基于无穷跳–扩散双因子交叉回馈模型的期权定价

朱福敏[1]，郑尊信[1]，吴恒煜[2,3]

(1. 深圳大学经济学院, 广东 深圳 518060; 2. 暨南大学管理学院, 广东 广州 510000;
3. 金融安全协同创新中心, 四川 成都 610000)

摘要: 为研究股市无穷跳跃和连续扩散行为特征, 提出了一类能够捕捉无穷跳和扩散之间交互影响的动态跳–扩散双因子交叉回馈模型. 借助 Lévy 过程条件特征函数、局部风险中性关系和贝叶斯学习技术, 给出了动态跳–扩散随机过程的期权定价方法, 并进行标准普尔 500 指数欧式期权标准化合约的实证研究, 对比了有限跳–扩散及无穷跳–扩散模型定价差异. 研究结果表明: 以 VG 为基础的无穷跳–扩散全面优于 Merton 的有限跳–扩散双因子模型; 跳–扩散交叉回馈模型具有最小的期权定价误差; 跳跃行为相比扩散波动具有更高的持续性、更强的杠杆作用和更高的风险市场价格.

关键词: 跳–扩散模型; 无穷跳跃行为; 交叉回馈; 序贯 Bayes 学习

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000−5781(2017)05−0638−10

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2017.05.007

Option valuation for the double-factor-cross-feedback infinite activity jump-diffusion model

Zhu Fumin[1], **Zheng Zunxin**[1], **Wu Hengyu**[2,3]

(1. College of Economics, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China; 2. Management School, Jinan University, Guangzhou 510000, China; 3. Collaborative Innovation Center of Financial Security, Chengdu 610000, China)

Abstract: In order to study the behaviors of infinite jumps and diffusions in stock markets, this paper presents a dynamic double-factor-cross-feedback jump-diffusion process that captures the interaction between jumps and diffusions. Using the conditional characteristic function of Levy process, local risk-neutral valuation relationship and sequential Bayesian learning technology, this paper develops a generalized risk-neutral pricing method for the dynamic jump-diffusion model, empirically studies the standardized European options on S&P 500 index, and gives a comprehensive comparison of the pricing accuracy between the finite activity jump-diffusion model and infinite activity jump-diffusion model. Compared with the diffusion volatility, the infinite activity jump-diffusion model (VG-JD) performs better than the finite jump-diffusion model (MJ-JD). The cross-feedback model always performs the best with the lowest errors in option valuation. It also finds that, the jumps have a higher persistence, stronger leverage effect and a higher market price.

Key words: jump-diffusion model; infinite-activity jumps; cross-feedback; sequential Bayesian learning

收稿日期: 2016−07−14; 修订日期: 2017−03−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71601125; 71471119; 71171168); 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目(16YJC790030).

1 引 言

许多国家的金融市场都呈现波动率集聚效应, 同时也存在非连续随机跳跃行为[1,2]. 2008 年金融危机后, 市场的暴跌行为表现出很强的集聚性和持续性. 这些负向跳跃行为还会对市场造成更严重的长期影响, 导致衍生品市场也无法幸免于难[3,4]. 为了研究股市跳跃行为存在集聚特征及持续性效应时的期权定价问题, 本文提出了一类动态无穷跳–扩散双因子交叉回馈模型, 并结合序贯贝叶斯学习方法以及局部风险中性估值关系进行了期权定价的实证研究. 一方面, 量化跳跃行为的持续性水平和回馈效应, 从而精确研究跳跃风险的长期影响和回馈机制; 另一方面, 比较有限跳–扩散及无穷跳–扩散模型在期权市场上的定价差异. 这些研究结论将有助于丰富期权定价理论, 同时也能为市场跳跃风险评估和监督管理提供新思路.

自上个世纪 60 年代起, 大量文献对资产价格模型进行了假设检验. 研究表明, 随机跳跃和动态波动率被认为是金融市场的重要特征. 如今, 跳跃行为和扩散波动的共存问题也引起了学术界的广泛关注[5−8]. 传统跳跃模型认为跳跃强度是一个常数, 而金融危机发生之后, 这种假设明显与市场表现不符. 事实上, 市场隐含的跳跃强度和可观测的跳跃到达率都在随着时间改变, 并出现跳跃集聚和联跳现象. Eraker 等[9]通过 S&P 500以及纳斯达克 100 指数的诊断和估计, 给出了存在联跳行为的证据. Eraker[1]进一步表明, 市场中不仅存在联跳行为, 而且时变跳跃强度在期权和收益率的联合估计方面具有更好的表现. Christoffersen 等[3]则在Lévy-GARCH模型的基础上建立时变跳跃强度的离散时间模型, 发现跳跃过程的风险溢价占据重要部分, 并得到了跳跃集聚的证据. Fulop 等[4]采用随机波动率的跳跃自激发(self-exciting)模型研究联跳行为、集聚现象和非对称回馈效应, 研究结果表明, 金融危机之后时变跳跃强度变得越来越显著. Lee 等[10]对高频交易数据进行了非参数统计检验, S&P 500指数及一些个股的随机跳跃间隔非常不规则, 认为在价格和收益率建模中应考虑时变跳跃强度. Aït-sahalia 等[11]提出了一类简化形式的跳跃集聚模型来研究跳跃自激发行为和跳跃互激发现象(cross-exciting), 并将跳跃强度作为市场压力的一项指标. 这些研究从多个角度说明价格的跳跃行为和扩散波动不仅共存, 而且都存在相互作用的集聚性, 价格模型中需要考虑动态的跳跃强度.

传统跳–扩散的期权定价模型主要考虑有限跳跃行为. 然而有限跳跃模型无法解释市场大量高频率小跳跃. Madan 等[12]采用了任意时间内可发生无限次跳跃行为的 VG 过程来研究股价的非连续性运动. 研究显示, VG 跳跃在收益率拟合和期权定价方面可以替代有限跳–扩散过程. Lee 等[10]的研究表明, 不管是个股还是指数, 其跳跃行为都属于无穷活动率类型. Li 等[13], Fulop 等[4]直接采用了 VG 这一无穷跳跃研究随机波动率和跳跃行为. 吴恒煜等[6]构建了一类 Lévy-GARCH 模型进行期权定价的实证研究, 研究显示, VG 和 CTS 等无穷跳跃相比有限跳跃具有更好的定价表现. 当然, 金融市场的跳跃行为不是彼此孤立存在的, 跳跃行为同样呈现聚集、自激发以及长记忆性的特点, 且与波动率的变化存在相互非对称回馈作用. 陈浪南等[14]构建了一类 ARVI-GARCH-J 的混合 GARCH 模型, 证明跳跃行为与条件波动率之间相互直接回馈, 且条件波动率亦对跳跃预期能产生显著的回馈效应. Fulop 等[4]的研究也发现, 负向跳跃可以同时对收益波动率和跳跃强度产生回馈作用, 这种回馈效应也是非对称的. 吴恒煜等[6]进一步表明香港股市的纯跳跃行为不仅存在持续性, 还具有显著的杠杆效应, 并影响期权定价. 其中 VG 及调和稳态模型都能捕获尖峰、厚尾特征, 表明无穷跳跃行为在期权定价模型中起着重要作用[15]. 跳跃也被证明具有非对称的回馈效应. 可见, 在动态跳–扩散双因子框架下研究无穷跳行为对期权定价的影响显得十分必要.

