sup> 中的标准投资机会.

无风险债券(或货币市场基金)的价格过程  $B_t$  满足

$$dB_t = rB_t dt, \quad (1)$$

其中  $r$  表示连续复利无风险利率. 为了简便,  $r$  假设为一常数.

流动性股票的动态价格  $S_t$  服从如下几何布朗运动

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_{S,t}, \quad (2)$$

其中  $\mu_S (\mu_S > r > 0)$  表示股票的预期收益率,  $\sigma_S$  表示股票收益的波动率,  $W_{S,t}$  是标准布朗运动. 这里为了简化起见, 假定股票不支付红利<sup>[17]</sup>. 注意到, 如果股票支付红利, 下面的分析也是同样成立的.

进一步, 借鉴文献[18]对非流动性风险资产价格过程的建模方法, 假定 PE 基金的收益与股票的收益之间具有线性相关性, 本文采用如下的几何布朗运动来描述 PE 基金的价值动态演化过程

$$\frac{dF_t}{F_t} = (\mu_F - \gamma) dt + \sigma_F \rho dW_{S,t} + \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t}, \quad (3)$$

其中  $\mu_F (\mu_F > 0)$  表示 PE 基金的连续复利预期收益率,  $\gamma > 0$  表示 PE 基金支付的连续资本分配率,  $\sigma_F$  表示 PE 基金收益率的标准差,  $W_{F,t}$  是与  $W_{S,t}$  独立的标准布朗运动,  $\rho$  表示 PE 基金收益与股票收益之间的线性相关系数 ( $|\rho| \leq 1$ ).

需要指出的是, 本文假定 PE 基金的资本分配率  $\gamma$  为常数, 实际上, 也可以考虑  $\gamma$  随时间确定性地或随机变化的情形. 特别地, 若取  $\gamma = 0$ , 则式(3)即为文献[5, 6]中给出的非流动性 PE 基金的价格过程.

### 2.2 承诺资本的动态过程

由于缺乏成熟的二级市场, 以及对出售 PE 基金的合同限制, PE 基金在终止时间  $T$  之前实际上是没有交易的. PE 基金的这个非流动性特征有两个主要的含义, 1) PE 基金的股份不能像股票或债券那样可以在二级市场即时购买. 相反, 作为有限合伙人(LP)的投资者首先作出一个资本承诺, 然后, 在后续的时间里, 作为对资本募集的回应将投入特定数量的资金给基金(也称为资本提取). 这些资金承诺是不可逆的, 而且, 通常在资金承诺给基金的时间和资金实际被基金提取用于投资的时间之间有很大的滞后; 2) PE 基金的现金分红(也称为资本分配)不能立即再投资于基金, 同时, 这些现金分红是很重要的, 因为 PE 基金的生命周期是有限的<sup>[19]</sup>.

基于上述原因, 投资者不能像经典 Merton 投资组合模型中那样, 可以动态地选择持有 PE 基金的比例, 而只能随着时间的推移, 选择他们对基金的新的资本承诺数量. 考虑到 PE 投资的这个特殊性, 本文假设投资者从其总投资组合  $P_t$  的当前值中按一定的比例连续的承诺资金给 PE 基金. 若记  $C_t$  为投资者在  $t$  时刻未被提取的承诺资金, 则有

$$dC_t = P_t v_t dt - C_t \delta dt, \quad (4)$$

式(4)中的第一项( $P_t v_t dt$ )表示在  $t$  时刻投资者从其总投资组合  $P_t$  中以比率  $v_t$  连续的做出资本承诺. 参数  $v_t$  是投资者的承诺比率, 也是模型的第一个决策变量. 需要指出的是  $v_t$  是严格非负的, 因为对 PE 基金做出的资本承诺是不可逆的. 式(4)中第二项( $-C_t \delta dt$ )反映了承诺资本是逐渐地被提取并投资于 PE 基金的事实, 这里假设 PE 基金是以某个固定的非负比率  $\delta$  从剩余的未被提取的承诺资本  $C_t$  中进行资金提取. 参

数  $\delta$  反映了市场中 PE 基金的(平均)提取比例, 在模型中是一个不能由投资者控制的外生变量.

### 2.3 投资组合的动态过程

为了定义投资组合的动态过程, 假设承诺资本  $C_t$  在实际被 PE 基金提取之前, 可以投资于股票和债券, 并且 PE 基金的资本分红可以被再投资于股票和债券. 令  $L_t$  表示在时刻  $t$  投资于股票和债券的流动财富, 并假定投资者将流动财富  $L_t$  的  $\pi_t^S$  比例投入股票, 而将  $1 - \pi_t^S$  的比例投入债券. 同时, 令  $I_t$  表示在时刻  $t$  投资于 PE 基金的非流动财富.

上面的假设生成一个  $L_t$  和  $I_t$  的资金循环流, 可以由下面的方程组描述

$$dL_t = L_t \pi_t^S \left( \frac{dS_t}{S_t} \right) + L_t (1 - \pi_t^S) \left( \frac{dB_t}{B_t} \right) - C_t \delta dt + I_t \gamma dt, \quad (5)$$

$$dI_t = I_t \left( \frac{dF_t}{F_t} \right) + C_t \delta dt. \quad (6)$$

注意到  $\pi_t^S$  是模型的第二个决策变量, 这是因为股票和债券都被假设为流动资产, 投资者可以随着时间的变化, 动态地调整流动财富  $L_t$  中投资于股票的比例. 方程(5)和方程(6)表明由于投资者为了满足资本募集的要求而必须卖出股票和债券, 从而资金提取( $C_t \delta dt$ )将减少投资组合的价值  $L_t$ , 而增加投资组合的价值  $I_t$ . 另一方面, PE 基金的资本分配( $I_t \gamma dt$ )由于假定可以被再投资于股票和债券, 因此它减少投资组合中非流动资产的价值  $I_t$ , 而增加流动资产的价值  $L_t$ .

将式(1), 式(2)和式(3)中的  $\frac{dB_t}{B_t}$ ,  $\frac{dS_t}{S_t}$  以及  $\frac{dF_t}{F_t}$  代入到方程(5)和方程(6)中, 可得

$$dL_t = L_t (r dt + \pi_t^S (\mu_S - r) dt + \pi_t^S \sigma_S dW_{S,t}) - C_t \delta dt + I_t \gamma dt, \quad (7)$$

$$dI_t = I_t ((\mu_F - \gamma) dt + \sigma_F \rho dW_{S,t} + \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t}) + C_t \delta dt, \quad (8)$$

根据式(7)和式(8), 即可给出投资者的总投资组合  $P_t = L_t + I_t$  的价值动态方程

$$\begin{aligned} dP_t &= dL_t + dI_t \\ &= L_t (r dt + \pi_t^S (\mu_S - r) dt + \pi_t^S \sigma_S dW_{S,t}) + I_t (\mu_F dt + \sigma_F \rho dW_{S,t} + \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t}). \end{aligned} \quad (9)$$

