

再制造供应链运营策略博弈

牛水叶, 李勇建

(南开大学商学院, 天津 300071)

摘要: 基于竞争性的制造和再制造双供应链系统建立了供应链博弈模型, 探究了再制造商新的营销策略选择(以“投保策略”替代“广告策略”)对供应链成员生产决策的影响. 根据消费者行为研究, 构造了不同策略的需求函数, 分析了优先采用投保策略的条件及相应最优生产决策, 并运用数值仿真算例, 从利益相关者视角综合比较了“投保策略”与“广告策略”的收益差异. 另外, 初步探讨了多周期中保险周期与生产周期的关系以及保险公司参与对再制造供应链效益的影响. 研究发现, 在一定条件下, 优先采用“投保策略”是合理的, 可提高再制造品供应链的经济效益与综合效益.

关键词: 再制造; 供应链博弈; 广告; 产品质量保证保险; 产品赔付

中图分类号: F224.32 文献标识码: A 文章编号: 1000-5781(2017)05-0674-12

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2017.05.010

Remanufacturing supply chain operation game

Niu Shuiye, Li Yongjian

(Business School of Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: Based on a competitive two-supply chain operation system with manufacturing and remanufacturing processes, this study explores the effect of remanufacturer's new marketing strategy selection, i.e., adopting the “insurance strategy” instead of the “advertising strategy”, on supply chain members' optimal production decisions. According to the consumer behavior research, it formulates the demand functions of different strategies and analyzes the conditions that the “insurance strategy” could be applied and its corresponding optimal production decisions. Meanwhile, by using a numerical simulation, it displays the differences of related stakeholders' benefits under two different strategies. Besides, this study preliminarily discusses the relationship between the production cycle and insurance cycle and the influence of insurance companies' participation on remanufacturing supply chain benefits. Results show that adopting the “insurance strategy” is reasonable under certain conditions and can improve both the economic interests and comprehensive benefits.

Key words: remanufacture; supply chain game; advertising; product quality guarantee insurance; product claims

1 引言

近年来, 随着国家政策的支持和再制造技术的成熟, 独立的第三方汽车零部件再制造企业迅速崛起, 他们不依附于任何一家原始汽车制造商, 拥有自己的销售渠道, 如汽车配件城、汽车配件超市、具有一定资质和规模的维修店等. 其主要的代表企业有广州花都全球自动变速箱有限公司、济南复强动力有限公司

收稿日期: 2016-07-08; 修订日期: 2017-04-10.

基金项目: 国家社会科学基金重大资助项目(13&ZD147).

等^[1-3].在美国、法国、德国等发达国家的汽车售后维修市场上,汽车零部件再制造品已经赢得了消费者的普遍认可,成为了新品备件的替代品.然而,在我国,尽管完整的再制造品供应链已经形成,国内消费者对再制造品的市场接受度却不甚理想,主要原因是消费者对再制造品质量存在质疑.为此,我国再制造企业开展了大量广告宣传,向消费者讲解再制造品的性能、质量、制造工艺等,以期消除国内消费者对再制造品的认知偏见.此外,一些第三方再制造行业的引领者积极探索新的营销策略.例如,广州花都全球自动变速箱有限公司在2015年3月借助“再制造品进入保险市场”的战略合作契机,实施了为再制造品购买“产品质量保证保险”的策略.这一“投保策略”的使用正式将保险公司融入再制造供应链系统,第三方再制造企业获得了第三方产品质量担保,进而实现了赔付风险的转移.目前,在实践中,“投保策略”已经成为继广告策略后的又一可行营销手段,有助于提高再制造品的市场接受度.但是,目前尚未有文献对该“投保策略”展开深入研究.本文基于供应链视角,从学术角度研究了在制造和再制造的双供应链系统中,同类型新品备件和再制造品存在可替代竞争时,再制造供应链企业对上述两种营销策略的优化选择问题.

与本文相关的文献主要有两类,一类是关于再制造品营销策略的研究,一类是关于新品和再制造品的竞争性运营决策的研究.首先,文献[4-6]通过消费者行为研究,证实了消费者对再制造品的市场接受度的确比新品低,并指出原因在于消费者对质量和性能的担心降低了再制造品的评估价值.他们的研究结论与先前众多的模型假设一致^[7,8].在再制造品营销领域,一些具体研究在一定程度上为企业采用“广告策略”和“投保策略”提供了理论依据.例如,Michaud等^[9]通过实证调研发现,在不告知再制造品对环境的不良影响明显比新品低的情况下,消费者特别容易低估再制造品的价值.文献[8-11]指出产品知识是影响消费者购买行为的重要因素,而感知风险可直接影响消费者的再制造品购买意向.上述研究成果支持再制造企业采用“广告策略”.对于“投保策略”,虽然没有直接相关文献,但是考虑到其本质是一种再制造产品保证,与“产品保证”相关的研究文献相对较多.例如,文献[12]指出产品保证是消费者在购买产品时考量的一个重要因素.文献[13-15]提出产品保证的实施涉及到多方利益相关者,包括制造商(或再制造商)、销售商、第三方保证者和消费者,而第三方保证者一般为保险公司,它的参与既可减轻制造商或者销售者的责任和义务,同时又能保证消费者的利益.这些研究成果间接支持了再制造企业采用“投保策略”.在新品和再制造品的竞争性运营决策方面,文献[7,16-26]从供应链博弈视角展开了深入研究,为本文模型构建提供了借鉴性参考.

本文将金融保险工具引入到再制造品供应链运营决策中,首次探讨了为再制造品投保“产品质量保证保险”这一新生策略.“产品质量保证保险”,或称“产品质量保险”,属于保证保险中的一种.它是指承保制造商、销售商或修理商因制造以及销售或修理的产品本身的质量问题而造成的致使使用者遭受的如修理、重新购置等经济损失赔偿责任的保险,产品的购买者和消费者是该类保险的权利人.在投保此类险种后,若消费者因产品质量问题要求整件产品更换或退货,保险公司则无条件以其产品出厂价或销售价(若两者不同,取较小者)进行赔付.由于保险公司通常具有较好的社会信誉,故投保策略可兼具产品担保和风险转移作用.

本文以汽车零部件制造行业为研究背景,假定市场上共存在两个竞争性的两级供应链,即新品备件供应链和再制造品(或称再制造件)供应链,主要探讨以下三个关键问题:1)广告策略和投保策略分别如何影响需求的?二者有何不同?2)在什么条件下投保策略优于广告策略?3)从长期来看,投保策略将对再制造产量、供应链经济效益和综合效益产生什么影响?针对以上问题,得出以下研究结论:1)当决策变量满足某些条件时,优先采用“投保策略”是合理的,它能够有效提高再制造品供应链经济效益与综合效益;2)当营销投入相同时,保费率相对较小时应优先采用投保策略,但最优收益的获得并不是在保费率最小处,而是与客户对产品估值的转折点有关;3)从长期来看,若采用投保策略以处理质量索赔,再制造供应链效益将随时间激增.同时,本文总结并提炼了购买“产品质量保险”策略给再制造供应链带来的三大变化,其一是提高了供应链终端的消费者需求,但对需求函数的作用效果与传统广告策略不同;其二是保障售后产品赔付承诺的履行,但赔付责任承担方发生了转移,且产品保证服务类型发生了变化(即变为“可更新产品保证”服务);其三是消除了营销资源投入的负外部性,实现整体运营效益在供应链上的内部化.