依据上述文献背景, 本文提出了动态跳–扩散双因子交叉回馈模型, 并对有限跳跃和无穷跳跃行为的期权定价进行对比. 模型既可以刻画时变的跳跃到达率和波动率, 也能研究跳跃自激发行为和波动率回馈机制. 在平稳性分析的基础上, 量化无穷跳跃行为的群聚程度、杠杆效应及非对称性. 由于双因子交叉回馈模型具有高度的非高斯性、非线性性, 这给模型的参数估计和期权定价带来了极大的困难. 针对此类动态模型, 本文在期权定价研究中参考 Christoffersen 等[3]的局部风险中性关系, 推导满足无套利条件的期权定价模型, 给出非高斯情形下的定价方法. 同时, 考虑状态和参数的不确定性, 采用贝叶斯学习方法进行模型估计, 以

提高风险溢价的估计精度1. 这种参数学习方法考虑了模型的不确定性, 一方面可以降低收益率尾部行为和极端事件的影响, 另一方面, 投资者也能够根据最新观测序贯地更新自己的信念、逐步改进自己的认知, 从而得到更加可靠的估计, 便于比较分析无穷跳–扩散和有限跳– 扩散模型的定价结果.

2 跳–扩散双因子定价模型

2.1 价格过程

本文对股票价格取对数, 并假设对数收益率的随机微分方程写成如下动态跳–扩散半鞅随机过程

$$\mathrm{d}L_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t + x_t \mathrm{d}J_t, \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}L_t$ 表示对数价格的变化, μ_t 表示漂移率. W_t 表示 Winner 过程, J_t 为跳跃达到率的计数器. σ_t 为扩散瞬时波动率; x_t 表示即时跳跃幅度. 那么 $\sigma_t \mathrm{d}W_t$ 为随机扩散项, $x_t \mathrm{d}J_t$ 为随机跳跃项, 两者共存时, 该模型就是跳–扩散双因子模型. $\mathrm{d}J_t$ 称为瞬时的已实现跳跃到达率, 它由时变的跳跃强度和跳跃活动率控制.

若假设跳跃强度及跳跃到达率随时间而变化, 模型进化为动态跳–扩散随机过程. $\mathrm{d}J_t$ 可描述时变的跳跃活动率及动态的跳跃强度. 由于 Lévy 测度能够便利地描述随机跳跃行为的形态(比如便于区分跳跃的活动率水平), 并且提供封闭的特征函数表达式用于测度变换和参数估计, 因此本文采用 Lévy 过程的跳跃测度来描述双因子中的跳跃行为. 对数收益率受到两种不同类型的随机冲击: 一种是连续扩散的布朗运动, 其扩散率为 σ_t, 也称扩散波动率和扩散风险; 另一种是跳跃行为造成的非连续性冲击, $\mathrm{d}J_t$ 为跳跃行为的真实到达率, 是跳跃风险、市场发生跳跃的压力系数. 分别采用复合泊松跳跃的 Merton Jump(MJ) 和无穷跳跃的 Variance Gamma(VG)两类随机过程刻画式(1)中的随机跳跃幅度. 这两种过程分别代表有限跳跃和无穷跳跃行为. 其中有限跳跃的 MJ 随机过程的跳跃测度为

$$v(\mathrm{d}x) = \lambda_{\mathrm{MJ}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathrm{MJ}}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_{\mathrm{MJ}})^2}{2\sigma_{\mathrm{MJ}}^2}\right) \mathrm{d}x,$$

其中 λ_{MJ} 为跳跃强度, $\mu_{\mathrm{MJ}}, \sigma_{\mathrm{MJ}}^2$ 分别为跳跃幅度的均值和方差, 其矩母指数表示为

$$\phi_x(u) = \lambda_{\mathrm{MJ}} \left(\exp\left(u\mu_{\mathrm{MJ}} + \frac{u^2\sigma_{\mathrm{MJ}}^2}{2}\right) - 1\right).$$

无穷跳跃 VG 过程可以表示为两个 Gamma 随机过程的差, 即

$$x_t = \dot{\varGamma}_t(C, M) - \dot{\varGamma}_t(C, G), \tag{2}$$

其中 VG 过程的跳跃测度为

$$v(\mathrm{d}x) = \begin{cases} \dfrac{C\exp(Gx)}{|x|} 1_{(x<0)} \mathrm{d}x \\ \dfrac{C\exp(-Mx)}{x} 1_{(x>0)} \mathrm{d}x, \end{cases} \tag{3}$$

G, M 分别控制负向跳跃和正向测度, $G \neq M$ 时具有非对称特点. 相应地, 其矩母指数为

$$\phi_x(u) = C \ln \frac{GM}{GM + (M-G)u - u^2}.$$

上述半鞅随机过程同时考虑了非连续性的跳跃行为以及扩散波动率, 其特征函数也给本文的参数估计和测度变换带来的极大的便利. 本文分别假设随机跳跃服从 MJ 和 VG 这两类随机过程. MJ 过程属于有限

1Eraker 等[1], Li 等[13], Fulop 等[4]在研究中采用了贝叶斯方法进行模型的估计, 并考虑了状态的不确定性或参数的不确定性, 这些设定改进了风险溢价的估计精度, 表明了不确定性对资产定价有重要影响. 吴恒煜等[6], Fulop 等[4]分别针对 Lévy-GARCH 和Lévy-SV模型引入了序贯贝叶斯参数学习方法, 并研究了该方法在风险管理、波动率预测及期权定价上的表现. 参数学习方法在风险溢价、风险测度和期权定价三个层面上都有更优越的表现.

跳跃模型. 相比 MJ 而言, VG 过程既能够捕获类似泊松这样的大跳跃, 也能捕获比扩散还小的无穷小跳跃. 下文进一步引入时变的跳跃到达率, 从而构建动态的跳–扩散双因子模型, 并分析跳跃行为的集聚效应和波动率回馈特征.

2.2 风险溢价

根据离散观测变量的特征, 此节进一步对半鞅模型进行离散化, 得到两类随机冲击的风险溢价和市场价格. 用 z_t 表示扩散因子 $\mathrm{d}W_t$, h_t 代表局部已实现跳跃到达率 $\mathrm{d}J_t$, 那么对数收益率可以表示为[2]

$$y_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \mu_t - \phi_x\left(h_t\right) - \frac{\sigma_t^2}{2} + h_t x_t + \sigma_t z_t, \tag{4}$$

其中 z_t 服从标准正态分布, 跳跃随机因子的矩母指数为 $\phi_x\left(u\right) = \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{ux}]$, 用以对跳跃项进行凸度修正, 使得该随机过程为一个指数鞅.