## 3 考虑后悔厌恶的行为投资组合优化

### 3.1 后悔厌恶型投资者的投资组合决策问题

考虑一个有限理性的、基于后悔厌恶行为的投资组合决策问题. 投资者的目标是最大化某个终端时刻  $T$  的期末财富  $P_T$  对应的期望效用. 具体地, 投资者的决策问题是寻求最优投资比例  $\hat{\pi}^S(t)$  和资本承诺策略  $\hat{v}(t)$ , 使得下列目标函数达到最大, 即

$$\text{Max}_{v, \pi^S} E [U(P_T) - kg(U(P_T^{\text{max}}) - U(P_T))], \quad (10)$$

满足如下动态过程

$$dP_t = L_t (r dt + \pi_t^S (\mu_S - r) dt + \pi_t^S \sigma_S dW_{S,t}) + I_t (\mu_F dt + \sigma_F \rho dW_{S,t} + \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t}), \quad (11)$$

$$dC_t = P_t v_t dt - C_t \delta dt, \quad (12)$$

和约束条件

$$P_0 = L_0 = p_0, I_0 = 0, C_0 = 0, \quad (13)$$

$$v_t \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (14)$$

其中效用函数  $U(p) = p^\alpha / \alpha$ ,  $\alpha < 1$ ,  $\alpha \neq 0$  且  $1 - \alpha$  为投资者的相对风险厌恶系数.  $g(\cdot)$  是一个严格单调增加的凸函数, 反映了投资者的后悔厌恶行为<sup>[8,9]</sup>,  $k > 0$  表示投资者的后悔厌恶程度.

当  $k = 0$  时, 模型(10)的目标函数即为传统的 CRRA 效用. 由于  $g(\cdot)$  是严格单调增加的凸函数, 本文选取后悔函数为  $g(x) = x^\theta/\theta$ , 且  $\theta > 1$ .

模型(10)中  $P_t^{\max}$  为事后最优的投资组合水平. 投资者事后会比较三种资产的收益率, 若在  $t-1$  时刻投资者将财富全部投入到收益率最高的资产, 则投资者可得到  $t$  时刻最优的投资组合收益水平, 即

$$P_t^{\max} = P_{t-\Delta t} \max \left( \frac{B_t}{B_{t-\Delta t}}, \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}, \frac{F_t}{F_{t-\Delta t}} \right),$$

从而, 投资者的决策问题转化为寻求最优投资比例  $\hat{\pi}^S(t)$  和资本承诺策略  $\hat{v}(t)$ , 使得

$$\text{Max}_{v, \pi^S} E \left[ P_T^\alpha / \alpha - k((P_T^{\max})^\alpha / \alpha - P_T^\alpha / \alpha)^\theta / \theta \right], \quad (15)$$

满足动态过程和约束条件式(11)~式(14).

问题(11)是一个跨期投资组合问题, 这类问题也称为随机最优控制问题. 投资组合财富过程  $P_t$  称为状态过程(或状态变量), 资本承诺比率  $v(t)$  和股票投资比例  $\pi^S(t)$  称为控制过程, 条件  $v_t \geq 0$  是一个控制约束, 以确保对 PE 基金的资本承诺是严格非负的.

### 3.2 求解投资组合优化问题

求解连续时间投资组合问题的经典方法是由 Merton<sup>[15]</sup>提出的随机动态规划, 或者由 Cox 等<sup>[20]</sup>提出的鞅方法. 遗憾的是, 这些方法并不能直接用于求解最优控制问题(15)的解析解. 一般来说, 动态投资组合选择问题仅在投资者的偏好与资产收益动态过程的某些特殊参数化情形才可以获得解析解.

随机模拟技术也可以用于给出动态投资组合问题的数值解. 例如, Kraft 等<sup>[21]</sup>应用 Monte Carlo 模拟求解连续时间生命周期最优住房、消费与投资决策问题. 由于本文的目的是对包含 PE 基金的动态投资组合问题给出一个容易实施的求解策略, 借鉴文献[1]的思路, 本文采用不同于文献[18-21]的方法求解最优控制问题(15).

首先, 假定投资者可以连续地交易三种资产. 在时刻  $t$ , 记  $w_{Bt}$  表示投资于无风险债券的比例,  $w_{St}$  表示投资于风险股票的比例,  $w_{It}$  表示投资于 PE 基金的比例. 在可以连续再调整的假设下, 则问题(15)退化为投资者通过动态地选择三种资产的投资比例最大化期末财富的期望效用.

若记  $W(P_T) = P_T^\alpha / \alpha - k((P_T^{\max})^\alpha - P_T^\alpha) / (\alpha^\theta \theta)$ , 应用 Merton<sup>[15]</sup>的随机动态规划方法, 可以求得优化问题(15)的最优解由下式给出

$$\begin{cases} (\hat{w}_S, \hat{w}_I) = -\frac{1}{P_T} \frac{\partial W}{\partial P_T} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial P_T^2} \right)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})^T (\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T)^{-1}, \\ \hat{w}_B = 1 - \hat{w}_S - \hat{w}_I, \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{其中 } \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_S \\ \mu_F \end{pmatrix}, \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_S & 0 \\ \rho\sigma_F & \sigma_F \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}.$$

记  $(P_T^{\max})^\alpha / \alpha - P_T^\alpha / \alpha = A$ , 经计算可得

$$-\frac{1}{P_T} \frac{\partial W}{\partial P_T} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial P_T^2} \right)^{-1} = \frac{1 + kA^{\theta-1}}{1 - \alpha + kA^{\theta-1}(1 - \alpha) + kA^{\theta-2}(\theta - 1)P_T^\alpha},$$

经过化简有

$$\hat{w}_S = -\left( \frac{\partial^2 W}{\partial P_T^2} \right)^{-1} \frac{\partial W}{\partial P_T} \frac{(\mu_S - r)\sigma_F - \rho(\mu_F - r)\sigma_S}{P_T(1 - \rho^2)\sigma_S^2\sigma_F}, \quad (17)$$

$$\hat{w}_I = -\left( \frac{\partial^2 W}{\partial P_T^2} \right)^{-1} \frac{\partial W}{\partial P_T} \frac{(\mu_F - r)\sigma_S - \rho(\mu_S - r)\sigma_F}{P_T(1 - \rho^2)\sigma_S\sigma_F^2}. \quad (18)$$

因此, 若给出参数  $r, \mu_S, \mu_F, \rho, \sigma_S, \sigma_F, k, \theta$  以及  $\alpha$  的具体数值, 便可以求出相应的最优投资比例  $\hat{w}_S$ ,

$\hat{w}_I$  以及  $\hat{w}_B$ . 从式(17)和式(18)的化简结果不难发现最优投资权重并不依赖于时间  $t$ , 这意味着最优投资策略是不断地再调整投资组合, 使得三种资产的投资比例保持不变.

然而, 由于 PE 基金的非流动性, 投资者并不能动态地选择投资比例  $w_I$ , 因此不可能对投资组合的头寸不断的进行再调整, 以使得对三种资产的投资比例不随时间发生变化. 为解决这一问题, 假定投资者采用一种短视的投资组合法则, 试图使投资比例尽可能地接近忽略非流动性影响所获得的最优比例  $\hat{w}_S, \hat{w}_I$  和  $\hat{w}_B$ . 下面通过两个步骤来推导出最优投资策略.