2 问题描述和符号说明

2.1 问题描述

假设在汽车零部件制造市场上, 共存在两个竞争性的两级供应链. 1)新品备件供应链: 新品备件制造商(NM)—新品备件零售商(NR, 如 4S 店); 2)再制造品供应链: 独立再制造商(RM)—再制造品零售商(RR, 如汽配城). 当消费者需要更换同类型汽车零部件(如发动机、变速箱)时, 不同消费者可选择不同方式, 或是到汽车 4S 店更换同类型新品备件, 或是到汽配城更换同类型再制造品. 本文立足供应链视角, 研究了再制造商新的营销策略选择(以“投保策略”替代“广告策略”) 对供应链成员生产决策的影响, 其研究假设如下:

- 1) 市场中仅存在两条竞争性汽车零部件供应链寡头, 即新品备件供应链和再制造品供应链, 每条链中的原始制造商和再制造商分别为 Stackelberg 博弈领导者;
- 2) 新品备件和再制造品同时生产且销往同一客户市场, 每生产周期的潜在总市场需求不变;
- 3) 新品备件和再制造品具有可替代性, 但不同质: 再制造品可能会因质量问题引发一定概率的消费者索赔, 而新品备件具有较好的质量和较高的客户信赖, 其引发索赔事件的概率很小, 可忽略不计;
- 4) 再制造供应链企业用于产品营销的资源投入是有限的;
- 5) 供应链系统无库存积压和缺货, 即产量、销量、需求量相一致;
- 6) 保险策略的实施符合我国推行产品质量保证保险制度的三个基本假定条件: (a)保险公司确实有条件和能力全面把握投保企业的产品质量信息, 从而消除保险人与生产者之间的信息不对称; (b)保险公司具有良好的市场信誉, 能积极主动地承担保险赔偿责任, 进而消除消费者对保险人惜赔和非正常拒赔的担忧; (c)生产者提供劣质产品的责任后果主要限于产品质量违约责任, 从而保险人在产品质量保证保险责任范畴下的及时、充分理赔即可基本消除消费者对产品质量水平的顾虑.

2.2 变量及参数符号

本文涉及的决策变量及参数分类统计如表 1, 其中 $j = O$ (无策略), A (广告策略), I (投保策略).

表 1 决策变量及相关参数
Table 1 The decision variables and the related parameters

属性	符号	描述
决策变量	p_r^j	j 策略中单位再制造品的销售价格
决策变量	p_n^j	j 策略中单位新品备件的销售价格
决策变量	w_r^j	j 策略中单位再制造品的批发价格
决策变量	w_n^j	j 策略中单位新品备件的批发价格
参数	c_r	单位再制造品的生产成本
参数	c_n	单位新品备件的生产成本
参数	D	单个生产周期的总的市场需求量
参数	t	消费者购买新品备件/再制造品的单位距离成本
参数	ρ	再制造品因质量问题而被消费者索求赔偿或换货的概率
参数	k	单位再制造品的年保费率
参数	$k_{\max}$	单位再制造品的年最高保费率(由国家法规限定)
参数	α	增加单位广告投入对客户产品价值评估影响的调节系数
参数	n	单位再制造品的保险年限
参数	A	单个生产周期中再制造品营销投入(也即广告投入总量)
参数	η	单位再制造品的保险年限与生产周期的比率
参数	T	采用投保策略的时间长度(以保险周期个数计)

在本文所研究的供应链系统中, 决策变量为 w_n^j , w_r^j , p_n^j , p_r^j , 分别表示新品备件批发价, 再制造品批发价, 新

品备件零售价和再制造品零售价.

3 不同策略的需求函数

根据 Hotelling 模型相关研究^[27-29], 在该供应链系统中, 在具有价格竞争的垄断市场上, 新品备件和再制造品的市场需求量分别记为 q_n , q_r , $q_n + q_r = D$, 应满足 $q_n = \frac{D}{2t}(1 + t - v - p_n + p_r)$, $q_r = \frac{D}{2t}(-1 + t + v + p_n - p_r)$. $v \in (0, 1)$ 表示消费者对再制造品的评估价值(即相对于新品备件评估价值1的再制造品价值折扣因子), t 表示消费者购买产品的单位距离成本. 由上式可见, 增加再制造品市场需求的策略制定应着眼于以下两个方面: 降低再制造品售价 p_r , 提高客户的评估价值 v . 通过前述的消费者行为研究显示, 传统的投放广告和新生的投保策略均能提高客户的评估价值 v .

3.1 传统的广告策略

广告宣传虽然不能提高再制造品本身的价值, 但是却能改变客户因不了解产品而产生主观感知偏见, 提升再制造品的评估价值 v . 文献[30-35]均对供应链运营中的广告投入决策做了研究, 并参照广告学理论将市场需求假定为关于广告投入的斜率递减的增函数.

基于此, 可推知客户的产品评估价值是随着广告投入的增加而增大的, 但边际增长率递减, 即客户的产品评估价值是关于广告投入量的增凹函数. 进而, 可对“广告策略”下的再制造品需求函数进行构建. 假设客户对于单位再制造品的初始评估值为 v , 广告投入量为 A . 采取广告营销策略后, v 将增至 v_A , $v_A = (1 - v)(1 - e^{-\alpha A}) + v$. 其中 $\alpha, v, v_A \in (0, 1)$. 令 $\delta_A = 1 - e^{-\alpha A}$ 表示广告投入对客户价值评估的影响程度, α 为固定参数.

传统广告策略中的需求函数为 $q_n^A = \frac{D}{2t}(1 + t - v_A - p_n^A + p_r^A)$, $q_r^A = \frac{D}{2t}(-1 + t + v_A + p_n^A - p_r^A)$.

3.2 新生的投保策略

再制造商购买“产品质量保证保险”, 通过支付单位保费 I_r 而获得第三方赔付承诺来提高客户的评估价值 v . 根据“产品质量保证保险”的保险法条款及相关文献研究^[36,37]可知, $I_r = knp_r^I$, 其中 k 代表单位再制造品的年保费率, 其值由保险公司确定. n 代表单位再制造品的保险年限, $kn > \rho$. 根据具体产品运营实情, k 的取值通常是不同的, 所以它是消费者反推产品价值的参考指标. 一般而言, k 与下列因素有关: 1) 单位再制造品的内在价值; 2) 再制造商的生产技术水平; 3) 再制造商和零售商的质量管理水平; 4) 再制造品发生质量问题的概率和赔损记录. 另外, 我国政府通过立法对每一类产品的最高保费率做了限定, 本研究充分考虑这一实情, 设定保险公司最高保费率为 $k_{\max}$, 为已知参量.