如果定义 $\lambda_{\mathrm{J}}, \lambda_{\mathrm{D}}$ 分别为跳跃行为的风险市场价格、扩散风险的市场价格, 那么, 资产对数收益率的连续漂移率可拆解为

$$\mu_{t+1} = r_{t+1} + \lambda_{\mathrm{J}} h_{t+1} + \lambda_{\mathrm{D}} \sigma_{t+1}. \tag{5}$$

上式将收益率分解为三部分: 无风险收益、承受跳跃冲击的风险补偿以及扩散波动率的风险溢价. λ_{J} 表示单位跳跃风险的市场价格, λ_{D} 表示单位扩散风险的市场价格. 对股票的溢价进行分离, 得到不同风险对应的市场价格, 便于进一步推导模型的风险中性定价关系.

2.3 交叉回馈

以往文献中, 对扩散和跳跃双因子进行动态化建模的方法有很多, 为了研究动态跳跃强度和扩散波动率之间的相互影响, 本文提出一种更为广义的跳–扩散交叉回馈模型, 即采用下式来联合捕获跳跃集聚和波动率非对称回馈, 令

$$\begin{pmatrix} h_{t+1}^2 \\ \sigma_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} \, \beta_{12} \\ \beta_{21} \, \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} \, \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \, \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 \left(x_t - \gamma_{\mathrm{J}}\right)^2 \\ \sigma_t^2 \left(z_t - \gamma_{\mathrm{D}}\right)^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

若用 V_t 代表收益率的总方差, 那么它由扩散导致的方差和跳跃导致的方差组成. 其中 α_{10}, α_{20} 分别为已实现跳跃到达率和条件波动率的截距项, 而 $\beta_{ij}, i, j = 1, 2$ 则反映了 j 的历史状态对 i 状态的滞后影响. 同理, $\alpha_{ij}, i, j = 1, 2$ 反映了 j 的历史冲击对 i 状态的回馈效应, 当 $i = j$ 时, 表示自身回馈, $i \neq j$ 为交叉回馈; $\gamma_{\mathrm{J}}, \gamma_{\mathrm{D}}$ 则分别体现跳跃和扩散冲击的杠杆系数, 用以捕获信息对波动率冲击的非对称性. 此模型能够完整地描述波动率、跳跃的集聚和非对称相互作用, 它既包含自身影响, 又包含交叉影响, 因此本文称之为"动态跳–扩散双因子交叉回馈模型"(后文简写为 CFJDEC). 上述模型包括了许多现有文献提出的模型, 可作为研究的比较对象. 根据 $\alpha_{ij}, \beta_{ij} = 0, i \neq j$ 是否成立的设定, CFJDEC 模型内嵌了多种跳–扩散过程. 例如, 当 $\alpha_{1j}, \beta_{1j} = 0, j = 1, 2$ 时, 上式简化为常见的条件异方差模型, 而当 $\alpha_{2j}, \beta_{2j} = 0, j = 1, 2$ 时, 式(5)退化成为单因子纯跳跃 Lévy-GARCH 模型. 对于双因子模型而言, CFJDEC 嵌套了以下跳–扩散过程类型, 包括: 1) 半回馈(half-feedback, HFJDEC): $\beta_{12}, \beta_{21}, \alpha_{12} = 0$, 与 Fulop 等[4] 提出的 SE-M 类似, 包含了跳跃对波动率的回馈、跳跃自激发行为和波动率集聚效应, 但该模型未纳入波动率对跳跃的回馈和交叉影响, 因此称为"半回馈机制", 是本文的对比模型. 2) 互回馈(interact-feedback, IFJDEC): 即 $\beta_{12}, \beta_{21} = 0$, 属于跳–扩散相互回馈模型, 但未纳入历史跳跃率和历史波动率之间的交叉影响, 因此, 称为"互回馈机制"模型. 3) 交叉回馈(cross-feedback CFJDEC): $\beta_{ij}, \alpha_{ij} \neq 0$, 全面纳入历史跳跃率和历史波动率之间的持续性影响和交叉回馈效应, 因此称为" 交叉回馈机制"模型.

[2]这里 $h_t = \Delta J_t$. 作为计数器, $\mathrm{d}J_t$ 表示瞬时的跳跃到达率, 那么 h_t 是单位时间内随机跳跃已经发生的次数, 与有限跳跃模型通常所用的跳跃强度不同. 由于本文假设随机跳跃是无穷活动率的, 其跳跃强度为无穷大, 因此不能直接采用跳跃强度来表示跳跃风险. 本文避开跳跃强度这一潜在变量, 使用跳跃到达率作为跳跃风险指标, 一方面适用于所有有限和无穷活动率的跳跃模型, 另一方面减少了隐变量, 降低了模型复杂度. 使用跳跃到达率的类似研究, 可参见文献[4,6,13].

研究表明, 跳跃的出现不仅自身激发出后续的跳跃行为, 还会导致波动率发生联跳, 并引起各自的非对称回馈效应, 因此跳跃行为对波动率的回馈是一项不可忽视的重要特征[1,4,11]. 然而, 现在文献尚未考虑扩散波动率反馈于跳跃行为的研究. 式(5)含有跳跃对扩散波动率回馈效应的特征之外, 还额外考虑了跳跃和扩散对彼此的持续性影响和交叉的非对称回馈, 具有更好的兼容性. 参数的边界条件参见附录 A.

3 跳–扩散双因子模型的风险中性变换

在进行期权定价研究之前, 需要对随机因子进行局部等价鞅测度变换, 从而构建风险中性测度下的价格随机模型. 由于模型的状态变量具有时变性, 因此, 本文借助 Duan[10]和 Christoffersen[1]的局部风险中性估值关系(LRNVR)来推导无套利定价框架. 首先, LRNVR能够解决局部状态随条件变化的测度变换问题; 同时, 该方法提供了满足 Esccher 转换的一般等价鞅测度的解析解; 另外, 这种变换方法还捕捉了历史测度和风险中性测度的紧密联系. 本节以交叉回馈模型CFJDEC 为例, 阐述其风险中性定价变换方法, 其他简约模型是 CFJDEC 的特例. 在任意 $0 < t < T$ 时刻, 股票价格的离散模型为

$$S_t = S_{t-1} \exp\left(r_t + \lambda_{\mathrm{J}} h_t + \lambda_{\mathrm{D}} \sigma_t - \phi_x(h_t) - \frac{\sigma_t^2}{2} + h_t x_t + \sigma_t z_t\right). \tag{7}$$