首先, 由于投资者可以连续地调整持有股票和债券的流动性财富, 通过式(16)定义流动财富中持有股票的最优比例为

$$\hat{\pi}^S = \frac{\hat{w}_S}{\hat{w}_S + \hat{w}_B} = \frac{\hat{w}_S}{\hat{w}_L}. \quad (19)$$

式(19)意味着投资者将其流动性财富  $L_t$  以固定的比例  $\hat{\pi}^S$  投资于股票, 而将剩余的  $1 - \hat{\pi}^S$  比例投资于无风险债券.

其次, 为了获得最优承诺策略  $\hat{v}_t$ , 试图让总投资组合财富中投资于流动性资产的比例  $w_{L_t} = L_t / (L_t + I_t)$  尽可能地逼近于  $\hat{w}_L = \hat{w}_S + \hat{w}_B$ . 由于  $w_{I_t} = 1 - w_{L_t}$ , 此时投资组合中投资于 PE 基金的比例  $w_{I_t} = I_t / (L_t + I_t)$  也将逼近于  $\hat{w}_I$ . 为此, 记变量  $c_t$  表示在时刻  $t$  的总投资组合财富中承诺投资于 PE 基金的资金比例, 即  $c_t \equiv C_t / (L_t + I_t)$ , 从而可以应用 Ito 引理求出  $w_{L_t}$  的动态过程. 根据附录 A 的推导过程, 可得到下面的随机微分方程

$$dw_{L_t} = (-c_t \delta + w_{I_t} \gamma + w_{L_t} w_{I_t} (\Delta \mu - w_{L_t} \Delta \sigma_S^2 + w_{I_t} \Delta \sigma_F^2)) dt - w_{L_t} w_{I_t} \left( \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t} + (\rho \sigma_F - \hat{\pi}^S \sigma_S) dW_{S,t} \right), \quad (20)$$

其中  $\Delta \mu = \hat{\pi}^S (\mu_S - r) - (\mu_F - r)$ ,  $\Delta \sigma_S^2 = \hat{\pi}^S (\hat{\pi}^S \sigma_S^2 - \rho \sigma_S \sigma_F)$ ,  $\Delta \sigma_F^2 = \sigma_F^2 - \hat{\pi}^S \rho \sigma_S \sigma_F$ .

方程(20)表明投资组合比例  $w_{L_t}$  随着时间的变化而随机地发生变化. 投资者可以通过改变对 PE 基金的比例承诺  $c_t$  来部分地影响  $w_{L_t}$  的动态过程. 假设投资者以  $\Delta t$  的频率做出新的资本承诺, 类似于文献[1]的思路, 本文采用条件最小二乘法(CLS)<sup>[22]</sup>来确定对 PE 基金的最优比例承诺  $c_t$ . 该方法的基本思想是, 投资者的最优策略是选择  $t$  时刻的比例承诺  $c_t$ , 使得目标投资比例  $\hat{w}_L$  与  $n$  个未来离散时间点  $t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots, t + n\Delta t (\Delta t > 0)$  上的流动资产投资比例在  $t$  时刻的条件期望的误差平方和最小. 即求解下面的最优化问题

$$\text{Min}_{c_t} \sum_{i=1}^n (\hat{w}_L - E_t [w_{L_{t+i\Delta t}}])^2. \quad (21)$$

该目标函数考虑了在  $t$  时刻的承诺资金不仅会影响在  $t + \Delta t$  时刻投资于流动资产的比例, 同时也会影响在未来的离散时间点  $t + 2\Delta t, t + 3\Delta t, \dots, t + n\Delta t$  对流动资产的投资比例.

根据附录 B, 求解优化问题(21)可以得到最优比例承诺为

$$\hat{c}_t = \frac{3(w_{L_t} - \hat{w}_L) / ((2n + 1)\Delta t) + w_{I_t} \gamma + w_{L_t} w_{I_t} (\Delta \mu - w_{L_t} \Delta \sigma_S^2 + w_{I_t} \Delta \sigma_F^2)}{\delta}. \quad (22)$$

最后, 利用这个结果便可以求出最优承诺比率  $\hat{v}_t$ . 对附录 A 中方程(30)给出的  $c_t$  的动态过程应用离散时间 Euler 近似法, 即可得到对 PE 基金的最优比例承诺  $\hat{c}_t$  与最优承诺比率  $\hat{v}_t$  满足

$$\hat{c}_t = \hat{v}_t \Delta t + c_{t-\Delta t} (1 - \delta \Delta t - R_{t-\Delta t, t}^P \Delta t), \quad (23)$$

其中  $R_{t-\Delta t, t}^P \Delta t$  表示在  $t - \Delta t$  时刻到  $t$  时刻投资组合总价值  $P$  的年度化收益率.

由方程(23)即可求出年度化的最优承诺比率为

$$\hat{v}_t = \max \left\{ \frac{\hat{c}_t - c_{t-\Delta t} (1 - \delta \Delta t - R_{t-\Delta t, t}^P \Delta t)}{\Delta t}, 0 \right\}. \quad (24)$$

这里取最大值是为了保证在任意时刻  $t$  的最优承诺比率  $\hat{c}_t$  不能为负数.

由于  $c_{t-\Delta t}(1 - \delta\Delta t - R_{t-\Delta t,t}^P\Delta t)$  是投资者在时刻  $t$  做出新的承诺之前尚剩余的比例承诺资本, 方程(24)可以解释为, 如果投资者的剩余比例承诺资本低于最优水平  $\hat{c}_t$ , 则其将对 PE 基金做出新的承诺, 而如果剩余比例承诺资本超过了最优水平  $\hat{c}_t$ , 就不会做出新的承诺.

上面的推导给出了一个容易实施的动态投资与承诺策略, 即投资者可以根据式(19)对流动性股票和债券以及根据式(24)对 PE 基金的承诺资本之间进行最优的资本再调整.

此外, 将式(22)代入投资组合权重的动态过程式(20), 可以得到下面的随机微分方程

$$dw_{L_t} = \kappa(\hat{w}_L - w_{L_t})dt - w_{L_t}w_{I_t} \left( \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t} + (\rho\sigma_F - \hat{\pi}^S \sigma_S) dW_{S,t} \right), \quad (25)$$

其中  $\kappa = 3/((2n+1)\Delta t)$ . 对  $\kappa, \hat{w}_L > 0$ .

过程(25)给出了  $w_{L_t}$  的均值-回复性质. 参数  $\kappa$  控制投资比例  $w_{L_t}$  回复到其长期目标权重  $\hat{w}_L$  的速度,  $\sigma_S$  与  $\sigma_F$  是该过程的波动参数.

