基于随机波动率模型的路径依赖期权定价

李蓬实，杨建辉
(华南理工大学工商管理学院, 广东 广州 510640)

摘要: 在随机波动率框架下, 对两种典型路径依赖期权进行定价. 在期权标的资产价格的波动率是一个快速均值回归随机过程的假设下, 研究了几何亚式看涨期权和浮动行权价回望看跌期权这两类路径依赖期权的定价问题. 通过奇异摄动分析方法, 对均值回归随机波动模型的偏微分方程进行分析得到关于期权近似价格的两个近似表示项, 并推导出上述两种路径依赖期权的近似解析解.

关键词: 随机波动率模型; 路径依赖期权; 奇异摄动
中图分类号: F830 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2017)02−0241−11
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2017.02.010

Path-dependent option pricing based on stochastic volatility model

Li Pengshi, Yang Jianhui
(School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In this paper, two typical path-dependent options are examined in the stochastic volatility framework. The underlying asset price volatility of these options is assumed to follow a fast mean-reverting stochastic process which is supported by empirical studies. The pricing of geometric average Asian call options and floating strike lookback put options is studied. By singular perturbation analysis, the corresponding partial differential equations of these two options under stochastic volatility model are obtained. The approximate prices of these two options under stochastic volatility can be expressed as two approximation terms. Analytic approximation formulas for these two path-dependent options are derived.

Key words: stochastic volatility model; path-dependent options; singular perturbation

1 引 言

期权赋予持有者在合同规定的时间, 按照约定的行权价格买卖标的资产的权利, 但持有人不必承担买卖标的资产的义务. 按照期权合同中的行权时间划分, 可将期权分为欧式期权和美式期权两大类. 按照合同中买卖标的资产来划分, 可将期权分为看涨期权和看跌期权两类. 传统期权(vanilla options)的到期收益取决于标的资产在行权日的价格. 随着金融衍生品市场的发展, 许多新型期权(exotic option)不断涌现出来, 其中很多新型期权的到期收益取决于标的资产的演化路径, 这类期权也被称为路径依赖期权. 由于此类期权在场外衍生品的交易中占有很大比重 [1], 因此研究路径依赖期权的定价问题具有重要的现实意义.

典型的路径依赖期权有亚式期权(Asian options)和回望期权(lookback options)两种. 亚式期权是一类到期收益取决于合同期内标的资产经历的价格平均值的合约. 根据标的资产价格平均值的不同计算方法,

收稿日期: 2015−11−08; 修订日期: 2016−06−13.
基金项目: 教育部人文社会科学规划基金资助项目(15YJA630083); 广东省级科技计划资助项目(2014B080807027).

亚式期权可分为算术平均亚式期权(arithmetic average Asian options)和几何平均亚式期权(geometric average Asian options)两种类型. 回望期权(lookback options)是一类到期收益取决于合同期内标的资产价格最大或最小值的合约. 回望期权的持有人能够在合同有效期内, 选择标的资产的最高或最低价格作为期权的行权价. 回望期权可分成浮动行权价回望期权(floating strike lookback options)和固定行权价回望期权(fixed strike lookback options)两大类. 由于回望期权能够为持有人带来最大的潜在收益, 所以相比于传统期权和亚式期权, 回望期权的价格比较昂贵.

在常数波动率假设下, Dai [2]在二叉树模型下研究了欧式和美式几何平均亚式期权的定价问题; Angus [3]给出了连续条件下几何平均亚式期权的解析式. 由于对数正态分布随机变量的几何平均数服从对数正态分布. 因此利用这个性质, 通过风险中性定价公式可以较为方便地计算出几何平均亚式期权的价格. 在关于回望期权的定价研究方面, 在标的资产价格能够被连续观测记录同时价格过程服从几何布朗运动, 波动率为常数的假设下, Heynen 等 [4], Viswanathan [5] 给出了回望期权的解析解. 在实际交易中, 标的资产的价格是离散的交易日价格, Broadie 等 [6]通过对连续条件下的定价公式引入修正项给出了离散条件下回望期权价格的近似解. Babbs [7]用二叉树模型对连续条件下的浮动行权价回望期权进行定价.