现引入测度变换的 Esscher 因子, 根据等价测度关系, 真实测度 P_t 下的双因子随机模型与条件等价鞅测度(EMMs)Q_t 应满足

$$\xi_{x_t,z_t}(\vartheta_1,\vartheta_2)|\mathcal{F}_{t-1} = \frac{\mathrm{dQ}_t}{\mathrm{dP}_t}\Big|\mathcal{F}_{t-1} = \frac{\mathrm{e}^{-\vartheta_1 x_t - \vartheta_2 z_t}}{\mathrm{E}[\mathrm{e}^{-\vartheta_1 x_t - \vartheta_2 z_t}|\mathcal{F}_{t-1}]} = \mathrm{e}^{-\vartheta_1 x_t - \vartheta_2 z_t - \phi_x(-\vartheta_1) - \frac{\vartheta_2^2}{2}}, \tag{8}$$

而风险中性的 Q_t 测度下为无风险收益, 因此 ϑ_1, ϑ_2 应满足

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}_t}[\mathrm{e}^{y_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{y_t}\xi_{x_t,z_t}(\vartheta_1,\vartheta_2)|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathrm{e}^{r_t}.$$

联合上述两式, 即

$$\lambda_{\mathrm{J}} h_t + \lambda_{\mathrm{D}}\sigma_t = \phi_x(h_t) + \phi_x(-\vartheta_1) - \phi_{x_t}(h_t - \vartheta_1) + \vartheta_2\sigma_t. \tag{9}$$

同理, 双因子模型中的随机冲击 x, z 在 Q_t 测度下的矩母指数表达为

$$\phi_x^{\mathrm{Q}_t}(u) = \ln \mathrm{E}^{\mathrm{Q}_t}[\mathrm{e}^{ux}] = \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{ux}\xi_{x,z}(\vartheta_1,\vartheta_2)] = \phi_x(u-\vartheta_1) - \phi_x(-\vartheta_1), \tag{10}$$

$$\phi_z^{\mathrm{Q}_t}(u) = \ln \mathrm{E}^{\mathrm{Q}_t}[\mathrm{e}^{uz}] = \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{uz}\xi_{x,z}(\vartheta_1,\vartheta_2)] = -\vartheta_2 u + \frac{u^2}{2}. \tag{11}$$

上式说明, 连续扩散的风险中性等价鞅仅仅发生了位移而不改变其方差, 而非连续性跳跃的形变则较为复杂, 不仅分布发生了位移, 而且形状也会有所改变. 根据式(9)和式(10), 跳跃和扩散风险溢价满足

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \vartheta_2, \tag{12}$$

$$\lambda_{\mathrm{J}} = \frac{\phi_x(h_t) - \phi_x^{\mathrm{Q}_t}(h_t)}{h_t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\vartheta_1)^n \frac{\phi_x^{(n)}(0) - \phi_x^{(n)}(h_t)}{n!\, h_t}, \tag{13}$$

其中 $\phi_x^{(n)}(u) = \dfrac{\mathrm{d}^n\phi_x(u)}{\mathrm{d}u^n}$.

很显然, 在存在跳跃的情形下, ϑ_1 成为风险中性期权定价的唯一的自由度. 综合上述结果, 满足风险中性鞅测度时股票价格服从

$$S_t^* = S_{t-1}^* \exp\left(r_t - \phi_{x^*}(h_t) - \sigma_t^2/2 + h_t x_t^* + \sigma_t z_t^*\right), \tag{14}$$

作为等价鞅的映射关系. 将上述结果代入式(5), 有

$$\begin{pmatrix} h_{t+1}^2 \\ \sigma_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11}\ \beta_{12} \\ \beta_{21}\ \beta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}\phi_x''(-\vartheta_1)\ \alpha_{12} \\ \alpha_{21}\phi_x''(-\vartheta_1)\ \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_t^2\left(x_t^* - \frac{\gamma_{\mathrm{J}} - \phi_x'(-\vartheta_1)}{\sqrt{\phi_x''(-\vartheta_1)}}\right)^2 \\ \sigma_t^2\left(z_t^* - (\gamma_{\mathrm{D}} + \vartheta_2)\right)^2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

在期权定价中, 只要校准得到 ϑ_1 的值, 即可一一对应地确定风险中性条件下随机变量的分布, 并进行定价, 从而实现期权的无套利定价研究, 在非完全市场上, 也给了无套利模型一个新的自由度, 这为带跳跃行为的无套利定价研究提供了理论基础. 其中 VG 过程的跳跃行为等价鞅位移及二阶关系 $\phi_x'(-\vartheta_1), \phi_x''(-\vartheta_1)$ 为(参见附录 B)

$$\phi_x'(-\vartheta_1) = \frac{C}{M+\vartheta_1} - \frac{C}{G-\vartheta_1},\ \ \phi_x''(-\vartheta_1) = \frac{C}{(M+\vartheta_1)^2} + \frac{C}{(G-\vartheta_1)^2}.$$

VG 过程的风险中性测度满足 $(C, G-\vartheta_1, M+\vartheta_1)$. 另外, MJ 过程的跳跃行为等价鞅位移及二阶关系 $\phi_x'(-\vartheta_1), \phi_x''(-\vartheta_1)$ 为(参见附录 C)

$$\phi'(-\vartheta_1) = \lambda_{\mathrm{MJ}}\mathrm{e}^{-\mu_{\mathrm{MJ}}\vartheta_1 + \frac{\vartheta_1^2\sigma_{\mathrm{MJ}}^2}{2}}(\mu_{\mathrm{MJ}} - \vartheta_1\sigma_{\mathrm{MJ}}^2),\ \ \phi''(-\vartheta_1) = \lambda_{\mathrm{MJ}}\mathrm{e}^{-\mu_{\mathrm{MJ}}\vartheta_1 + \frac{\vartheta_1^2\sigma_{\mathrm{MJ}}^2}{2}}((\mu_{\mathrm{MJ}} - \vartheta_1\sigma_{\mathrm{MJ}}^2)^2 + \sigma_{\mathrm{MJ}}^2).$$

MJ 过程的风险中性测度满足

$$\lambda_{\mathrm{MJ}}^* = \lambda_{\mathrm{MJ}}\mathrm{e}^{-\mu_{\mathrm{MJ}}\vartheta_1 + \frac{\vartheta_1^2\sigma_{\mathrm{MJ}}^2}{2}},\ \ \mu_{\mathrm{MJ}}^* = \mu_{\mathrm{MJ}} - \vartheta_1\sigma_{\mathrm{MJ}}^2,\ \ \sigma_{\mathrm{MJ}}^{2*} = \sigma_{\mathrm{MJ}}^2.$$

有了上述关系, 即可实现测度变换和期权定价实证研究.

4 期权定价实证研究

4.1 数据选取

本节以 S&P 500 及其标准欧式期权作为研究对象. 时间从 2009–01–01∼2015–08–31. 首先以日对数收益率作为观测数据进行贝叶斯分析, 为后文模型的定价提供信息. 期权方面, 选取了同时期 S&P 500 指数的标准化欧式期权. 所谓标准化期权, 是指远期价格严格等于执行价的平价欧式期权. 市场上是没有如此精确的标准化期权的, 交易所为了方便估计市场的隐含波动率指数信息, 对平价期权进行了加权, 从而构造了恰好 $F=K$ 的虚拟的标准化期权. 相对而言, 标准化合约涵盖了交易最为活跃而最少噪声的平价期权.