## 4 数值模拟

在本节中, 将通过数值模拟验证投资组合模型的合理性. 首先, 假定股票和 PE 基金具有相同的收益-风险特征, 对由式(19)给出的流动性资产投资比例和由式(24)所给出的 PE 基金动态承诺策略进行数值模拟, 考察当股票和 PE 基金的收益具有不同的相关性水平时, 后悔厌恶型投资者和 CRRA 型投资者的最优投资组合策略与期望财富的变化情况. 其次, 考察当股票和 PE 基金具有不同的收益-风险特征时, 两种不同偏好类型的投资者的最优投资组合策略与期望财富的动态变化过程.

### 4.1 参数选取

借鉴文献[1,5]的方法, 本文选取参数使得对非流动性 PE 基金的投资可以解释为对 PE 的细分市场如并购(buyout)与风险投资基金(VC)进行分散化投资, 而对股票的投资则解释为对股票市场指数的投资.

首先, 根据文献[23-25]的研究, 本文假设可交易的风险股票与流通受限的 PE 基金具有相同的收益率和波动参数, 并根据 Ang 等<sup>[5]</sup>的估计结果, 选取如下参数  $\mu_S = \mu_F = 0.12$ ,  $\sigma_S = \sigma_F = 0.15$ . 这种参数取值方法的一个优点是它可以将非流动性对投资组合的影响与可能是由于两种风险资产具有不同的 Sharpe 比而获得的结果区分开来. 然后, 再考察当股票和 PE 基金具有不同的 Sharpe 比时投资组合策略的变化情况.

借鉴文献[1]的研究结果, 选取资金提取比率  $\delta$  和现金分红比率  $\gamma$  的参数值分别为  $\delta = 0.52$ ,  $\gamma = 0.22$ . 类似于文献[1, 5]的参数取值方法, 在 CRRA 情形, 令相对风险厌恶系数为  $1 - \alpha = 6$ , 同时, 取无风险利率为  $r = 0.04$ .

进一步, 假设投资期限为 10 年且  $\Delta t = 0.25$ ,  $n = 12$ . 即假设投资者在每个季度会对 PE 基金做出新的资本承诺, 并且当决定最优承诺比率时, 考虑这些承诺资金对接下来的 12 个季度的投资组合权重的影响. 此外, 假设投资者的后悔厌恶参数  $k = 5$ , 且  $\theta = 2$ .

### 4.2 投资组合权重的动态过程

假设  $I_0 = 0$ ,  $C_0 = 0$ , 且设风险股票与 PE 基金的收益率相关系数  $\rho = 0.6$ , 即假设两种风险资产的收益率具有较高的相关性, 下面的图 1 给出了后悔厌恶型投资者对流动资产(股票和债券)与非流动资产(PE 基金)的平均投资权重的动态变化过程, 其中实线表示平均的资产投资权重, 虚线之间的区域表示 95% 的置信区间. 以下结果是通过 Monte Carlo 模拟迭代 10 000 次生成的, Monte Carlo 模拟的详细过程可参见附录 C.

与只包括股票和债券的 Merton 投资组合问题不同的是, 当非流动的 PE 基金增加到投资组合中时, 一个主要的结果是对所有资产的投资权重变为随机的, 并且会随时间的变化而大幅变动. 由于不可能对 PE 基金的投资进行连续的调整, 因此, 投资者每季度对流动资产和非流动资产的投资权重都在一定范围内波动.

为了考察当股票的收益率与 PE 基金的收益率不相关或为负相关时, 投资组合权重的变化情况, 下面的

图2和图3分别给出了取 $\rho = 0$ 和 $\rho = -0.2$ 时,后悔厌恶型投资者对流动资产(股票和债券)与PE基金的平均投资权重的动态变化过程.类似地,以下结果也是通过Monte Carlo模拟迭代10000次生成的.

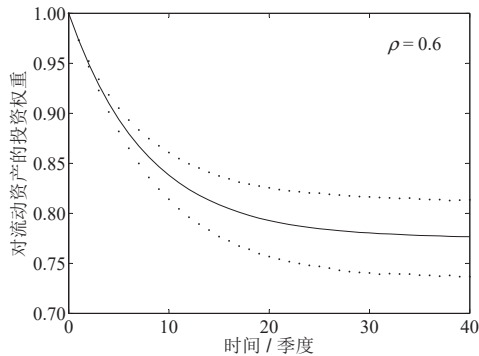


图 1a 流动资产的平均权重( $\rho = 0.6$ )

Fig.1a Average weight of liquid assets( $\rho = 0.6$ )

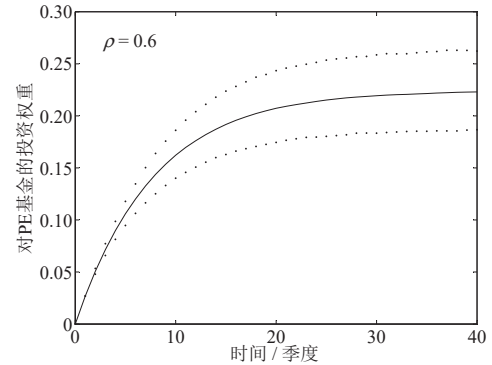


图 1b PE基金的平均权重( $\rho = 0.6$ )

Fig.1b Average weight of PE fund( $\rho = 0.6$ )

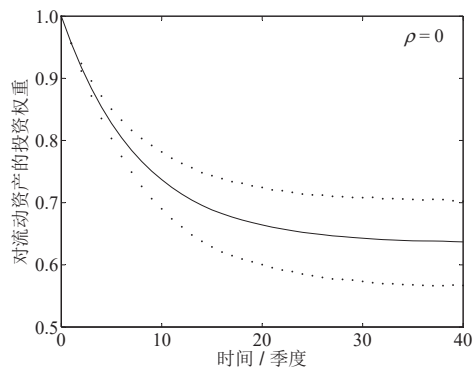


图 2a 流动资产的平均权重( $\rho = 0$ )

Fig. 2a Average weight of liquid assets( $\rho = 0$ )

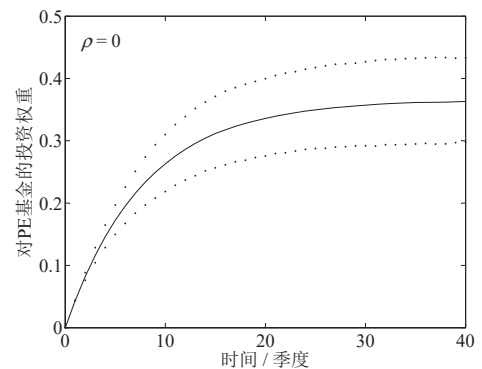


图 2b PE基金的平均权重( $\rho = 0$ )

Fig. 2b Average weight of PE fund( $\rho = 0$ )

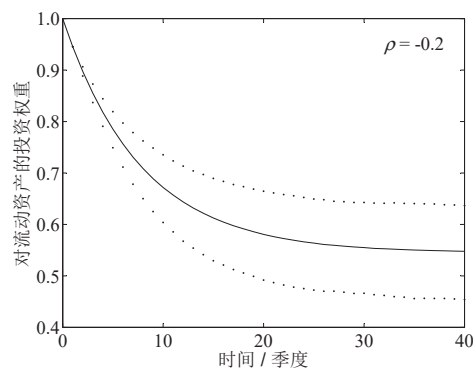


图 3a 流动资产的平均权重( $\rho = -0.2$ )