基于此, 可推知客户的产品评估价值是随着保费率的增大先增后减的, 且边际增长率递减, 即客户的产品评估价值是关于保费率的凹函数. 进而, 可对“投保策略”下的再制造品需求函数进行构建. 假设客户对于单位再制造品的初始评估值为 v , 保险费率为 k , 支付的单位保险费为 $I_r = knp_r^I$. 采取投保营销策略后, v 将增至 v_I (为简化计算, 假定反应函数是对称的): $v_I = (1 - v)\gamma \min \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{k_{\max}}}, 1 - e^{\frac{k}{k_{\max}} - 1} \right\} + v$. 其中 $\gamma = 1/(1 - e^{-0.5})$, $v, v_I \in (0, 1)$. 令 $\delta_I = \gamma \min \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{k_{\max}}}, 1 - e^{\frac{k}{k_{\max}} - 1} \right\}$ 表示保费率对客户价值评估的影响程度.

新生投保策略中的需求函数为 $q_n^I = \frac{D}{2t}(1 + t - v_I - p_n^I + p_r^I)$, $q_r^I = \frac{D}{2t}(-1 + t + v_I + p_n^I - p_r^I)$.

4 不同策略的单周期博弈分析

本文构建了一个含有制造和再制造的双供应链定价博弈模型, 每条供应链含有两个参与者: 新品备件制造商(NM)-新品备件零售商(NR), 再制造商(RM)-再制造品零售商(RR). 上下游企业进行 Stackelberg 博

弃, 供应链系统中各参与者采取不同策略的利润记作 $\pi_i^j, i = \text{NR}, \text{NM}, \text{RR}, \text{RM}, j = \text{O}, \text{A}, \text{I}$.

4.1 策略 A 和策略 I 的决策过程

广告策略(策略 A)下的供应链决策过程分三步: 首先, 再制造商根据企业总体规划确定可行的营销投入量 A ; 然后, 每条供应链中的领导者分别制定批发价决策 w_n^A, w_r^A ; 最后, 每条供应链中的跟随者分别制定销售价决策 p_n^A, p_r^A . 投保策略(策略 I)下的供应链决策过程分四步: 首先, 保险公司通过综合评估相关要素(见 3.2 节中的 1)~4)), 确定给予的再制造品年保费率 k ; 然后, 每条供应链中的领导者分别制定批发价决策 w_n^I, w_r^I ; 随后, 每条供应链中的跟随者分别制定销售价决策 p_n^I, p_r^I ; 最后, 再制造商确定应交单位保费 I_r 并交纳给保险公司总保费 $I_r q_r^I$.

4.2 策略 A 和策略 I 的可取条件

j 策略中的新品备件零售商、新品备件制造商、再制造品零售商三者的利润函数分别为

$$\pi_{\text{NR}}^j = (p_n^j - w_n^j)q_n^j, \quad j = \text{O}, \text{A}, \text{I}, \quad (1)$$

$$\pi_{\text{NM}}^j = (w_n^j - c_n)q_n^j, \quad j = \text{O}, \text{A}, \text{I}, \quad (2)$$

$$\pi_{\text{RR}}^j = (p_r^j - w_r^j)q_r^j, \quad j = \text{O}, \text{A}, \text{I}. \quad (3)$$

然而, O, A, I 三种不同策略中的再制造商利润函数是不同的, 分别为

$$\pi_{\text{RM}}^{\text{O}} = (w_r^{\text{O}} - c_r - \rho p_r^{\text{O}})q_r^{\text{O}}, \quad (4)$$

$$\pi_{\text{RM}}^{\text{A}} = (w_r^{\text{A}} - c_r - \rho p_r^{\text{A}})q_r^{\text{A}} - A, \quad (5)$$

$$\pi_{\text{RM}}^{\text{I}} = (w_r^{\text{I}} - c_r - knp_r^{\text{I}})q_r^{\text{I}}. \quad (6)$$

表 2 不同策略中的再制造品最优定价及各参与者最优利润

Table 2 The remanufactured product's optimal sales price and stakeholders' profits in different strategies

符号	策略 O	策略 A	策略 I
p_t^{j*}	$\frac{(3-\rho)(v-1+c_n+7t)+4c_r}{7-5\rho}$	$\frac{(3-\rho)((1-\delta_A)(v-1)+c_n+7t)+4c_r}{7-5\rho}$	$\frac{(3-kn)((1-\delta_I)(v-1)+c_n+7t)+4c_r}{7-5kn}$
π_{NR}^{j*}	$\frac{D}{2t} \left(\frac{(1-\rho)(1-v-c_n+(7-3\rho)t)+c_r}{7-5\rho} \right)^2$	$\frac{D}{2t} \left(\frac{(1-\rho)((1-v)(1-\delta_A)-c_n+(7-3\rho)t)+c_r}{7-5\rho} \right)^2$	$\frac{D}{2t} \left(\frac{(1-kn)((1-v)(1-\delta_I)-c_n+(7-3kn)t)+c_r}{7-5kn} \right)^2$
π_{NM}^{j*}	$\frac{D}{t} \left(\frac{(1-\rho)(1-v-c_n+(7-3\rho)t)+c_r}{7-5\rho} \right)^2$	$\frac{D}{t} \left(\frac{(1-\rho)((1-v)(1-\delta_A)-c_n+(7-3\rho)t)+c_r}{7-5\rho} \right)^2$	$\frac{D}{t} \left(\frac{(1-kn)((1-v)(1-\delta_I)-c_n+(7-3kn)t)+c_r}{7-5kn} \right)^2$
π_{RR}^{j*}	$\frac{D}{2t} \left(\frac{(1-\rho)(1-v-c_n-7t)+c_r}{7-5\rho} \right)^2$	$\frac{D}{2t} \left(\frac{(1-\rho)((1-v)(1-\delta_A)-c_n-7t)+c_r}{7-5\rho} \right)^2$	$\frac{D}{2t} \left(\frac{(1-kn)((1-v)(1-\delta_I)-c_n-7t)+c_r}{7-5kn} \right)^2$
π_{RM}^{j*}	$\frac{D(2-\rho)}{2t} \left(\frac{(1-\rho)(1-v-c_n-7t)+c_r}{7-5\rho} \right)^2$	$\frac{D(2-\rho)}{2t} \left(\frac{(1-\rho)((1-v)(1-\delta_A)-c_n-7t)+c_r}{7-5\rho} \right)^2 - A$	$\frac{D(2-kn)}{2t} \left(\frac{(1-kn)((1-v)(1-\delta_I)-c_n-7t)+c_r}{7-5kn} \right)^2$

命题 1 若 A 使得 $((1-\rho)((1-v)(1-\delta_A)-c_n-7t)+c_r)^2 - \frac{2(7-5\rho)^2 t A}{(2-\rho)D} > ((1-\rho)(1-v-c_n-7t)+c_r)^2$ 成立, 则再制造供应链采用策略 A 是合理的.