4.2 参数估计

由于模型包含多维非线性状态变量, 本节采用参数学习方法进行估计. 该方法结合了 MCMC 和序贯蒙特卡罗的粒子滤波技术, 可同时实现参数和变量的联合估计, 从而得到更加稳健的实证结果[6]. 其中 y_t, x_t 分别表示 t 时刻的观测变量和状态变量, 令 $\boldsymbol{\Theta}$ 为 CFJDEC 模型参数, 再将收益率序列记为 $y_{1:T} = \{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$, 跳跃到达率 $x_{0:T} = \{x_0, x_1, \ldots, x_T\}$ 为潜在变量. 根据贝叶斯法则, 在 t 时刻,

$$p\left(\boldsymbol{\Theta}, x_{0:t}\left|y_{1:t}\right.\right) \propto p_{\vartheta}\left(x_{0:t}\left|y_{1:t}, \boldsymbol{\Theta}\right.\right) p\left(\boldsymbol{\Theta}\left|y_{1:t}\right.\right). \tag{16}$$

采用粒子滤波计算跳跃状态的后验密度 $p_{\vartheta}\left(x_{0:t}\left|y_{1:t}, \boldsymbol{\Theta}\right.\right)$. 第二部分 $p\left(\boldsymbol{\Theta}\left|y_{1:t}\right.\right)$ 是参数的先验密度 $p\left(\boldsymbol{\Theta}\right)$和似然函数 $p\left(y_{1:t}\left|\boldsymbol{\Theta}\right.\right)$的乘积. 对于参数的更新, 则引入 MCMC 方法, 抽样规则为 $\boldsymbol{\Theta}^* \sim N(\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}})$, 其接受率为

$$\alpha\left(\boldsymbol{\Theta}^*\right) = 1 \wedge \frac{p\left(\boldsymbol{\Theta}^*\right) p\left(y_{1:t}\left|\boldsymbol{\Theta}^*\right.\right) N\left(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^*, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\right)}{p\left(\boldsymbol{\Theta}\right) p\left(y_{1:t}\left|\boldsymbol{\Theta}\right.\right) N\left(\boldsymbol{\Theta}^*; \boldsymbol{\Theta}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\right)}. \tag{17}$$

令 $\bar{\omega}(\boldsymbol{\Theta}^{(m)})$满足式(16), 这是一个标量, 重新抽样后, 等于 $1/M$, 此时, 参数的均值和方差阵分别为

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \sum_{m=1}^{M} \boldsymbol{\Theta}^{(m)} \bar{\omega}\left(\boldsymbol{\Theta}^{(m)}\right), \tag{18}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \sum_{m=1}^{M} \left(\boldsymbol{\Theta}^{(m)} - \hat{\Theta}\right) \bar{\omega}\left(\boldsymbol{\Theta}^{(m)}\right) \left(\boldsymbol{\Theta}^{(m)} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{19}$$

相比现有研究, 本文提出的 CFJDEC 框架考虑了跳–扩散之间的交叉影响. 以往的模型一般只研究跳

跃行为自身的持续性, 或仅分析跳跃对波动率的回馈. CFJDEC 具有很好的兼容性. HFJDEC 模型与 Fulop 等[4]类似, 属于半回馈, 是本文的基准模型. IFJDEC 相比 HFJDEC, 进一步考虑了波动对跳跃的互回馈, CFJDEC 是另外两个模型的一般化. 其中参数抽样数为 800, 状态抽样数 400, 这样就得到了 320 000 组粒子. 各模型参数估计和风险中性变换结果参见表 1.

表 1 定价模型的参数

Table 1 Parameters of pricing models

模型	历史测度(收益率)			风险中性测度(期权)		
	HFJDEC	IFJDEC	CFJDEC	HFJDEC	IFJDEC	CFJDEC
λ_{J}	0.124 2 (0.023 1)	0.119 9 (0.023 3)	0.054 8 (0.015 1)	–	–	–
λ_{D}	0.086 2 (0.022 2)	0.088 7 (0.028 7)	0.045 6 (0.015 2)	–	–	–
α_{10}	1.383 3e-05 (3.821 2e-06)	9.152 4e-06 (2.962 2e-06)	3.185 4e-06 (1.190 1e-06)	1.383 3e-05	9.152 4e-06	3.185 4e-06
β_{11}	0.444 5 (0.039 3)	0.410 1 (0.044 7)	0.375 1 (0.015 1)	0.444 5	0.410 1	0.375 1
β_{12}	–	–	0.180 8 (0.010 7)	–	–	0.180 8
α_{11}	0.166 9 (0.010 0)	0.125 3 (0.013 9)	0.092 9 (0.012 7)	0.038 5	0.033 6	0.066 2
α_{12}	–	0.045 1 (0.014 7)	0.020 5 (0.008 8)	–	0.045 1	0.020 5
γ_{J}	1.563 7 (0.084 9)	1.851 0 (0.148 7)	1.614 0 (0.123 7)	3.602 5	3.899 6	2.039 8
α_{20}	1.275 3e-06 (8.556 6e-07)	1.409 0e-06 (1.054 7e-06)	1.914 2e-06 (1.274 5e-06)	1.275 3e-06	1.409 0e-06	1.914 2e-06
β_{21}	–	–	0.174 5 (0.011 6)	–	–	0.174 5
β_{22}	0.346 9 (0.033 2)	0.341 9 (0.039 0)	0.364 7 (0.015 1)	0.346 9	0.341 9	0.364 7
α_{21}	0.011 1 (0.004 5)	0.016 4 (0.007 7)	0.071 0 (0.009 8)	0.002 6	0.004 4	0.050 6
α_{22}	0.109 0 (0.018 5)	0.080 7 (0.020 4)	0.088 6 (0.011 1)	0.109 0	0.080 7	0.088 6
γ_{D}	1.603 7 (0.173 6)	1.695 0 (0.273 5)	1.326 7 (0.111 3)	1.689 9	1.783 7	1.372 3
	MJ			MJ*		
λ_{MJ}	0.684 8 (0.008 9)	0.633 7 (0.005 7)	0.482 6 (0.102 1)	0.718 6	0.668 5	0.504 4
μ_{MJ}	-0.347 3 (0.002 8)	-0.403 5 (0.011 5)	-0.313 2 (0.082 1)	-0.428 4	-0.489 8	-0.398 2
σ_{MJ}	0.808 2 (0.003 3)	0.848 4 (0.002 3)	0.827 1 (0.039 3)	0.808 2	0.848 4	0.827 1
	VG			VG*		
C_{VG}	0.821 8 (0.026 5)	0.896 4 (0.031 0)	1.375 3 (0.033 8)	0.821 8	0.896 4	1.375 3
G_{VG}	2.224 8 (0.061 9)	2.249 9 (0.080 0)	1.882 3 (0.081 3)	2.160 6	2.130 1	1.827 5
M_{VG}	3.742 2 (0.197 8)	3.439 7 (0.207 2)	2.081 2 (0.155 6)	3.866 4	3.559 5	2.136 0

表 1 显示, 跳跃存在自激发行为, 且跳跃行为对波动率也是有显著的非对称回馈的, 负跳将导致更大的波动率变化. 研究表明, 波动率的非对称回馈来自跳和扩散两方面, 且跳跃方面的非对称性回馈强于扩散方面的波动率回馈. 同时, 跳跃风险的市场价格, 即市场对跳跃风险的补偿也是远远高于扩散风险的.