Fig. 3a Average weight of liquid assets( $\rho = -0.2$ )

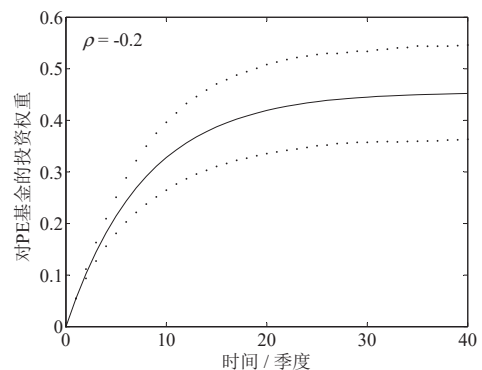


图 3b PE基金的平均权重( $\rho = -0.2$ )

Fig.3b Average weight of PE fund( $\rho = -0.2$ )

对比图1与图2,图3,可以发现,当股票收益和PE基金收益的相关性由正变为负时,后悔厌恶型投资者投资于股票和债券的平均比例逐渐降低,而对PE基金的平均投资比例则逐渐增加.这表明,相对于 $\rho$ 为非负的情形,当 $\rho < 0$ 时,后悔厌恶型投资者会更加偏好对PE基金的投资.

#### 4.3 最优承诺策略

下面的图4,图5和图6分别给出了当股票收益率与PE基金收益率的相关系数为0.6,0,-0.2时,后悔



厌恶型投资者与 CRRA 型投资者对 PE 基金的最优承诺比率  $v_t$  的动态变化过程, 其中实线表示平均承诺比率  $v_t$ , 虚线之间的区域表示 95% 置信区间。

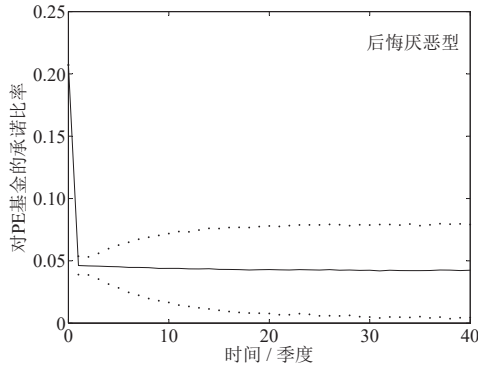


图 4a 后悔厌恶型承诺比率的动态变化( $\rho = 0.6$ )

Fig. 4a Dynamic change of regret aversion type commitment rate( $\rho = 0.6$ )

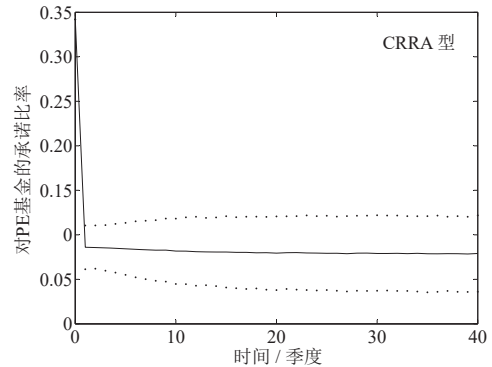


图 4b CRRA 型承诺比率的动态变化( $\rho = 0.6$ )

Fig. 4b Dynamic change of CRRA type commitment rate ( $\rho = 0.6$ )

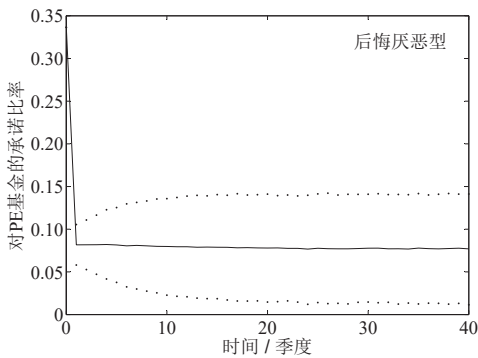


图 5a 后悔厌恶型承诺比率的动态变化( $\rho = 0$ )

Fig. 5a Dynamic change of regret aversion type commitment rate( $\rho = 0$ )

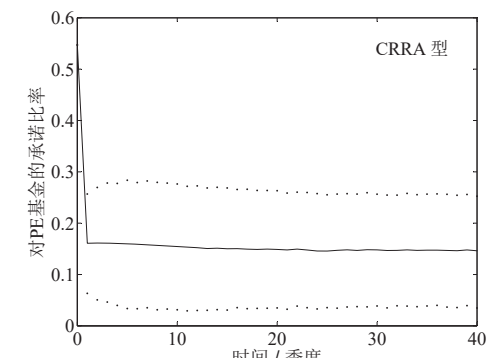


图 5b CRRA 型承诺比率的动态变化( $\rho = 0$ )

Fig. 5b Dynamic change of CRRA type commitment rate( $\rho = 0$ )

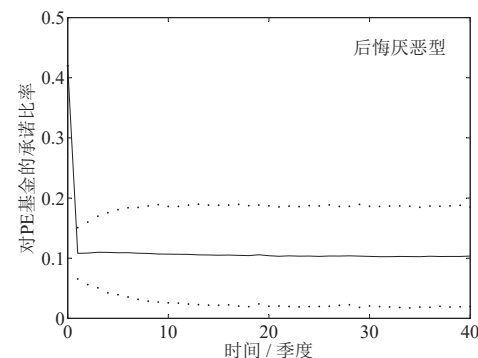


图 6a 后悔厌恶型承诺比率的动态变化( $\rho = -0.2$ )

Fig. 6a Dynamic change of regret aversion type commitment rate( $\rho = -0.2$ )

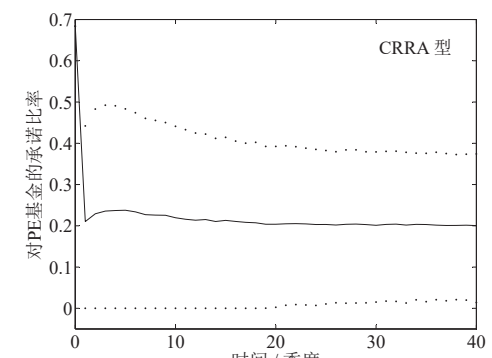


图 6b CRRA 型承诺比率的动态变化( $\rho = -0.2$ )

Fig. 6b Dynamic change of CRRA type commitment rate( $\rho = -0.2$ )

#### 4.4 投资组合财富的变化

不失一般性, 设  $P_0 = 1$ , 下面的图 7 给出了后悔厌恶型投资者与 CRRA 型投资者的最优投资组合所对

应的累积期望财富  $P_t$  的动态变化过程。

从图 7 可发现, 1) 后悔厌恶型投资者的最优投资组合所获得的终端财富低于 CRRA 型投资者的最优投资组合所获得的终端财富; 2) 当股票与 PE 基金的收益率相关性由正变为负时, 两种类型的投资者的最优投资组合所获得的累积期末财富也都由低到高逐渐增加。