实证研究表明, 常数波动率的假设并不符合现实. 首先, 标的资产波动率为常数的假设无法解释金融市场中观测到的隐含波动率“微笑”曲线现象; 其次, 在标的资产价格服从常数波动率几何布朗运动的假设下, 标的资产的收益率分布与金融市场中观察到的“尖峰厚尾”分布不吻合; 最后, 金融市场的历史数据还证明了, 波动率在通常其均值水平波动, 呈现出波动率的“聚集”现象. 为了弥补常数波动率模型的不足, 学者们开始研究随机波动率模型. Stein 等 [8], Heston [9]首先研究了扩散过程驱动下的随机波动率模型, 在这些模型中标的资产的波动率被假设为服从某种随机扩散过程. 在随机波动率模型框架下研究期权定价, 可以改进常数波动率模型的不足, 更好地解释和预测金融市场期权价格的变化, 具有较为重要的理论和现实意义.

在经典的随机波动率模型研究基础上, 学者们利用不同的方法和工具来解决随机波动率框架下的亚式期权和回望期权定价问题. 在假设标的资产服从一般性状态转换(regime switching)跳跃扩散过程条件下, Dang 等 [10]通过偏微分方程的方法研究了亚式期权的定价问题. Shi 等 [11]在BSN框架下研究了带有随机波动率的算术平均亚式期权的问题. Hubaleck 等 [12]在标的资产价格服从随机波动率和跳跃过程的假设下, 研究了几何平均亚式的定价问题并推导出相应的定价公式. Leung [13]利用同伦分析的方法研究 Heston 随机波动率模型下的浮动行权价回望期权定价. Park 等 [14]研究在一般性的随机波动率模型下的回望期权定价问题从而得到关于回望期权的半解析定价公式.

本文在 Fouque 等 [15]的随机波动率模型研究基础上, 假设标的资产的波动率是均值回复过程的函数, 并考虑了标的资产价格过程和驱动波动率扩散过程之间的相关性, 来研究几何平均亚式期权和浮动行权价回望期权的定价问题. 这种方法的现实意义在于: 首先 S&P500 高频数据的实证研究证明收益率的波动存在均值回复的现象, 因此用快速均值回复过程刻画标的资产的波动率具有一定的合理性; 其次, 实证分析金融市场中存在“ 杠杆效应” [16], 因而模型中标的资产价格过程和驱动波动率的扩散过程具有相关性的假设能够更好地解释资产价格和波动率之间的“杠杆效应”. 多数实证研究都表明, 当资产价格下跌时其波动率往往会增加. 该研究理论上的创新意义在于: 首先, 由于通常在引入随机波动率之后期权价格的解析式难以直接获得, 因此通过采用利用奇异摄动分析方法能够推导出关于几何平均亚式期权和浮动行权价回望期权价格的近似展开式的前两项的偏微分方程, 进而通过求解偏微分方程得到关于几何平均亚式期权和浮动行权价回望期权的近似解析式.

2 随机波动率模型

假设标的资产的波动率是均值回归随机过程(O-U)的函数, 那么标的资产价格及其波动率满足以下随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + f(Y_t) S_t \mathrm{d}W_t, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(m - Y_t)\mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}Z_t^*, \tag{2}$$

$$\mathrm{d}Z_t^* = \rho \mathrm{d}W_t + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}Z_t, \tag{3}$$

其中 μ 是标的资产的期望回报率; α 是均值回归速率; m 是 Y_t 的长期均值; β 是 Y_t 的波动率; W_t 和 Z_t 是相互独立的标准布朗运动; ρ 是 S_t 和 Y_t 的相关系数.

当 $Y(0) = y$ 时, 式(2)的解为 $Y_t = m + (y-m)\mathrm{e}^{-\alpha t} + \beta \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\mathrm{d}Z_t^*$. 根据非随机被积函数的伊藤积分的性质可知 $\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\mathrm{d}Z_t^*$ 服从均值为 0, 方差为 $\int_0^t \mathrm{e}^{-2\alpha(t-s)}\mathrm{d}s$ 的正态分布. 因此, Y_t 服从均值为 $m+(y-m)\mathrm{e}^{-\alpha t}$, 方差为 $\frac{\beta^2}{2\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha t}\right)$ 的正态分布; 同时当 $t \to +\infty$, Y_t 服从均值为 m, 方差为 $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ 的正态分布. 由此可以定义 $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\mathrm{e}^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}}$, 其中 $v^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$, 则 $N(y)$ 是 Y_t 的长期不变分布.