4.3 期权定价

本节将在 CFJDEC(交叉回馈), HFJDEC(半回馈), IFJDEC(互回馈)三种不同回馈机制下比较有限跳–扩散和无穷跳–扩散过程定价差异.

关于 S&P 500 指数的样本外期权定价, 结果参见表 2. 根据跳跃风险溢价结果, 以市场价格作为 ϑ_1, ϑ_2 的替代变量进行风险中性转换. 此时, VG 参数、杠杆系数变换为

$$C^* = C,\ M^* = M + \vartheta_1,\ G^* = G - \vartheta_1,$$

$$\gamma_{\mathrm{J}}^* = \frac{\gamma_{\mathrm{J}} - \phi_x'(-\vartheta_1)}{\sqrt{\phi_x''(-\vartheta_1)}},\ \gamma_{\mathrm{D}}^* = \gamma_{\mathrm{D}} + \vartheta_2.$$

同理, 风险中性测度下, MJ 的参数演变为

$$\lambda_{\mathrm{J}}^* = \lambda_{\mathrm{J}} \mathrm{e}^{-\mu_{\mathrm{J}}\vartheta_1 + \frac{\vartheta_1^2\sigma_{\mathrm{J}}^2}{2}},$$

$$\mu_{\mathrm{J}}^* = \mu_{\mathrm{J}} - \vartheta_1\sigma_{\mathrm{J}}^2, {\sigma_{\mathrm{J}}^2}^* = \sigma_{\mathrm{J}}^2.$$

在上述基础上, 采用 MCMC 法对风险中性价格进行模拟, 得到表 2 的 VG 跳–扩散模型及 MJ 跳–扩散模型的期权定价误差. 表中列出了期权的市场价格和模型的理论价格之间的定价损失函数. 其中 AAE 为绝对平均误差, ARPE 为平均相对误差百分比, RMSE均值平方根误差, RRMSE 相对均值平方根误差百分

比. 实证结果表明, 跳跃的风险溢价高于扩散的风险溢价, 跳跃和波动率集聚类似, 具有更强的集聚效应和杠杆效应. 根据期权定价方面的比较结果, 不管是价格方面的误差还是隐含波动率方面的误差, VG 无穷跳–扩散模型表现都优于MJ 有限跳–扩散模型, 且交叉回馈模型(CFJDEC)的定价误差最小, 精度显著优于半回馈(HFJDEC)和互回馈模型(IFJDEC).

表 2　模型的定价误差

Table 2　Pricing errors of models

	VG 无穷跳–扩散模型误差						MJ有限跳– 扩散模型误差					
	CFJDEC		IFJDEC		HFJDEC		CFJDEC		IFJDEC		HFJDEC	
	Price	IV	Price	IV	Price	IV	Price	IV	Price	IV	Price	IV
总体误差												
AAE	4.908 9	2.148 9	25.491 5	10.789 1	35.429 5	15.050 3	6.981 3	2.900 1	54.212 9	22.427 2	66.193 8	27.573 5
ARPE	0.151 6	0.147 1	0.720 2	0.707 5	0.993 9	0.979 5	0.194 3	0.183 8	1.509 1	1.421 6	1.842 6	1.747 8
RMSE	6.556 5	2.913 0	27.495 5	11.280 1	37.632 8	15.436 8	8.924 4	3.679 3	59.611 9	23.370 4	71.952 6	28.446 6
RRMSE	0.216 5	0.211 0	0.773 7	0.761 1	1.040 8	1.026 4	0.269 3	0.262 0	1.542 1	1.525 3	1.867 9	1.849 9
短期误差												
AAE	4.803 5	2.892 8	15.540 4	9.276 8	21.391 4	12.827 4	5.011 7	3.014 4	25.562 5	15.352 3	32.761 9	19.722 7
ARPE	0.203 6	0.201 5	0.648 9	0.638 5	0.879 9	0.868 1	0.194 2	0.191 0	0.990 5	0.972 7	1.269 5	1.249 6
RMSE	6.279 7	3.757 5	17.248 2	10.270 8	22.691 8	13.567 6	6.619 9	3.943 5	26.971 8	16.150 7	33.916 0	20.363 5
RRMSE	0.282 7	0.279 0	0.761 8	0.751 6	0.980 3	0.968 5	0.302 2	0.298 0	1.159 9	1.147 0	1.437 7	1.423 1
中期误差												
AAE	4.725 6	2.011 7	24.553 6	10.449 6	35.386 5	15.111 6	6.033 3	2.526 0	52.517 9	22.480 4	64.980 5	27.854 3
ARPE	0.133 2	0.131 9	0.676 8	0.668 2	0.969 9	0.959 7	0.162 2	0.156 8	1.411 9	1.395 6	1.747 0	1.729 3
RMSE	6.210 1	2.608 9	25.565 5	10.851 0	36.110 5	15.387 6	7.977 8	3.334 0	53.348 3	22.792 1	65.643 2	28.094 9
RRMSE	0.181 4	0.178 3	0.719 9	0.711 3	1.006 2	0.996 0	0.234 5	0.230 1	1.480 3	1.468 0	1.813 5	1.800 0
长期误差												
AAE	5.228 5	1.764 0	34.031 1	11.771 4	47.063 9	16.330 8	8.929 6	3.004 0	81.735 0	28.473 1	97.881 9	34.147 3
ARPE	0.117 0	0.113 0	0.742 4	0.731 1	1.023 7	1.010 6	0.191 9	0.183 2	1.756 5	1.736 4	2.103 5	2.082 4
RMSE	6.850 3	2.309 6	34.741 9	11.992 7	47.588 9	16.486 6	10.684 9	3.612 4	82.319 4	28.640 1	98.345 2	34.273 5
RRMSE	0.157 5	0.152 9	0.767 6	0.756 3	1.045 5	1.032 4	0.243 8	0.237 3	1.801 4	1.784 7	2.147 4	2.130 0