命题 2 若 k 使得 $\frac{2-kn}{(7-5kn)^2} ((1-kn)((1-v)(1-\delta_I)-c_n-7t)+c_r)^2 > \frac{2-\rho}{(7-5\rho)^2} ((1-\rho)(1-v-c_n-7t)+c_r)^2$ 成立, 则再制造供应链采用策略 I 是合理的.

证明 只有当采取策略 A 或 I 时, 使得再制造供应链利润和再制造商利润同时大于无策略情形, 策略 A(或 I)实施形成内在激励性, 策略才是可取的, 故应同时满足不等式: $\pi_{\text{RR}}^{j*} + \pi_{\text{RM}}^{j*} > \pi_{\text{RR}}^{\text{O}*} + \pi_{\text{RM}}^{\text{O}*}$ 和 $\pi_{\text{RM}}^{j*} > \pi_{\text{RM}}^{\text{O}*}, j = \text{A}, \text{I}$, 求解可得命题 1 和命题 2.

命题 3 在策略 A 和 I 均可取的基础上, 若 $\frac{(1-v)(1-\delta_I)-c_n-7t}{(1-v)(1-\delta_A)-c_n-7t} > \frac{1-\rho}{1-kn} > 1$ 成立, 则应优先采取策略 I.

证明 依据 $q_n^j, q_r^j > 0, j = \text{I}, \text{A}$, 相应参数满足 $1-t-p_n^j+p_r^j < v_j < 1+t-p_n^j+p_r^j$, 即有

$$(1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t) + c_r < 0, (1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - c_n) + (7 - 3kn)t + c_r > 0.$$

由于

$$\begin{aligned}\pi_{RR}^{I*} &= \frac{D}{2t(7 - 5kn)^2} ((1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t) + c_r)^2 \\ &> \frac{D}{2t(7 - 5\rho)^2} ((1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t) + c_r)^2, \\ \pi_{RR}^{A*} &= \frac{D}{2t(7 - 5\rho)^2} ((1 - \rho)((1 - v)(1 - \delta_A) - c_n - 7t) + c_r)^2,\end{aligned}$$

所以, 若 $\frac{(1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t}{(1 - v)(1 - \delta_A) - c_n - 7t} > \frac{1 - \rho}{1 - kn}$, 则一定有 $\pi_{RR}^{I*} > \pi_{RR}^{A*}$.

令 $H(x) = (2 - x)/(7 - 5x)^2$, 求得 $H'(x) = (13 - 5x)/(7 - 5x)^3 > 0$, 即 $H(x)$ 是关于 x 的增函数, $H(kn) > H(\rho)$. 进而可得

$$\begin{aligned}\pi_{RM}^{I*} &= \frac{D(2 - kn)}{2t(7 - 5kn)^2} ((1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t) + c_r)^2 \\ &> \frac{D(2 - \rho)}{2t(7 - 5\rho)^2} ((1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t) + c_r)^2.\end{aligned}$$

$$\text{又由于} \quad \pi_{RM}^{A*} = \frac{D(2 - \rho)}{2t(7 - 5\rho)^2} ((1 - \rho)((1 - v)(1 - \delta_A) - c_n - 7t) + c_r)^2 - A,$$

所以, 若 $\frac{(1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t}{(1 - v)(1 - \delta_A) - c_n - 7t} > \frac{1 - \rho}{1 - kn}$, 则一定有 $\pi_{RM}^{I*} > \pi_{RM}^{A*}$.

综上分析, 若 $\frac{(1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t}{(1 - v)(1 - \delta_A) - c_n - 7t} > \frac{1 - \rho}{1 - kn} > 1$ 成立, 较之 策略A, 策略I 更具内在激励性, 应优先采用.

命题4 在 策略A 和策略I 均可取的基础上, 当

$$A = Dkn((3 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t) - 4c_r)((1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - 7t - c_n) + c_r)$$

时, 若 $\pi_{RR}^{I*}(k) + \pi_{RM}^{I*}(k) - \pi_{RR}^{A*}(k) - \pi_{RM}^{A*}(k) > 0$ 成立, 则应优先采取策略I.

证明 假定策略A 和 策略I 的营销投入相同, 则 $A = knp_r^{I*}q_r^{I*}$. 通过代入之前所求 p_r^{I*}, q_r^{I*} , 可得

$$A(k) = Dkn((3 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I(k)) - c_n - 7t) - 4c_r)((1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I(k)) - c_n - 7t) + c_r).$$

策略I 与策略A 的再制造供应链收益之差为 Δ , $\Delta = \pi_{RR}^{I*} + \pi_{RM}^{I*} - \pi_{RR}^{A*} - \pi_{RM}^{A*}$, 即有

$$\Delta = D(3 - kn)((1 - kn)((1 - v)(1 - \delta_I) - c_n - 7t) + c_r)^2 / (2t(7 - 5kn)^2) -$$

$$D(3 - \rho)((1 - \rho)((1 - v)(1 - \delta_A) - c_n - 7t) + c_r)^2 / (2t(7 - 5\rho)^2) + A.$$

$$\text{又由于 } \delta_A = 1 - e^{-\alpha A(k)}, \delta_I = \gamma \min \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{k_{\max}}}, 1 - e^{\frac{k}{k_{\max}} - 1} \right\}.$$

所以, 若将 k 代入 Δ , $\Delta > 0$ 成立, 则在该保险费率下应优先采取策略I.

4.3 算例分析

为更为直观地展示“投保策略”与“广告策略”的差异, 开展营销投入相同情形下的两策略算例分析.

令 $\{D, c_n, c_r, t, v, \rho, k_{\max}, \varepsilon, \alpha, n\} = \{500, 0.30, 0.20, 0.12, 0.65, 0.001, 0.005, 0.1, 0.5, 1\}$ (其中部分赋值参考文献[29]). 由于 $k \in \left[\frac{\rho}{n}, k_{\max}\right]$, 因此令 k 从 0.001 逐渐增长到 0.005.