令
$$\mathrm{d}\tilde{W}_t = \mathrm{d}W_t + \frac{\mu - r}{f(Y_t)}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\tilde{Z}_t = \mathrm{d}Z_t + \gamma_t \mathrm{d}t,$$
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\left(\frac{\mu-r}{f(Y_s)}\right)^2 + \gamma_s^2\right)\mathrm{d}s - \int_0^t \frac{\mu-r}{f(Y_s)}\mathrm{d}W_s - \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}s\right),$$

其中 r 是无风险利率; $f(\cdot)$ 为非零的有界函数; γ_t 为有界的适应过程, γ_t 也称为“波动率风险的市场价格”, 并且假设 $\left(\frac{\mu-r}{f(Y_t)}, \gamma_t\right)$ 满足 Novikov 条件. $\tilde{\mathbb{P}}$ 为风险中性测度.

根据 Girsanove 定理, 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 测度(风险中性测度)下, $\tilde{W}_t$ 和 $\tilde{Z}_t$ 是相互独立的布朗运动. 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 测度下, 可以得到以下随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + f(Y_t)S_t\mathrm{d}\tilde{W}_t \\ \mathrm{d}Y_t = \left(\alpha(m-Y_t) - \beta\left(\rho\frac{\mu-r}{f(Y_t)} + \gamma\sqrt{1-\rho^2}\right)\right)\mathrm{d}t + \beta\mathrm{d}\tilde{Z}_t^* \\ \mathrm{d}\tilde{Z}_t^* = \rho\mathrm{d}\tilde{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\tilde{Z}_t. \end{cases} \tag{4}$$

记 $\alpha = 1/\varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$; $\beta = \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{\varepsilon}}$, 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 测度下, 可以将式(5)变为

$$\mathrm{d}Y_t = \left(\frac{1}{\varepsilon}(m-Y_t) - \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\Lambda(Y_t)\right)\mathrm{d}t + \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}\tilde{Z}_t^*, \tag{5}$$

$$\Lambda(Y_t) = \rho\frac{\mu-r}{f(Y_t)} + \gamma_t\sqrt{1-\rho^2}. \tag{6}$$

3 随机波动率条件下的期权定价公式

3.1 几何平均亚式看涨期权定价公式

在连续条件下, 引入 $I_t = \int_o^t \ln S_u \mathrm{d}u$. 在 $t > 0$ 时, 定义 $\exp(I_t/t)$ 为标的资产的连续几何均值. 因此几何平均亚式看涨期权到期收益可记为 $(\exp(I_T/T) - K)^+$. 其中 $(x)^+ = \max(x, 0)$. 根据随机波动率模型中的式(4)和式(5), 在风险中性测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, 可得如下随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + f(Y_t)S_t\mathrm{d}\tilde{W}_t \\ \mathrm{d}Y_t = \left(\frac{1}{\varepsilon}(m-Y_t) - \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\Lambda(y)\right)\mathrm{d}t + \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}\tilde{Z}_t^* \\ \mathrm{d}I_t = \ln S_t\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{7}$$

根据风险中性定价公式, 几何平均亚式看涨期权的在 t 时刻 $(t < T)$的价格可以表示为

$$V(t,s,y,I) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}[(\exp(I_T/T)-K)^+|S_t=s,Y_t=y,I_t=I], \tag{8}$$

根据 Faynman-Kac 公式可得, $V(t,s,y,I)$ 满足以下偏微分方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+r(s\frac{\partial V}{\partial s}-V)+\ln s\frac{\partial V}{\partial I}+\frac{1}{2}f^2(y)s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left((m-y)\frac{\partial V}{\partial y}+v^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)+\\&\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(v\sqrt{2}\rho f(y)s\frac{\partial^2 V}{\partial s\partial y}-v\sqrt{2}\Lambda(y)\frac{\partial V}{\partial y}\right)=0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$V(T,s,y,I) = (\exp(I_T/T)-K)^+. \tag{10}$$