5　结束语

随机跳跃行为和波动率集聚是股票价格模型与期权定价中的重要因素. 金融市场中非连续跳跃也具有集聚性和持续性. 为此, 本文基于半鞅随机过程提出了一类动态无穷跳–扩散双因子交叉回馈模型, 用以捕捉跳跃和扩散之间的交互影响, 进一步借助条件特征函数傅里叶变换(FFT)、序贯贝叶斯学习方法以及局部风险中性估值关系进行了期权定价的实证研究. 本文模型不仅捕捉了跳跃和波动率的交叉回馈, 而且对有限跳–扩散模型及无穷跳–扩散模型的期权定价进行了全面比较. 理论方面, 通过 Lévy 过程条件特征函数给出了广义的动态跳–扩散过程的风险中性定价框架; 实证方面, 借助序贯贝叶斯学习技术、量化矩阵和期权定价损失函数分析, 比较了有限跳及无穷跳双因子模型的期权定价差异. 综上所述, 随机跳跃与连续扩散之间不仅存在交叉回馈效应，同时无穷跳跃行为在资产定价中扮演着极其重要的角色, 忽视跳跃风险将影响资产定价的准确性. 投资者和各方监管机构在定价、对冲和监管过程中应当重视股市中的随机跳跃行为.

参考文献:

[1] Eraker B. Do stock prices and volatility jump: Reconciling evidence from spot and option prices. The Journal of Finance, 2004, 59(3): 1367–1404.

[2] Maheu J M, McCurdy T H. News arrival, jump dynamics, and volatility components for individual stock returns. The Journal of Finance, 2004, 59(2): 755–793.

[3] Christoffersen P, Jacobs K, Ornthanalai C. Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S&P 500 returns and options. Journal of Financial Economics, 2012, 106(3): 447–472.

[4] Fulop A, Li J, Yu J, Self-exciting jumps, learning, and asset pricing implications. Review of Financial Studies, 2015, 28(3): 876–912.

[5] 张 维, 张海峰, 张永杰, 等. 基于前景理论的波动不对称性. 系统工程理论与实践, 2012, 32(3): 458–465.
Zhang W, Zhang H F, Zhang Y J, et al. Volatility asymmetry based on prospect theory. Systems Engineering: Theory & Practice, 2012, 32(3): 458–465. (in Chinese)

[6] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明, 等. 基于序贯贝叶斯参数学习的 Lévy 动态波动率模型研究. 系统工程理论与实践, 2017, 37(3): 556–569.
Wu H Y, Zhu F M, Wen J M, et al. Sequential Bayesian parameter learning for Lévy-driven volatility models. Systems Engineering: Theory & Practice, 2017, 37(2) 556–569. (in Chinese)

[7] Fama E F. The behavior of stock-market prices. Journal of Business, 1965, 38(1): 34–105.

[8] Press S. J. A compound events model for security prices. Journal of Business, 1967, 40(3): 317–335

[9] Eraker B, Johannes M, Polson N. The impact of jumps in equity index volatility and returns. Journal of Finance, 2003, 58(3): 1269–1300.

[10] Lee S S, Mykland P A. Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics. Review of Financial Studies, 2008, 21(6): 2535–2563.

[11] Aït-Sahalia Y, Cacho-Diaz J, Laeven R. Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes. Journal of Financial Economics, 2015, 117(3): 585–606.

[12] Madan D B, Carr P P, Chang E C. The variance gamma process and option pricing. European Finance Review, 1998, 2(1): 79–105.

[13] Li H, Wells M, Yu L. A bayesian analysis of return dynamics with Lévy jumps. Review of Financial Studies, 2008, 31(5): 2345–2378.

[14] 陈浪南, 孙坚强. 股票市场资产收益的跳跃行为研究. 经济研究, 2010(4): 54–66.
Chen L N, Sun J Q. Jump dynamics in stock returns. Economic Research, 2010(4): 54–66. (in Chinese)

[15] 吴恒煜, 朱福敏. GARCH驱动的历史滤波服从 Lévy 过程的期权定价. 系统工程学报, 2012, 27(3): 327–337.
Wu H Y, Zhu F M, Option pricing for historical filtering on Lévy processes driven by GARCH. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(3) : 327–337. (in Chinese)

作者简介:

朱福敏(1985—), 男, 江西赣州人, 博士, 讲师, 研究方向: 金融工程, Email: zhufumin@szu.edu.cn;

郑尊信(1979—), 男, 福建福清人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融工程, Email: zxzheng@szu.edu.cn;

吴恒煜(1970—), 男, 广东雷州人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融工程, Email: wuhengyu@163.com.

附录 A 参数边界分析

根据式(5)半鞅跳–扩散模型假设, 展开为

$$h_{t+1}^2 = \alpha_{10} + \beta_{11}h_t^2 + \beta_{12}\sigma_t^2 + \alpha_{11}h_t^2(x_t - \gamma_{\mathrm{J}})^2 + \alpha_{12}\sigma_t^2(z_t - \gamma_{\mathrm{D}})^2,$$
$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_{20} + \beta_{21}h_t^2 + \beta_{22}\sigma_t^2 + \alpha_{21}h_t^2(x_t - \gamma_{\mathrm{J}})^2 + \alpha_{22}\sigma_t^2(z_t - \gamma_{\mathrm{D}})^2.$$

对跳跃到达率h_{t+1}^2求条件期望, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[h_{t+1}^2|h_t^2] &= \alpha_{10} + \beta_{11}h_t^2 + \beta_{12}\sigma_t^2 + \alpha_{11}h_t^2\mathrm{E}[(x_t - \gamma_{\mathrm{J}})^2] + \alpha_{12}\sigma_t^2\mathrm{E}[(z_t - \gamma_{\mathrm{D}})^2] \\
&= \alpha_{10} + \Big(\beta_{11} + \alpha_{11}(\mathrm{E}[x_t^2] - 2\gamma_{\mathrm{J}}\mathrm{E}[x_t] + \gamma_{\mathrm{J}}^2)\Big)h_t^2 + \Big(\beta_{12} + \alpha_{12}(\mathrm{E}[z_t^2] - 2\gamma_{\mathrm{J}}\mathrm{E}[x_t] + \gamma_{\mathrm{D}}^2)\Big)\sigma_t^2 \\
&= \alpha_{10} + \Big(\beta_{11} + \alpha_{11}(\mathrm{E}[x_t]^2 + \mathrm{var}(x_t) - 2\gamma_{\mathrm{J}}\mathrm{E}[x_t] + \gamma_{\mathrm{J}}^2)\Big)h_t^2 + (\beta_{12} + \alpha_{12}(\mathrm{var}[z_t] + \gamma_{\mathrm{D}}^2))\sigma_t^2 \\
&= \alpha_{10} + \Big(\beta_{11} + \alpha_{11}(\mu_{\mathrm{J}}^2 - 2\gamma_{\mathrm{J}}\mu_{\mathrm{J}} + \gamma_{\mathrm{J}}^2 + \sigma_{\mathrm{J}}^2)\Big)h_t^2 + (\beta_{12} + \alpha_{12}(\sigma_{\mathrm{D}}^2 + \gamma_{\mathrm{D}}^2))\sigma_t^2 \\
&= \alpha_{10} + B_{11}h_t^2 + B_{12}\sigma_t^2.
\end{aligned}$$