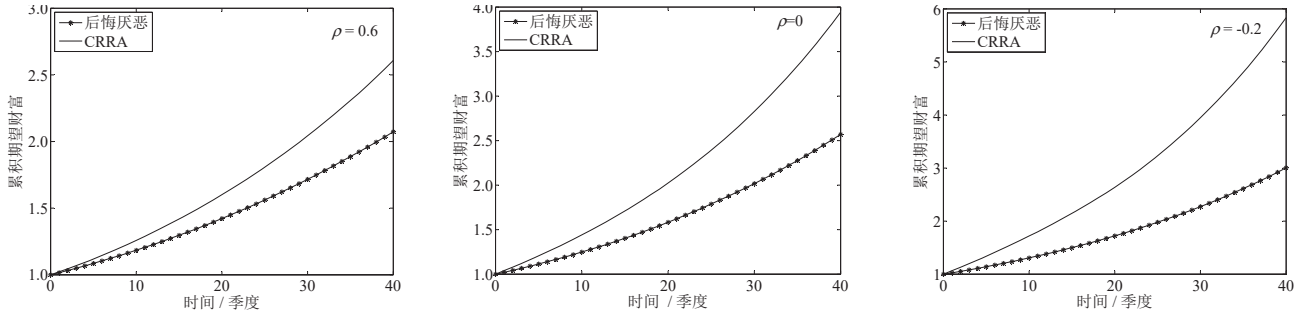


图 7 累积财富动态( $\rho = 0.6, 0, -0.2$ )

Fig. 7 Accumulated wealth dynamics( $\rho = 0.6, 0, -0.2$ )

#### 4.5 不同收益-风险特征的影响

为进一步考察当股票和 PE 基金具有不同的收益-风险特征时, 最优投资组合策略的动态变化, 参照文献[1]的方法, 取  $\mu_F = 0.2 > \mu_s = 0.12$ , 这意味着 PE 基金的 Sharpe 比是股票的 Sharpe 比的两倍. 下面的图 8 给出了后悔厌恶型投资者和 CRRA 型投资者对 PE 基金的最优承诺比率的动态变化过程. 从图 8 不难看出, 对不同的相关系数  $\rho$ , 后悔厌恶型投资者对 PE 基金的资本承诺比率均低于 CRRA 型投资者对 PE 基金的资本承诺比率。

此外, 对  $\mu_F = 0.2, \mu_s = 0.12$ , 经计算发现, 当股票和 PE 基金的收益率相关性分别为 0.6, 0 和 -0.2 时, 后悔厌恶型投资者所获得的期末财富均低于 CRRA 型投资者所获得的期末财富, 与 4.4 节的结论相似, 这里就不再给出详细的结果。

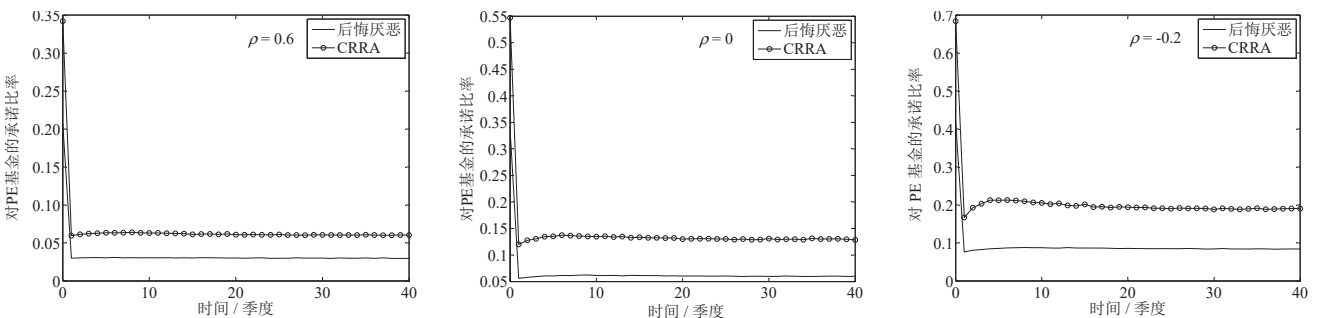


图 8 承诺比率动态( $\rho = 0.6, 0, -0.2$ )

Fig. 8 Commitment rate dynamics( $\rho = 0.6, 0, -0.2$ )

## 5 结束语

借鉴行为经济学的后悔厌恶理论, 在经典的 Merton 投资组合框架基础上, 建立了同时考虑具有非流动性的 PE 基金和投资者后悔厌恶心理的三资产连续时间投资组合优化模型. 本文通过提供一个动态承诺策略, 给出了考虑 PE 基金的这些特殊特征的求解方案. 模型的求解结果使我们可以直接考察 PE 基金的非流

动性和投资者的后悔厌恶心理对最优资产配置与投资组合财富的影响,对当前关于PE基金的收益和风险特征的持续讨论具有重要的意义.此外,本文的求解方法也可以进一步推广到其他的具有资本承诺和期中资本分配的非流动性资产类,例如特殊的房地产、基础设施基金等<sup>[1,5]</sup>.

本文只考虑了投资者的投资组合决策问题,由于实际中投资者不仅要进行投资决策,还要做出消费决策.因此,分别从传统CRRA型和后悔厌恶型投资者的视角出发,构建同时考虑投资与消费的连续时间动态投资组合模型,并设计有效的全局优化算法将是值得继续深入研究的问题.另外,本文假定PE基金的价值过程服从几何布朗运动,一个自然的推广是通过在PE基金的价值动态方程中加入跳跃或随机波动,使PE基金的收益率分布偏离正态分布,然而这通常只能以牺牲容易处理的解析解作为代价.