定义下列算子

$$\mathcal{L}_0 = (m-y)\frac{\partial}{\partial y}+v^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{11}$$

$$\mathcal{L}_1 = v\sqrt{2}\left(\rho f(y)s\frac{\partial^2}{\partial s\partial y}-\Lambda(y)\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{12}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}f^2(y)s^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\ln s\frac{\partial}{\partial I}+rs\frac{\partial}{\partial s}-r, \tag{13}$$

根据式(11)~式(13), 偏微分方程(9)可以重新表示为

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2\right)V=0. \tag{14}$$

在 Y_t 是快速均值回归过程的假设下 $(0<\varepsilon\ll 1)$, 可以将几何平均亚式看涨期权的价格 V 按照以下形式展开, 即

$$V = V_0+\sqrt{\varepsilon}V_1+\varepsilon V_2+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}V_3+\cdots, \tag{15}$$

其中 V_0 和 $V_i, i=1,2,\ldots$ 是关于 (t,s,y,I) 的函数.

将通过奇异摄动方法, 获得关于式(15)前两项的表达式, 进而用 $V_0+\sqrt{\varepsilon}V_1$ 来近似表示 V. 关于 V_0 和 V_1 两项的终止条件分别为

$$V_0(T,s,y,I) = (\exp(I_T/T)-K)^+,\ \ V_1(T,s,y,I)=0.$$

引理 1 设 Z 为标准正态分布随机变量, $\Phi(z)$为标准正态分布函数. 当 a,b,c,k 皆为大于零的常数时,

$$\mathrm{E}[c\exp(aZ+b)-k]^+ = c\exp(b+\frac{a^2}{2})\Phi\left(\frac{\ln(c/k)+b+a^2}{a}\right)-k\Phi\left(\frac{\ln(c/k)+b}{a}\right). \tag{16}$$

证明 $\mathrm{E}[c\exp(aZ+b)-k]^+ = \mathrm{E}[\max(c\mathrm{e}^{aZ+b}-k,0)],\ \ c\mathrm{e}^{aZ+b}-k\geqslant 0 \Leftrightarrow Z\geqslant \dfrac{\ln(k/c)-b}{a}$.

令 $d=\dfrac{\ln(c/k)+b}{a}$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\max(c\mathrm{e}^{aZ+b}-k,0)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d}^{+\infty}(c\mathrm{e}^{az+b}-k)\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z\\&= c\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{2}+b}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-a)^2}\mathrm{d}z-k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z\\&= c\exp\left(\frac{a^2}{2}+b\right)\Phi\left(\frac{\ln(c/k)+b+a^2}{a}\right)-k\Phi\left(\frac{\ln(c/k)+b}{a}\right)\end{aligned}$$

证毕.

引理 2 当标的资产的波动率为常数 σ 时, 几何平均亚式看涨期权在 t 时刻$(t<T)$的价格为

$$V(t,s,I) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}c\exp(b+\frac{a^2}{2})\Phi\left(\frac{\ln(c/K)+b+a^2}{a}\right)-\mathrm{e}^{-r(T-t)}k\Phi\left(\frac{\ln(c/K)+b}{a}\right), \tag{17}$$

其中 $a=\dfrac{\sigma}{T}\sqrt{\dfrac{(T-t)^3}{3}}, b=\dfrac{(r-\frac{\sigma^2}{2})}{2T}(T-t)^2, c=\exp\left(\dfrac{I}{T}\right)s^{\frac{T-t}{T}}$.

证明 在风险中性测度下, 波动率为常数 σ 时, 标的资产价格的随机微分方程为

$$\mathrm{d}S_t=rS_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}\tilde{W}_t, \tag{18}$$

根据伊藤引理得知,方程(18)的解为

$$S_u=S_t\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t)+\sigma(W_u-W_t)\right),\ u\geqslant t\geqslant 0, \tag{19}$$

由式(19)和定义 $I_t=\int_o^t\ln S_u\mathrm{d}u$ 可得

$$I_T=I_t+(T-t)\ln S_t+\frac{1}{2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2+\sigma\int_t^T(W_u-W_t)\mathrm{d}u. \tag{20}$$

由于式(20)中的随机项 $\int_t^T(W_u-W_t)\mathrm{d}u$ 服从均值为 0, 方差为 $(T-t)^3/3$ 的正态分布. 因此在 $S_t=s$ 和 $I_t=I$ 已知的条件下, 式(20)可以表示为

$$I_T=I+(T-t)\ln s+\frac{1}{2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2+\sigma\sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}Z, \tag{21}$$

其中 Z 是标准正态随机变量.