其中 μ_{J} 和 σ_{J}^2 表示随机跳跃 x_t 的均值和方差, σ_{D}^2 表示随机扩散 z_t 的方差,

$$B_{11} = \beta_{11} + A_{11},\ A_{11} = \alpha_{11}((\mu_{\mathrm{J}} - \gamma_{\mathrm{J}})^2 + \sigma_{\mathrm{J}}^2),\ B_{12} = \beta_{12} + A_{12},\ A_{12} = \alpha_{12}(\sigma_{\mathrm{D}}^2 + \gamma_{\mathrm{D}}^2).$$

同理, 对扩散波动率σ_{t+1}^2求条件期望之后, 有$\mathrm{E}[\sigma_{t+1}^2|\sigma_t^2] = \alpha_{20} + B_{21}h_t^2 + B_{22}\sigma_t^2$, 且

$$B_{21} = \beta_{21} + A_{21},\ A_{21} = \alpha_{21}((\mu_{\mathrm{J}} - \gamma_{\mathrm{J}})^2 + \sigma_{\mathrm{J}}^2),\quad B_{22} = \beta_{22} + A_{22},\ A_{22} = \alpha_{22}(\sigma_{\mathrm{D}}^2 + \gamma_{\mathrm{D}}^2).$$

为进一步求解无条件期望, 并得到参数的边界和模型的约束条件, 首先联立跳跃到达率和扩散波动率的条件期望表达式, 有 $\mathrm{E}_\infty[h_{t+1}^2|h_t^2] = \alpha_{10} + B_{11}h_t^2 + B_{12}\sigma_t^2 = h_t^2$, $\mathrm{E}_\infty[\sigma_{t+1}^2|\sigma_t^2] = \alpha_{20} + B_{21}h_t^2 + B_{22}\sigma_t^2 = \sigma_t^2$.

再联立跳–扩散双因子的无条件期望, 有 $h^2=\dfrac{A_{10}\,(1-B_{22})+A_{20}B_{12}}{(1-B_{11})\,(1-B_{22})-B_{12}B_{21}}$, $\sigma^2=\dfrac{A_{20}\,(1-B_{11})+A_{10}B_{21}}{(1-B_{11})\,(1-B_{22})-B_{12}B_{21}}$.

系数A_{11},A_{22}分别度量跳跃和扩散的“自回馈效应”, A_{12},A_{21}分别度量跳跃和扩散的“互回馈”. 上述系数都是标量. 整个状态向量所受冲击的持续性 $B_{\rm all}$ 可以表示为

$$B_{\rm all}=1-((1-B_{11})\,(1-B_{22})-B_{12}B_{21})=B_{11}+B_{22}-B_{11}B_{22}+B_{12}B_{21}.$$

为满足方差和跳跃到达率的不为负及有界性, 上述指标应该满足如下条件

$$0<1-B_{11}\leqslant 1,\ 1<1-B_{22}\leqslant 1,\ 0<(1-B_{11})\,(1-B_{22})-B_{12}B_{21}\leqslant 1.$$

附录 B VG 跳跃测度变换

ΔX_t 的矩母指数表达为 $\phi_x(u)=C(\ln(GM)-\ln(G+u)-\ln(M-u))$,那么

$$\begin{aligned}\phi^{Q_t}_{\Delta X_t}(u)&=\mathrm{E}^{Q_t}\left[\mathrm{e}^{u\Delta X_t}|C,G,M\right]=\phi_{\Delta X_t}(u-\vartheta)-\phi_{\Delta X_t}(-\vartheta)\\&=C(\ln GM-\ln(G+u-\vartheta)-\ln(M-u+\vartheta))-C(\ln GM-\ln(G-\vartheta)-\ln(M+\vartheta))\\&=C(\ln G^*M^*-\ln(G^*+u)-\ln(M^*-u)),\end{aligned}$$

其中$M^*=M+\vartheta,G^*=G-\vartheta$.

同时 $$\phi'_{\Delta X_t}(u)=\frac{C}{M-u}-\frac{C}{G+u};\ \ \phi''_{\Delta X_t}(u)=\frac{C}{(M-u)^2}+\frac{C}{(G+u)^2}.$$

附录 C MJ 跳跃测度变换

根据 MJ 跳–扩散过程的矩母指数(这里是一般情况, 考虑扩散项, 因此有 5 个参数)

$$\phi_x(u)=\mu u+u^2\sigma^2/2+\lambda_{\rm J}\left(\exp(u\mu_{\rm J}+u^2\sigma^2_{\rm J}/2)-1\right).$$

那么 $$\begin{aligned}\phi^{Q_t}_{\Delta X_t}(u)&=\mathrm{E}^{Q_t}\left[\mathrm{e}^{u\Delta X_t}|\mu,\sigma,\lambda_{\rm J},\mu_{\rm J},\sigma_{\rm J}\right]=\phi_{\Delta X_t}(u-\vartheta)-\phi_{\Delta X_t}(-\vartheta)\\&=\mu u+(u-\vartheta)^2\sigma^2/2+\lambda_{\rm J}\left(\exp((u-\vartheta)\mu_{\rm J}+(u-\vartheta)^2\sigma^2_{\rm J}/2)-1\right)+\\&\quad(-\vartheta)^2\sigma^2/2+\lambda_{\rm J}\left(\exp(-\vartheta\mu_{\rm J}+(-\vartheta)^2\sigma^2_{\rm J}/2)-1\right)\\&=\mu^*u+u^2\sigma^2/2+\lambda^*_{\rm J}\left(\exp(\mu^*_{\rm J}u+u^2\sigma^2_{\rm J}/2)-1\right),\end{aligned}$$

其中 $\lambda^*_{\rm J}=\lambda_{\rm J}\exp(-\mu_{\rm J}\vartheta_1+\vartheta_1^2\sigma^2_{\rm J}/2),\mu^*_{\rm J}=\mu_{\rm J}-\vartheta_1\sigma^2_{\rm J},\sigma^{2*}_{\rm J}=\sigma^2_{\rm J}$.

同时 $$\begin{aligned}\phi'(-\vartheta_1)&=\mu-\vartheta\sigma^2+\lambda_{\rm J}\exp(-\mu_{\rm J}\vartheta_1+\vartheta_1^2\sigma^2_{\rm J}/2)(\mu_{\rm J}-\vartheta_1\sigma^2_{\rm J});\\\phi''(-\vartheta_1)&=\sigma^2+\lambda_{\rm J}\exp(-\mu_{\rm J}\vartheta_1+\vartheta_1^2\sigma^2_{\rm J}/2)((\mu_{\rm J}-\vartheta_1\sigma^2_{\rm J})^2+\sigma^2_{\rm J}).\end{aligned}$$