### 参考文献:

- [1] Buchner A. Portfolio Optimization with Private Equity Funds. Passau: University of Passau, 2014.
- [2] Lerner J, Schoar A M. The illiquidity puzzle: Theory and evidence from private equity. *Journal of Financial Economics*, 2004, 72(1): 3–40.
- [3] Cumming A, Helge H, Schweizer D. Private equity benchmarks and portfolio optimization. *Journal of Banking and Finance*, 2013, 37(9): 3515–3528.
- [4] Longstaff F A. Portfolio claustrophobia: Asset pricing in markets with illiquid assets. *American Economic Review*, 2009, 99(4): 1119–1144.
- [5] Ang A, Papanikolaou D, Westerfield M. Portfolio choice with illiquid assets. *Management Science*, 2014, 60(11): 2737–2761.
- [6] Sorensen M, Wang N, Yang J Q. Valuing private equity. *Review of Financial Studies*, 2014, 27(7): 1977–2021.
- [7] Liu Y, Yang J Q. Optimal investment of private equity. *Finance Research Letters*, 2015, 14(1): 76–86.
- [8] Bell D E. Regret in decision making under uncertainty. *Operations Research*, 1982, 30(5): 961–981.
- [9] Loomes G, Sugden R. Regret theory: An alternative theory of rational choice under uncertainty. *The Economic Journal*, 1982, 92(368): 805–824.
- [10] 梁 霞, 姜艳萍. 考虑后悔行为的具有二元期望的随机多属性决策方法. *系统工程学报*, 2015, 30(6): 719–727.  
Liang X, Jiang Y P. Method of stochastic multi-attribute decision making with 2-tuple aspirations considering regret behavior. *Journal of System Engineering*, 2015, 30(6): 719–727. (in Chinese)
- [11] Laciana C E, Weber E U. Correcting expected utility for comparisons between alternative outcomes: A unified parameterization of regret and disappointment. *Journal of Risk and Uncertainty*, 2008, 36(1): 1–17.
- [12] Michenaud S, Solnik B. Applying regret theory to investment choices: Currency hedging decisions. *Journal of International Money and Finance*, 2008, 27(5): 677–694.
- [13] Mulaudzi M P, Petersen M A, Schoeman I M. Optimal allocation between bank loans and treasuries. *Optimization Letters*, 2008, 2(4): 555–566.
- [14] Egozcue M J. Gains from diversification: A regret theory approach. *Economics Bulletin*, 2012, 32(1): 204–219.
- [15] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 1971, 3(4): 373–413.
- [16] 彭 涓, 靳玉英, 杨金强. 基于过度外推的最优投资与消费策略. *管理科学学报*, 2017, 20(3): 56–62.  
Peng J, Jin Y Y, Yang J Q. Optimal investment and consumption based on over-extrapolation. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(3): 56–62. (in Chinese)
- [17] 王慷新, 荣喜民. 保险公司和再保险公司的最优投资策略. *系统工程学报*, 2017, 32(2): 207–217.  
Wang S X, Rong X M. Optimal investment strategy for both insurer and reinsurer. *Journal of Systems Engineering*, 2017, 32(2): 207–217. (in Chinese).
- [18] Bordag L A, Yamshchikov I P, Zhelezov D. Optimal allocation-consumption problem for a portfolio with an illiquid asset. *International Journal of Computer Mathematics*, 2016, 93(5): 1–12.
- [19] Buchner A. Portfolio dynamics under illiquidit. *The Journal of Risk Finance*, 2016, 17(4): 405–427.
- [20] Cox J C, Huang C F. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 1989, 49(1): 33–83.
- [21] Kraft H, Munk C. Optimal housing, consumption, and investment decisions over the life cycle. *Management Science*, 2011, 57(6): 1025–1041.

- [22] Klimko L A, Nelson P I. On conditional least squares estimation for stochastic processes. *The Annals of Statistics*, 1978, 6(3): 629–642.
- [23] Kaplan S N, Schoar A. Private equity performance: Returns, persistence and capital flows. *Journal of Finance*, 2005, 60(4): 1791–1823.
- [24] Phalippou L, Gottschalg O. The performance of private equity funds. *Review of Financial Studies*, 2009, 22(4): 1747–1776.
- [25] Harris R S, Jenkinson T, Kaplan S N. Private equity performance: What do we know. *Journal of Finance*, 2014, 69(5): 1851–1882.

### 作者简介:

胡支军 (1975—), 男, 贵州人, 博士, 教授, 研究方向: 金融优化, 行为金融等, Email: zjhu@gzu.edu.cn;

贺 阳 (1987—), 男, 四川人, 硕士, 研究方向: 金融优化, 行为金融等, Email: yanghe2013@163.com.

### 附录 A 模型求解与 Monte Carlo 模拟算法

#### A.1 推导求解投资组合比例 $w_{L,t}$ 和 $w_{I,t}$ 的动态过程

定义  $\mathbf{X} = (L, I)^T$ ,  $d\mathbf{X} = (dL, dI)^T$ ,  $F(\mathbf{X}) = \frac{I}{L+I} \equiv w_I$ , 由于  $dw_I \equiv dF(\mathbf{X})$ , 根据 Itô 引理有

$$dw_I = -\frac{I}{P^2}dL + \frac{L}{P^2}dI + \frac{I}{P^3}dL^2 - \frac{L}{P^3}dI^2 - \frac{L-I}{P^3}dLdI, \quad (26)$$

将式(7)和式(8)代入式(26), 经过化简后可得

$$dw_{I,t} = \left( c_t \delta - w_{I,t} \gamma - w_{L,t} w_{I,t} (\Delta \mu - w_{L,t} \Delta \sigma_S^2 + w_{I,t} \Delta \sigma_F^2) \right) dt + w_{L,t} w_{I,t} \left( \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t} + (\sigma_F \rho - \hat{\pi}^S \sigma_S) dW_{S,t} \right), \quad (27)$$

其中  $\Delta \mu = \hat{\pi}^S (\mu_S - r) - (\mu_F - r)$ ,  $\Delta \sigma_S^2 = \hat{\pi}^S (\hat{\pi}^S \sigma_S^2 - \sigma_S \sigma_F \rho)$ ,  $\Delta \sigma_F^2 = \sigma_F^2 - \hat{\pi}^S \sigma_S \sigma_F \rho$ . 变量  $c_t$  是  $t$  时刻总投资组合财富中投入到 PE 基金的比例, 即  $c_t \equiv C_t / (I_t + L_t)$ .

可以使用类似的方法求出  $w_{L,t}$  的动态过程

$$dw_{L,t} = \left( -c_t \delta + w_{I,t} \gamma + w_{L,t} w_{I,t} (\Delta \mu - w_{L,t} \Delta \sigma_S^2 + w_{I,t} \Delta \sigma_F^2) \right) dt - w_{L,t} w_{I,t} \left( \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t} + (\sigma_F \rho - \hat{\pi}^S \sigma_S) dW_{S,t} \right), \quad (28)$$

由于  $w_{L,t} + w_{I,t} = 1$ , 便可以直接推出  $dw_{L,t} = -dw_{I,t}$ .

#### A.2 推导求解对 PE 基金的投资比例 $c_t$

定义  $\mathbf{X} = (L, I, C)^T$ ,  $d\mathbf{X} = (dL, dI, dC)^T$ ,  $G(\mathbf{X}) = \frac{C}{L+I} \equiv c$ , 以及  $dc \equiv dG(\mathbf{X})$ , 根据全微分公式, 可得

$$dc = -\frac{C}{P^2}dL - \frac{C}{P^2}dI + \frac{1}{P}dC, \quad (29)$$

将式(4)中的  $dC_t$ , 式(7)中的  $dL_t$  和式(8)中的  $dI_t$  代入到方程(29)中, 经过化简可得

$$\begin{aligned} dc_t &= v_t dt - c_t \delta dt - c_t (w_{L,t} (rdt + \hat{\pi}^S (\mu_S - r) dt) + \hat{\pi}^S \sigma_S dW_{S,t}) + w_{I,t} (\mu_F dt + \sigma_F \rho dW_{S,t} + \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t}) \\ &= v_t dt - c_t \delta dt - c_t R_t^P dt, \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $R_t^P$  表示总投资组合  $P$  在  $t$  时刻的年度化瞬时回报率, 也即

$$R_t^P dt = w_{L,t} (rdt + \hat{\pi}^S (\mu_S - r) dt) + \hat{\pi}^S \sigma_S dW_{S,t} + w_{I,t} (\mu_F dt + \sigma_F \rho dW_{S,t} + \sigma_F \sqrt{1 - \rho^2} dW_{F,t}).$$