由于新品备件和再制造品的生产和销售将对消费者、保险公司及公共环境产生一定的影响^[38-41], 因此, 本文从社会系统角度, 构建不同利益相关者的效益函数, 对策略A 和策略I 做了全面对比分析. 用 U_{SN}^j , U_{SR}^j , U_C^j , U_E^j , U_I^j , U_T^j , $j = O, A, I$, 分别表示策略 j 下新品制造供应链经济效益、再制造供应链经济效益、

消费者效益、公共环境效益、保险公司效益和综合效益. 其中 $U_I^O, U_I^A = 0, \varepsilon \in (0, 1)$ 表示每使用单位再制品或每减少使用单位新品给环境带来的正效应. 上述各相关效益函数表达如下

$$U_{SN}^j = \pi_{NR}^j + \pi_{NM}^j, \quad (7)$$

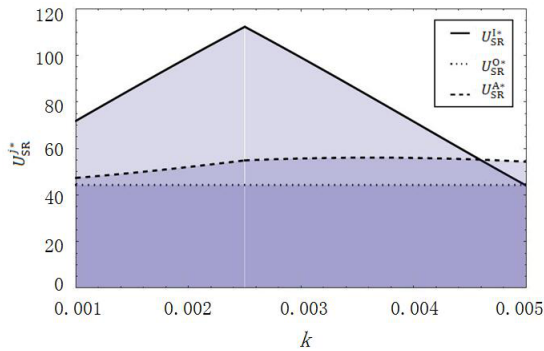
$$U_{SR}^j = \pi_{RR}^j + \pi_{RM}^j, \quad (8)$$

$$U_C^j = \int_0^{q_r^j} (1 - t(1 - x) - p_n^j) dx + \int_0^{q_r^j} (v_j - tx - p_r^j) dx = (1 - t + v_j - p_n^j - p_r^j) q_r^j, \quad (9)$$

$$U_E^j = \varepsilon q_r^j, \quad (10)$$

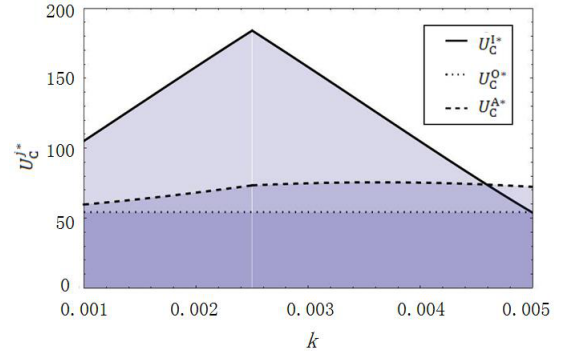
$$U_I^j = (kn - \rho) p_r^j q_r^j, \quad (11)$$

$$U_T^j = U_{SR}^j + U_{SN}^j + U_C^j + U_E^j + U_I^j. \quad (12)$$



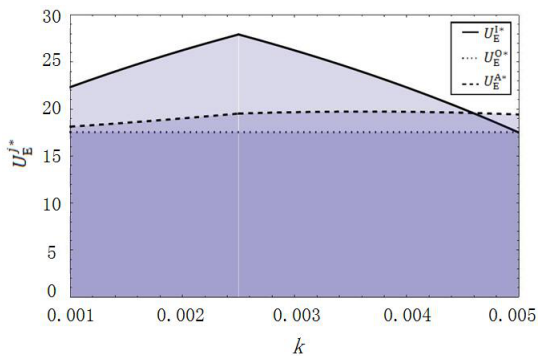
(a) 再制造供应链效益的变动

(a) changes of remanufacturing supply chain benefit



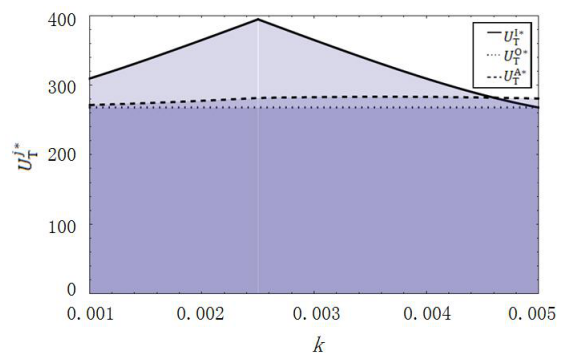
(b) 消费者效用的变动

(b) Consumer utility changes



(c) 环境效益的变动

(c) Changes in environmental benefits



(d) 综合效益的变动

(d) Change of comprehensive benefit

图 1 不同策略的相关效益随保费率 k 增长的变化情况

Fig. 1 The changes of different benefit targets with the increase of the premium rate k

通过仿真分析(如图 1), 发现再制造供应链经济效益(U_{SR})、消费者效益(U_C)、公共环境效益(U_E)和综合效益(U_T)呈现以下特点: 1)在策略 I 下, 它们先增后减, 在 $k = k_{\max}/2$ 时, 取最大值; 在策略 A 策略下, 它们持续增长, 但当 k 超过 $k_{\max}/2$ 后, 增速放缓. 2)当 $k < 0.0046$ 时, 策略 I 下的各收益明显高于策略 A, 其中再制造供应链经济效益和消费者效益的最大差值($k = k_{\max}/2$ 时)约等于相应策略 A 下的收益, 公共环境效益和综合效益的最大差值($k = k_{\max}/2$ 时)约等于相应策略 A 下的收益的 0.3 倍. 3)当给定策略 I 与策

略 A 相同的营销投入时, k 的取值大小可决定策略选择的结果, 通常 k 相对较小时适合采用策略 I, k 相对较大时适合采用策略 A, 但投保策略的最佳实施时机并不是 k 取最小时. 4) 企业应特别关注消费者对再制造品估值的转折点, 它是企业营销策略实施的最佳时机.

5 考虑退货赔付的多周期策略 I

考虑到投保策略实施的长期有效性, 故基于多周期视角初步探讨保险周期与生产周期的关系以及保险公司代理换货赔付问题. 在策略 I 下, 假定每单个生产周期的新客户总需求量相同且为 D , 生产周期和保险周期计数为 s , $s = 1, 2, \dots$. 现实中, 产品质量保险的单位产品保险周期因产品的功能、特性差异而不同, 一般取决于国家产品质量认证机构的官方评估. 通常, 电视机、发动机以及变速箱等耐用性产品的保险周期是 3 年, 手机、平板电脑等快销品的保险周期为 1 年, 而这些产品的生产周期普遍小于半年.

令 T_I, T_P 分别代表单位产品的保险周期和生产周期, 假定 $\left(\frac{T_I}{T_P} + \frac{1}{2}\right) = \eta, \eta > 0$, 即一个保险周期含有 η 个生产周期, 那么单位产品在每生产周期因质量问题引发赔付的概率是 ρ/η . 考虑到处理赔付事件的延时性, 将每个生产周期 s 细分为子周期 s_1 (生产阶段) 和子周期 s_2 (赔付处理阶段)^[40], q_{rs}^I 表示第 s 生产周期的产量. 由于索赔事件经由保险公司得以及时处理 (返还零售价或赔付产品), 消费者对再制造品的评估价值并未受到影响, 下一个生产周期 ($s+1$) 的新增需求量将不会改变, 只是使得再制造商的产量增加 (如图 2).