当波动率为常数 σ 时, 根据风险中性定价公式, 几何平均亚式看涨期权在 t 时刻的价格为

$$V(t,s,I)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}[(\exp(I_T/T)-K)^+|S_t=s,I_t=I].$$

利用式(21)和引理 1 可得

$$\begin{aligned}V(t,s,I)&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}\left[\left(\exp\left(\frac{I}{T}+\frac{(T-t)}{T}\ln s+\frac{(2r-\sigma^2)}{8T}(T-t)^2+\sigma\sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}Z\right)-K\right)^+\right]\\&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}\left[\left(\exp\left(\frac{\sigma}{T}\sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}Z+\frac{(2r-\sigma^2)}{4T}(T-t)^2\right)\exp\left(\frac{I}{T}\right)s^{\frac{T-t}{T}}-K\right)^+\right]\\&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}c\exp\left(b+\frac{a^2}{2}\right)\varPhi\left(\frac{\ln(c/K)+b+a^2}{a}\right)-\mathrm{e}^{-r(T-t)}K\varPhi\left(\frac{\ln(c/K)+b}{a}\right),\end{aligned}$$

其中 $a=\dfrac{\sigma}{T}\sqrt{\dfrac{(T-t)^3}{3}}, b=\dfrac{(2r-\sigma^2)}{4T}(T-t)^2, c=\exp\left(\dfrac{I}{T}\right)s^{\frac{T-t}{T}}$. 证毕.

引理 3 在标的资产波动率为常数 σ 的条件下, 几何平均亚式看涨期权定价公式(19)满足以下偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+rs\dfrac{\partial V}{\partial s}+\ln s\dfrac{\partial V}{\partial I}+\dfrac{1}{2}\sigma^2s^2\dfrac{\partial^2V}{\partial s^2}-rV=0\\V(T,s,I)=(\exp(I_T/T)-K)^+.\end{cases} \tag{22}$$

证明 在波动率为常数 σ 的条件下, 标的资产的价格 S_t 以及 $I_t=\int_o^t\ln S_u\mathrm{d}u$ 满足以下随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_t=rS_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}\tilde{W}_t\\\mathrm{d}I_t=\ln S_t\mathrm{d}t.\end{cases}$$

根据风险中性定价公式, 几何平均亚式看涨期权价格为

$$V(t,s,I)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}[(\exp(I_T/T)-K)^+|S_t=s,I_t=I].$$

因此, 根据 Feynman-Kac 公式可知 $V(t,S,I)$满足以下偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}-rV+rs\frac{\partial V}{\partial s}+\ln s\frac{\partial V}{\partial I}+\frac{1}{2}\sigma^2s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}=0.$$

证毕.

定理 1 式(15)的第一项 V_0 与 y 无关, 且 $V_0(t,s,I)$ 可以表示为

$$V_0(t,S,I)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}c\exp\left(b+\frac{a^2}{2}\right)\varPhi\left(\frac{\ln(c/K)+b+a^2}{a}\right)-\mathrm{e}^{-r(T-t)}K\varPhi\left(\frac{\ln(c/K)+b}{a}\right),$$

其中 $a=\dfrac{\bar\sigma}{T}\sqrt{\dfrac{(T-t)^3}{3}}, b=\dfrac{(r-\bar\sigma^2)}{4T}(T-t)^2, c=\exp\left(\dfrac{I}{T}\right)s^{\frac{T-t}{T}}, \bar\sigma^2=\dfrac{1}{v\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(y)\mathrm{e}^{\frac{-(y-m)^2}{2v^2}}\mathrm{d}y.$