### 附录 B 推导求解最优资本承诺比率 $v_t$

首先, 通过求解下面的优化问题给出投资者对 PE 基金的最优投资比例  $\hat{c}_t$ , 即

$$\text{Min}_{c_t} \sum_{i=1}^n (\hat{w}_L - E_t[w_{L,t} + i\Delta t])^2. \quad (31)$$

问题(31)需要求出对  $i = 1, 2, \dots, n$  的  $n$  个投资比例  $w_{L,t+i\Delta t}$  在时刻  $t$  的条件期望的显式表达式. 对方程(28)应用离散时间 Euler 近似法, 可以得到时刻  $t$  的条件期望为

$$\begin{aligned} E_t[w_{L,t} + \Delta t] &= w_{L,t} + \left(-c_t\delta + w_{I,t}\gamma + w_{L,t}w_{I,t}(\Delta\mu - w_{L,t}\Delta\sigma_S^2 + w_{I,t}\Delta\sigma_F^2)\right)\Delta t, \\ E_t[w_{L,t} + 2\Delta t] &= w_{L,t} + 2\left(-c_t\delta + w_{I,t}\gamma + w_{L,t}w_{I,t}(\Delta\mu - w_{L,t}\Delta\sigma_S^2 + w_{I,t}\Delta\sigma_F^2)\right)\Delta t, \\ &\vdots \\ E_t[w_{L,t} + n\Delta t] &= w_{L,t} + n\left(-c_t\delta + w_{I,t}\gamma + w_{L,t}w_{I,t}(\Delta\mu - w_{L,t}\Delta\sigma_S^2 + w_{I,t}\Delta\sigma_F^2)\right)\Delta t, \end{aligned}$$

上面的近似方案在  $\Delta t$  充分小的假设下是成立的, 因为此时  $\Delta t$  的所有高阶项都为零, 也即  $(\Delta t)^2 = (\Delta t)^3 = \dots = 0$ .

利用这些近似, 通过对模型(31)中的目标函数求偏导数, 再代入  $E_t[w_{L,t+i\Delta t}]$ , 便可获得最优资本投资比例  $\hat{c}_t$ , 即

$$\frac{\partial}{\partial c_t} \left( \sum_{i=1}^n (\hat{w}_L - E_t[w_{L,t+i\Delta t}])^2 \right) = \delta(1+n)n(\hat{w}_L - w_{L,t})\Delta t + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(-2\delta)\Delta t^2(-c_t\delta + w_{I,t}\gamma + w_{L,t}w_{I,t}(\Delta\mu - w_{L,t}\Delta\sigma_S^2 + w_{I,t}\Delta\sigma_F^2)) = 0,$$

对上式化简即可解出  $\hat{c}_t = \frac{3(w_{L,t} - \hat{w}_L)/((2n+1)\Delta t) + w_{I,t}\gamma + w_{L,t}w_{I,t}(\Delta\mu - w_{L,t}\Delta\sigma_S^2 + w_{I,t}\Delta\sigma_F^2)}{\delta}$ , 从而便可利用式(24)求出  $\hat{v}_t$ .

### 附录 C Monte Carlo 模拟

在本附录中, 将给出基本动态模型的离散时间近似的 Monte Carlo 模拟算法.

首先, 将时间区间  $[t, T]$  划分成  $N$  个具有相同长度  $\Delta t$  的子区间, 然后, 在等距离时间点  $t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots, t + N\Delta t$  模拟所有相关的变量. 对方程(28)应用 Euler 近似法, 即可得到  $w_{L,t}$  的离散时间动态过程如下

$$\begin{aligned} w_{L,t+\Delta t} &= w_{L,t} + (-c_t\delta + w_{I,t}\gamma + w_{L,t}w_{I,t}(\Delta\mu - w_{L,t}\Delta\sigma_S^2 + w_{I,t}\Delta\sigma_F^2))\Delta t - \\ &\quad w_{L,t}w_{I,t}(\sigma_F\sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_{F,t+\Delta t} + (\sigma_F\rho - \hat{\pi}^S\sigma_S)\varepsilon_{S,t+\Delta t})\sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中  $\varepsilon_{S,t+\Delta t}, \varepsilon_{S,t+2\Delta t}, \dots, \varepsilon_{S,t+N\Delta t}$  以及  $\varepsilon_{F,t+\Delta t}, \varepsilon_{F,t+2\Delta t}, \dots, \varepsilon_{F,t+N\Delta t}$  是两两间具有相关系数  $\rho$  的独立同分布标准正态随机变量序列.

根据方程(32), 并注意到  $w_{S,t} = \hat{\pi}^S w_{L,t}$ ,  $w_{B,t} = (1 - \hat{\pi}^S)w_{L,t}$  以及  $w_{F,t} = w_{I,t} = 1 - w_{L,t}$ , 从而可以直接求出其他投资比例的离散时间动态过程.

对式(30)应用 Euler 近似, 可以得到  $c_t$  的离散时间动态过程为

$$c_t = \hat{v}_t\Delta t + c_{t-\Delta t}(1 - \delta\Delta t - R_{t-\Delta t,t}^P\Delta t), \quad (33)$$

其中  $\hat{v}_t$  是由式(24)给出的最优承诺比率.

对方程(33), 还需要计算出在时间  $t - \Delta t$  到  $t$  之间的年化投资组合收益率  $R_{t-\Delta t,t}^P$ . 为此, 对式(9)中的  $P_t$  应用 Euler 近似, 可以得到投资组合财富  $P_t$  的离散时间动态过程如下

$$P_t = P_{t-\Delta t} + L_{t-\Delta t}(r\Delta t + \hat{\pi}^S(\mu_S - r)\Delta t + \hat{\pi}^S\sigma_S\varepsilon_{S,t}\sqrt{\Delta t}) + I_{t-\Delta t}(\mu_F\Delta t + \sigma_F\rho\varepsilon_{S,t}\sqrt{\Delta t} + \sigma_F\sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_{F,t}\sqrt{\Delta t}),$$

于是, 就可以给出年度化投资组合收益率

$$\begin{aligned} R_{t-\Delta t,t}^P &\equiv \frac{P_t - P_{t-\Delta t}}{P_{t-\Delta t}} = w_{L,t-\Delta t}(r\Delta t + \hat{\pi}^S(\mu_S - r)\Delta t + \hat{\pi}^S\sigma_S\varepsilon_{S,t}\sqrt{\Delta t}) + \\ &\quad w_{I,t-\Delta t}(\mu_F\Delta t + \sigma_F\rho\varepsilon_{S,t}\sqrt{\Delta t} + \sigma_F\sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_{F,t}\sqrt{\Delta t}). \end{aligned}$$