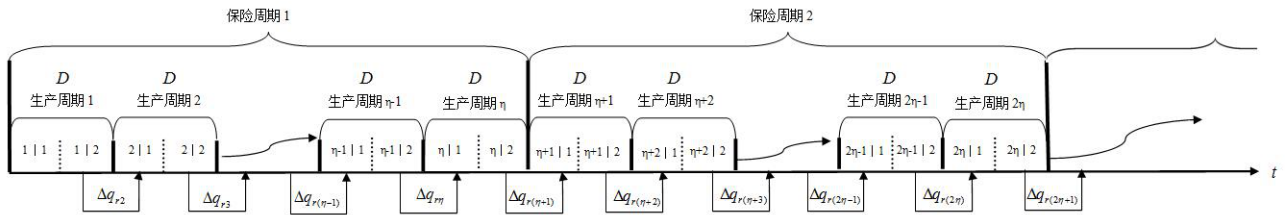


图 2 保险策略下考虑退货赔付的供应链系统多周期决策过程

Fig. 2 The multi-period decision process of supply chain system in insurance strategy with product claims

一旦顾客向保险公司索赔, 保险公司必将无条件以现金或产品方式提供“以旧换再”的更换服务. 由于产品质量保证保险属于可更新产品保证^[19], 即当再制造品在保险周期 1 中的生产周期 s 出现质量问题, 保险公司需要根据保险合同条款在 $s+1$ 生产周期向消费者提供无偿更换服务, 而服务完成后, 保险公司承担的质保服务重新从零计时, 时限仍为 1 个单位保险周期长度, 若出现质量问题, 往复承保更换, 直至产品正常使用时间超过 1 个单位保险周期, 保险服务才将终止.

命题 5 在策略 I 实施期限为 N 个单位保险周期长度时, 考虑再制造品的退货赔付, 第 s 生产周期的产量决策 q_{rs}^I 、第 s 保险周期的产量决策 Q_{rs}^I 以及整体策略实施期内的产量 $\sum_{s=1}^N Q_{rs}^I$ 为

$$q_{rs}^I = \begin{cases} (1 + \rho/s)^{s-1} q_r^I, & s \leq \eta, s \in \mathbf{N}^* \\ \left((1 + \rho/s)^{s-1} - (1 + \rho/\eta)^{s-\eta} + 1 \right) q_r^I, & \eta < s < N\eta, s \in \mathbf{N}^* \\ \left((1 + \rho/s)^{N\eta-1} - (1 + \rho/\eta)^{(N-1)\eta} + 1 \right) q_r^I + Q_{r(N+1)}^I, & s = N\eta, \end{cases}$$

$$Q_{rs}^I = \begin{cases} \eta/\rho((1 + \rho/\eta) - 1), & s = 1 \\ (\eta + \eta/\rho(1 + \rho/\eta)^{(s-2)\eta+1}((1 + \rho/\eta)^{\eta-1} - 1)((1 + \rho/\eta)^\eta - 1))q_r^I, & 1 < s < N, s \in \mathbf{N}^* \\ (\eta/\rho(1 + \rho/\eta)^{(N-1)\eta+1}((1 + \rho/\eta)^{-\eta})((1 + \rho/\eta)^{\eta-1} - 1) \\ ((1 + \rho/\eta)^\eta - 1) + ((1 - \rho/\eta)^\eta)\eta\rho(\rho - \eta)^{-2} + \eta^2/(\rho - \eta))q_r^I, & s = N, \end{cases}$$

$$Q_{r(N+1)}^I = \left(\eta + \eta/\rho(1 + \rho/\eta)^{(N-1)\eta+1} \left((1 + \rho/\eta)^{\eta-1} - 1 \right) \left((1 + \rho/\eta)^\eta - 1 \right) + \right. \\ \left. (1 - (\rho/\eta)^\eta) \eta \rho / (\eta - \rho)^2 + \eta^2 / (\rho - \eta) \right) q_r^I, \\ \sum_{s=1}^N Q_{rs}^I = \left((N-1)\eta + \eta/\rho + (\eta/\rho)^2 (1 + \rho/\eta) \left((1 + \rho/\eta)^{N-1} - 1 \right) \cdot \right. \\ \left. \left((1 + \rho/\eta)^{\eta-1} - 1 \right) \right) \left((1 + \eta)^\eta - 1 \right) q_r^I.$$

命题6 在策略I实施期限为 N 个单位保险周期长度时,考虑再制造品的退货赔付,消费者效用和环境效益将保持不变,但再制造供应链效益、保险公司效益、综合效益将激增。

证明 在策略I实施期限为 N 个单位保险周期长度时,各效益函数变为

$$U_{SNs}^I = \pi_{NRs}^I(q_r^I) + \pi_{NM_s}^I(q_r^I), \quad U_{SRs}^I = \pi_{RRs}^I(q_{rs}^I) + \pi_{RM_s}^I(q_{rs}^I), \\ U_{Cs}^I = \int_0^{q_r^I} (1 - t + v_1 - p_n^I - p_r^I) dx = (1 - t + v_1 - p_n^I - p_r^I) q_r^I, \\ U_{Es}^I = \varepsilon q_r^I, \quad U_{Is}^I = (kn - \rho) p_r^I q_{rs}^I, \quad U_{Ts}^I = U_{SRs}^I + U_{SNs}^I + U_{Cs}^I + U_{Es}^I + U_{Is}^I.$$

由于在策略I实施期限内,保险赔付并没有改变每生产周期在使用再制造品的数量,如上式所示,只有再制造供应链效益函数、保险公司效益函数和综合效益函数受 q_{rs}^I 影响,呈现效益随时间激增现象。

6 结束语

本文运用Stackelberg博弈模型,研究了在制造和再制造双供应链系统中,同类型新品和再制造品存在可替代竞争时,再制造商新的营销策略选择(以“投保策略”替代“广告策略”)对供应链成员生产决策的影响。根据消费者行为研究,构造了反映两种不同策略的需求函数,探究了供应链系统中利益相关者(新品备件制造商、新品备件零售商、再制造商、再制造品零售商、保险公司)的利润情况,分析了再制造商优先采用投保策略的条件及相应最优生产决策。同时,本文运用数值仿真方法,直观地展示了采用“投保策略”或“广告策略”的各相关收益差异。另外,初步探讨了多周期中保险周期与生产周期的关系以及保险公司参与对再制造供应链收益的影响。研究表明:在一定条件下,优先采用“投保策略”是合理的,有利于提高再制造品供应链经济效益与综合效益;当营销投入相同时,保费率成为策略选择的指标,其值相对较小时应优先采用投保策略,但最优收益的获得并不是在保费率最小处,而是与客户对产品估值的转折点有关;从长期来看,若采用投保策略以处理质量索赔,再制造供应链效益将随时间激增。本文还可作进一步的拓展,一方面,可以考虑当消费者因质量问题而退货索赔后,其对再制造品的评估价值降低,或者是消费者因此而演变为新品消费者。在这种情形下,对于需求函数的构建将是动态变化的,更为切合实际但也更为复杂。另一方面,可以考虑保险策略和广告策略等其他策略的交叉融合使用,构建分阶段策略模型,为企业提供更切实可行的策略指导。

参考文献:

- [1] 王道宇. 一汽集团汽车零部件再制造发展战略研究. 长春: 吉林大学, 2012.
Wang D Y. Study on the Development Strategy of Automotive System Manufacturing in FAW. Changchun: Jilin University, 2012. (in Chinese)
- [2] 夏西强. 政府参与下汽车零部件再制造博弈模型研究. 大连: 大连理工大学, 2015.
Xia X Q. Study on Game Models for Auto Parts Remanufacturing based on Government Involvement. Dalian: Dalian University of Technology, 2015. (in Chinese)
- [3] 向姣姣. 中国汽车零部件再制造产业发展模式研究. 武汉: 武汉理工大学, 2012.