证明 将式(15)代入式(14)可得

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0V_0+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\mathcal{L}_0V_1+\mathcal{L}_1V_0)+(\mathcal{L}_0V_2+\mathcal{L}_1V_1+\mathcal{L}_2V_0)+\sqrt{\varepsilon}(\mathcal{L}_0V_3+\mathcal{L}_1V_2+\mathcal{L}_2V_1)+\cdots=0. \tag{23}$$

令式(23) ε^{-1} 项系数为零可得 $\mathcal{L}_0V_0=0$. 由算子 $\mathcal{L}_0$ 的定义可知 V_0 与 y 无关, 因此 V_0 可以表示为 $V_0=V_0(t,s,I)$. 令式(23) $\varepsilon^{-1/2}$ 项系数为零可得 $\mathcal{L}_0V_1+\mathcal{L}_1V_0=0$. 同理, 由算子 $\mathcal{L}_1$ 的定义可知 V_1 也与 y 无关, 因此 V_1 可以表示为 $V_1=V_1(t,s,I)$. 再令式(23) ε^0 项系数为零可得 $\mathcal{L}_0V_2+\mathcal{L}_1V_1+\mathcal{L}_2V_0=0$. 由于 V_1 与 y 无关以及算子 $\mathcal{L}_1$ 的定义可知 $\mathcal{L}_1V_1=0$, 因此有

$$\mathcal{L}_0V_2+\mathcal{L}_2V_0=0. \tag{24}$$

式(24)是 V_2 关于算子 $\mathcal{L}_0$ 的Poisson方程. 若 V_0 的函数已知, 式(24)有唯一解当且仅当

$$\langle\mathcal{L}_2V_0\rangle=\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{L}_2V_0)\mathrm{e}^{\frac{-(y-m)^2}{2v^2}}\mathrm{d}y=0, \tag{25}$$

其中 $\langle\cdot\rangle$ 表示关于 Y_t 的长期不变分布的期望值.

由于 V_0 与 y 无关, 因此式(25)也可以表示为 $\langle\mathcal{L}_2\rangle V_0=0$.

记 $\langle f^2(y)\rangle=\dfrac{1}{v\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(y)\mathrm{e}^{\frac{-(y-m)^2}{2v^2}}\mathrm{d}y=\bar\sigma^2$, 由 $\mathcal{L}_2$ 的定义可得

$$\langle\mathcal{L}_2\rangle V_0=\frac{\partial V_0}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar\sigma^2s^2\frac{\partial^2V_0}{\partial s^2}+\ln s\frac{\partial V_0}{\partial I}+r(s\frac{\partial V_0}{\partial s}-V_0). \tag{26}$$

因此可知, 式(15)的第一项 $V_0(t,s,I)$满足以下偏微分方程

$$\begin{cases}\langle\mathcal{L}_2\rangle V_0=\dfrac{\partial V_0}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\bar\sigma^2s^2\dfrac{\partial^2V_0}{\partial s^2}+\ln s\dfrac{\partial V_0}{\partial I}+r(s\dfrac{\partial V_0}{\partial s}-V_0)=0\\ V_0(T,s,I)=(\exp(I(T)/T)-K)^+.\end{cases}$$

同时, 根据引理 2 可得

$$V_0(t,s,I)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}c\exp\left(b+\frac{a^2}{2}\right)\varPhi\left(\frac{\ln(c/K)+b+a^2}{a}\right)-\mathrm{e}^{-r(T-t)}K\varPhi\left(\frac{\ln(c/K)+b}{a}\right),$$

其中 $a=\dfrac{\bar\sigma}{T}\sqrt{\dfrac{(T-t)^3}{3}}, b=\dfrac{(r-\bar\sigma^2)}{4T}(T-t)^2, c=\exp\left(\dfrac{I}{T}\right)s^{\frac{T-t}{T}}.$ 证毕.