- Xiang J J. A Study on the Development Model of the Auto Parts Remanufacturing in China. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2012. (in Chinese)
- [4] Agrawal V V, Atasu A, Van Ittersum K. Remanufacturing, third-party competition, and consumers' perceived value of new products. *Management Science*, 2015, 61(1): 60–72.
- [5] Ovchinnikov A. Revenue and cost management for remanufactured products. *Production and Operations Management*, 2011, 20(6): 824–840.
- [6] Subramanian R, Subramanyam R. Key factors in the market for remanufactured products. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2012, 14(2): 315–326.
- [7] Debo L G, Toktay L B, Wassenhove L N V. Joint life-cycle dynamics of new and remanufactured products. *Production and Operations Management*, 2006, 15(4): 498–513.
- [8] Atasu A, Sarvary M, Van Wassenhove L N. Remanufacturing as a marketing strategy. *Management Science*, 2008, 54(10): 1731–1746.
- [9] Michaud C, Llerena D. Green consumer behavior: An experimental analysis of willingness to pay for remanufactured products. *Business Strategy and the Environment*, 2011, 20(6): 408–420.
- [10] 刘宏蛟, 梁 樑, 张海明, 等. 消费者对再制造产品的认知程度及购买行为分析. *运筹与管理*, 2009, 18(4): 159–163.
Liu H J, Liang L, Zhang H M, et al. Study on consumers awareness and purchase behavior of remanufactured products in China. *Operations Research and Management Science*, 2009, 18(4): 159–163. (in Chinese)
- [11] 张红丹. 中国消费者再制造产品购买意向研究. 北京: 北京交通大学, 2011.
Zhang H D. Research on Consumers' Purchasing Intention of Remanufactured Products in China. Beijing: Beijing Jiaotong university, 2011. (in Chinese)
- [12] Lele M M, Karmarkar U S. Good product support is smart marketing. *Harvard Business Review*, 1983, 61(6): 124–132.
- [13] Blischke W. *Product Handbook*. CRC Press, 1995.
- [14] 于 俭. 对产品保证战略问题的研究. *杭州电子科技大学学报(社会科学版)*, 2006, 2(3): 117–121.
Yu J. The Research on strategic problems of the product warranty. *Journal of Hangzhou Dianzi University (Social Science Edition)*, 2006, 2(3): 117–121. (in Chinese)
- [15] 彭银雪. 再制造产品的保证策略研究. 杭州: 杭州电子科技大学, 2011.
Peng Y X. A Study on the Warranty Policy of Remanufactured Product. Hangzhou: Hangzhou Dianzi University, 2011. (in Chinese)
- [16] 葛静燕, 黄培清. 基于博弈论的闭环供应链定价策略分析. *系统工程学报*, 2008, 23(1): 111–115.
Ge J Y, Huang P Q. Price decision analysis for closed-loop supply chain based on game theory. *Journal of Systems Engineering*, 2008, 23(1): 111–115. (in Chinese)
- [17] 邹宗保, 王建军, 邓贵仕, 等. 基于成本对比的制造商与授权再制造商博弈模型. *系统工程学报*, 2016, 31(3): 373–385.
Zou Z B, Wang J J, Deng G S, et al. Game model between the original manufacturer and the authorized remanufacturer based on the costs comparison. *Journal of Systems Engineering*, 2016, 31(3): 373–385. (in Chinese)
- [18] 伍 颖, 熊中楷. 制造商与在位再制造商的再制造生产决策研究. *系统工程学报*, 2015, 30(4): 554–565.
Wu Y, Xiong Z K. Remanufacturing production decision of the original equipment manufacturer and the existing remanufacturer. *Journal of Systems Engineering*, 2015, 30(4): 554–565. (in Chinese)
- [19] Li X, Li Y, Cai X. Remanufacturing and pricing decisions with random yield and random demand. *Computers and Operations Research*, 2015, 54(C): 195–203.
- [20] Guide Jr V D R, Li J. The potential for cannibalization of new products sales by remanufactured products. *Decision Sciences*, 2010, 41(3): 547–572.
- [21] Pang G, Casalin F, Papagiannidis S, et al. Price determinants for remanufactured electronic products: A case study on eBay UK. *International Journal of Production Research*, 2015, 53(2): 572–589.
- [22] Ferrer G, Swaminathan J M. Managing new and differentiated remanufactured products. *European Journal of Operational Research*, 2010, 203(2): 370–379.
- [23] Chen J M, Chang C I. Dynamic pricing for new and remanufactured products in a closed-loop supply chain. *International Journal of Production Economics*, 2013, 146(1): 153–160.
- [24] Xiong Z, Huang F, Liu Y. A study of remanufactured product marketing strategy of retailers in new product distribution. *Industrial Engineering Journal*, 2013, 16(2): 26–33.
- [25] Abbey J D, Blackburn J D, Guide V D R. Optimal pricing for new and remanufactured products. *Journal of Operations Management*, 2015, 36(1): 130–146.

- [26] Örsdemir A, Kemahlioğlu-Ziya E, Parlaktürk A K. Competitive quality choice and remanufacturing. *Production and Operations Management*, 2014, 23(1): 48–64.
- [27] Hotelling H. *Stability in Competition*. New York: Springer, 1990.
- [28] Sajeesh S, Raju J S. Positioning and pricing in a variety seeking market. *Management science*, 2010, 56(6): 949–961.
- [29] Wu C H. OEM product design in a price competition with remanufactured product. *Omega: International Journal of Management Science*, 2013, 41(2): 287–298.
- [30] Xie J, Wei J C. Coordinating advertising and pricing in a manufacturer-retailer channel. *European Journal of Operational Research*, 2009, 197(2): 785–791.
- [31] Szmerekovsky J G, Zhang J. Pricing and two-tier advertising with one manufacturer and one retailer. *European Journal of Operational Research*, 2009, 192(3): 904–917.
- [32] Wang S D, Zhou Y W, Min J, et al. Coordination of cooperative advertising models in a one-manufacturer two-retailer supply chain system. *Computers and Industrial Engineering*, 2011, 61(4): 1053–1071.
- [33] SeyedEsfahani M M, Biazaran M, Gharakhani M. A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer-retailer supply chains. *European Journal of Operational Research*, 2011, 211(2): 263–273.
- [34] 易余胤, 肖莉珺. 考虑广告影响的闭环供应链协调. *管理评论*, 2012, 24(11): 44–50.
Yi Y Y, Xiao L J. Closed-loop supply chain model with advertising effect. *Management Review*, 2012, 24(11): 44–50. (in Chinese)
- [35] 张智勇, 李华娟, 杨磊, 等. 基于微分博弈的双渠道广告合作协调策略研究. *控制与决策*, 2014, 29(5): 873–879.
Zhang Z Y, Li H J, Yang L, et al. Dual-channel coordination strategies on advertising cooperation based on differential game. *Control and Decision*, 2014, 29(5): 873–879. (in Chinese)
- [36] 王萍萍. 论我国产品质量保证保险的构建. 济南: 山东大学, 2013.
Wang P P. On Construction of Product Quality Bond Insurance in China. Jinan: Shandong University, 2013. (in Chinese)
- [37] 何绍慰. 产品质量保证保险改善产品质量的机制和条件: 基于信息不对称条件下产品质量博弈的分析. *河南大学学报(社会科学版)*, 2013, 53(1): 28–33.
He S W. Conditions of product quality bonds: Analysis based on the product quality game under conditions of asymmetric information. *Journal of Henan University (Social Science Edition)*, 2013, 53(1): 28–33. (in Chinese)
- [38] Atas U, Özdemir Ö, Van Wassenhove L N. Stakeholder perspectives on e-waste take-back legislation. *Production and Operations Management*, 2013, 22(2): 382–396.
- [39] Kovacs G. Stakeholder salience and environmental responsibility: A cross-industrial comparison. *Progress in Industrial Ecology, an International Journal*, 2006, 3(5): 418–430.
- [40] Ovchinnikov A, Blass V, Raz G. Economic and environmental assessment of remanufacturing strategies for product+ service firms. *Production and Operations Management*, 2014, 23(5): 744–761.
- [41] Faccio M, Persona A, Sgarbossa F, et al. Sustainable SC through the complete reprocessing of end-of-life products by manufacturers: A traditional versus social responsibility company perspective. *European Journal of Operational Research*, 2014, 233(2): 359–373.