定理 2 式(15)的第二项 $\sqrt{\varepsilon}V_1$ 与 y 无关, 且令 $V_1^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}V_1$, $V_1^\varepsilon(t,s,I)$ 满足以下偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V_1^\varepsilon}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\bar\sigma^2s^2\dfrac{\partial^2V_1^\varepsilon}{\partial s^2}+\ln s\dfrac{\partial V_1^\varepsilon}{\partial I}+r(s\dfrac{\partial V_1^\varepsilon}{\partial s}-V_1^\varepsilon)=H_2^\varepsilon s^2\dfrac{\partial^2V_0}{\partial s^2}+H_3^\varepsilon s^3\dfrac{\partial^3V_0}{\partial s^3}\\ V_1^\varepsilon(T,s,I)=0\\ V_1^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}V_1, H_2^\varepsilon=\dfrac{v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt2}(2\rho v\langle f\phi'\rangle-\langle\varLambda\phi'\rangle), H_3^\varepsilon=\dfrac{\rho v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt2}\langle f\phi'\rangle,\end{cases} \tag{27}$$

其中 $\phi=\phi(y)$ 是 $\mathcal{L}_0x=f^2(y)-\langle f^2(y)\rangle$ 的解, $\phi'=\phi'(y)=\dfrac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y}$.

证明　令式(23)中 $\varepsilon^{1/2}$ 项系数为零可得 $\mathcal{L}_0V_3+\mathcal{L}_1V_2+\mathcal{L}_2V_1=0$. 该式可视为 V_3 关于 $\mathcal{L}_0$ 的 Poission 等式. 为了使 该 Poission 等式有解, 则以下条件应成立, 即

$$\langle \mathcal{L}_1V_2+\mathcal{L}_2V_1\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{L}_1V_2+\mathcal{L}_2V_1)\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(y-m)^2}{2v^2}}\mathrm{d}y=0. \tag{28}$$

由于 V_1 与 y 无关, 式(28)也可以表示为

$$\langle \mathcal{L}_1V_2+\mathcal{L}_2V_1\rangle=\langle \mathcal{L}_1V_2\rangle+\langle \mathcal{L}_2\rangle V_1=0. \tag{29}$$

由式(24)和式(25)可得 $\mathcal{L}_0V_2=-(\mathcal{L}_2V_0-\langle\mathcal{L}_2\rangle V_0)=-\frac{1}{2}(f^2(y)-\bar{\sigma}^2)s^2\frac{\partial^2V_0}{\partial s^2}$. 结合式(29)与 $\mathcal{L}_0V_2$ 的计算结果可得

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{L}_2\rangle V_1&=-\langle\mathcal{L}_1V_2\rangle=-\left\langle \mathcal{L}_1\mathcal{L}_0^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)(f^2(y)-\langle f^2(y)\rangle)s^2\frac{\partial^2V_0}{\partial s^2}\right\rangle\\&=\frac{1}{2}\left\langle\mathcal{L}_1\phi(y)s^2\frac{\partial^2V_0}{\partial s^2}\right\rangle=\frac{1}{2}\langle\mathcal{L}_1\phi(y)\rangle s^2\frac{\partial^2V_0}{\partial s^2},\\ \mathcal{L}_0\phi(y)&=f^2(y)-\langle f^2(y)\rangle.\end{aligned} \tag{30}$$

根据 $\mathcal{L}_1$ 的定义, 可以得到以下算子的表达式

$$\langle\mathcal{L}_1\phi(y)V_0\rangle=\sqrt{2}\rho v\langle f\phi'\rangle s\frac{\partial^2V_0}{\partial s}-\sqrt{2}v\langle\varLambda\phi'\rangle. \tag{31}$$

由式(30)和式(31)可知 V_1 满足以下等式

$$\langle\mathcal{L}_2\rangle V_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho v\langle f\phi'\rangle s^3\frac{\partial^3V_0}{\partial s^3}+\left(\sqrt{2}\rho v\langle f\phi'\rangle-\frac{\sqrt{2}}{2}v\langle\varLambda\phi'\rangle\right)s^2\frac{\partial^2V_0}{\partial s^2}. \tag{32}$$

令 $V_1^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}V_1, H_2^\varepsilon=\frac{v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}(2\rho v\langle f\phi'\rangle-\langle\varLambda\phi'\rangle), H_3^\varepsilon=\frac{\rho v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\langle f\phi'\rangle$, 则式(32)可表示为

$$\begin{aligned}&\langle\mathcal{L}_2\rangle V_1^\varepsilon=\frac{\partial V_1^\varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2s^2\frac{\partial^2V_1^\varepsilon}{\partial s^2}+\ln s\frac{\partial V_1^\varepsilon}{\partial I}+r\left(s\frac{\partial V_1^\varepsilon}{\partial s}-V_1^\varepsilon\right)=H_2^\varepsilon s^2\frac{\partial^2V_0}{\partial s^2}+H_3^\varepsilon s^3\frac{\partial^3V_0}{\partial s^3},\\&V_1^\varepsilon(T,s,I)=0.\end{aligned}$$

证毕.