作者简介:

牛水叶(1988—), 女, 山东日照人, 博士生, 研究方向: 物流与供应链管理, Email: blueanglelove@126.com;

李勇建(1973—), 男, 山东菏泽人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 物流与供应链, 应急管理, 优化与决策, Email: liyongjian@nankai.edu.cn.

附录 命题5证明

证明 在多生产周期中再制造供应链产量决策的计算过程如下:

$$\begin{aligned}
 q_{r1} &= q_r, \\
 q_{r2} &= q_r + \Delta q_{r2} = q_r + \rho/\eta q_{r1} = (1 + \rho/\eta) q_r, \\
 q_{r3} &= q_r + \Delta q_{r3} = q_r + \rho/\eta (q_{r1} + q_{r2}) = (1 + \rho/\eta)^2 q_r, \\
 &\vdots \\
 q_{r\eta} &= q_r + \Delta q_{r\eta} = q_r + \rho/\eta (q_{r1} + q_{r2} + \cdots + q_{r(\eta-1)}) = (1 + \rho/\eta)^{\eta-1} q_r,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= q_{r1} + q_{r2} + q_{r3} + \cdots + q_{r\eta} = \eta/\rho((1+\rho/\eta)^\eta - 1)q_r, \\
q_{r(\eta+1)} &= q_r + \Delta q_{r\eta+1} = q_r + \rho/\eta(q_{r2} + q_{r3} + \cdots + q_{r\eta}) = ((1+\rho/\eta)^\eta - (1+\rho/\eta) + 1)q_r, \\
q_{r(\eta+2)} &= q_r + \Delta q_{r\eta+2} = q_r + \rho/\eta(q_{r3} + q_{r4} + \cdots + q_{r(\eta+1)}) = ((1+\rho/\eta)^{\eta+1} - (1+\rho/\eta)^2 + 1)q_r, \\
&\vdots \\
q_{r(2\eta)} &= q_r + \Delta q_{r2\eta} = q_r + \rho/\eta(q_{r(\eta+1)} + q_{r(\eta+2)} + \cdots + q_{r(2\eta-1)}) = ((1+\rho/\eta)^{2\eta-1} - (1+\rho/\eta)^\eta + 1)q_r, \\
Q_2 &= q_{r(\eta+1)} + q_{r(\eta+2)} + q_{r(\eta+3)} + \cdots + q_{r2\eta} = (\eta + \eta/\rho(1+\rho/\eta)((1+\rho/\eta)^{\eta-1} - 1)((1+\rho/\eta)^\eta - 1))q_r, \\
q_{r(2\eta+1)} &= q_r + \Delta q_{r(2\eta+1)} = q_r + \rho/\eta(q_{r(\eta+2)} + q_{r(\eta+3)} + \cdots + q_{r(2\eta)}) = ((1+\rho/\eta)^{2\eta} - (1+\rho/\eta)^{\eta+1} + 1)q_r, \\
q_{r(2\eta+2)} &= q_r + \Delta q_{r(2\eta+2)} = q_r + \rho/\eta(q_{r(\eta+3)} + q_{r(\eta+4)} + \cdots + q_{r(2\eta+1)}) = ((1+\rho/\eta)^{2\eta+1} - (1+\rho/\eta)^{\eta+2} + 1)q_r, \\
&\vdots \\
q_{r(3\eta)} &= q_r + \Delta q_{r3\eta} = q_r + \rho/\eta(q_{r(2\eta+1)} + q_{r(2\eta+2)} + \cdots + q_{r(3\eta-1)}) = ((1+\rho/\eta)^{3\eta-1} - (1+\rho/\eta)^{2\eta} + 1)q_r, \\
Q_3 &= q_{r(2\eta+1)} + q_{r(2\eta+2)} + q_{r(2\eta+3)} + \cdots + q_{r3\eta} = (\eta + \eta/\rho(1+\rho/\eta)^{\eta+1}((1+\rho/\eta)^{\eta-1} - 1)((1+\rho/\eta)^\eta - 1))q_r, \\
&\vdots \\
Q_N &= q_{r((N-1)\eta+1)} + q_{r((N-1)\eta+2)} + q_{r((N-1)\eta+3)} + \cdots + q_{rN\eta} \\
&= (\eta + \eta/\rho(1+\rho/\eta)^{(N-2)\eta+1}((1+\rho/\eta)^{\eta-1} - 1)((1+\rho/\eta)^\eta - 1))q_r, \\
Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_N = (\eta/\rho((1+\rho/\eta)^\eta - 1) + \\
&\quad (N-1)\eta + (\eta/\rho)^2(1+\rho/\eta)((1+\rho/\eta)^{N-1} - 1)((1+\rho/\eta)^{\eta-1} - 1)((1+\rho/\eta)^\eta - 1))q_r \\
&= ((N-1)\eta + \eta/\rho + (\eta/\rho)^2(1+\rho/\eta)((1+\rho/\eta)^{N-1} - 1)((1+\rho/\eta)^{\eta-1} - 1))((1+\rho/\eta)^\eta - 1)q_r, \\
Q_{N+1} &= \left(\eta + \eta/\rho(1+\rho/\eta)^{(N-1)\eta+1}((1+\rho/\eta)^{\eta-1} - 1)((1+\rho/\eta)^\eta - 1) + (1 - (\rho/\eta)^\eta) \frac{\eta\rho}{(\eta - \rho)^2} + \frac{\eta^2}{\rho - \eta} \right) q_r.
\end{aligned}$$