根据定理 2, 可解偏微分方程(27)得到 V_1^ε 表达式. 设 $H_2^\varepsilon s^2\frac{\partial^2V_0}{\partial s^2}+H_3^\varepsilon s^3\frac{\partial^3V_0}{\partial s^3}=\bar{H}(t,s,I)$. 通过以下变量替换, $z=\frac{I+(T-t)\ln s}{T}, V_1^\varepsilon(t,s,I)=W(t,z), \bar{H}(t,s,I)=\bar{H}(t,z)$, 偏微分方程(27)可以转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2\dfrac{(T-t)^2}{T^2}\dfrac{\partial^2W}{\partial z^2}+\left(r-\dfrac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)\dfrac{T-t}{T}\dfrac{\partial W}{\partial z}-rW=\bar{H}(t,z)\\ W(T,z)=0.\end{cases}$$

再进行下列变量替换, $G=\mathrm{e}^z, W(t,z)=W(t,G), \bar{H}(t,z)=\bar{H}(t,G)$, 又可以把偏微分方程转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2\dfrac{(T-t)^2}{T^2}G^2\dfrac{\partial^2W}{\partial G^2}+\left(r-\dfrac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)\left(\dfrac{T-t}{T}\right)+\dfrac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\dfrac{T-t}{T}\right)^2G\dfrac{\partial W}{\partial G}-rW=\bar{H}(t,G)\\ W(T,G)=0.\end{cases}$$

进一步通过以下变量替换, $F=G\mathrm{e}^{\alpha(t)}, U=W\mathrm{e}^{\beta(t)}, \bar{t}=\frac{\bar{\sigma}^2(T-t)^3}{3T^2}, \alpha(t)=\left(r-\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)\frac{(T-t)^2}{2T}+\frac{\bar{\sigma}^2(T-t)^3}{6T^2}, \beta(t)=r(T-t), U=U(\bar{t},F)$, 可以进一步把偏微分方程转化为

$$\frac{1}{2}F^2\frac{\partial^2U}{\partial F^2}-\frac{\partial U}{\partial\bar{t}}=\exp\left(r\left(T/\bar{\sigma}^2\right)^{\frac{2}{3}}(3\bar{t})^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{\bar{\sigma}}{T}\right)^{-\frac{4}{3}}(3\bar{t})^{-\frac{1}{3}}\bar{H}(\bar{t},F).$$

最后令 $x=\ln F, U=U(\bar{t},x), \tilde{H}(\bar{t},x)=-\exp(r(T/\bar{\sigma}^2)^{\frac{2}{3}}(3\bar{t})^{\frac{1}{3}})(\bar{\sigma}/T)^{-\frac{4}{3}}(3\bar{t})^{-\frac{1}{3}}c\bar{H}(\bar{t},F)$, 可以得到如下偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial \bar{t}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial U}{\partial x}+\tilde{H}(\bar{t},x)\\ U(0,x)=0.\end{cases} \tag{33}$$

偏微分方程(33)的解为[17]

$$U(\bar{t},x)=\int_0^{\bar{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{H}(\tau,\xi)G(x,\xi,\bar{t}-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi,$$
$$G(x,\xi,\bar{t})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{t}}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\xi-x)-\frac{\bar{t}}{8}-\frac{(x-\xi)^2}{2\bar{t}}\right).$$

因此 $\sqrt{\varepsilon}V_1=V_1^{\varepsilon}(t,s,I)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}U(\bar{t},x)$. 在标的资产价格波动率为快速均值回归随机过程的假设下, 利用奇异摄动方法得到了几何平均亚式看涨期权的近似解析式.

3.2 浮动行权价回望看跌期权定价公式

在连续条件下, 引入 $M_t=\max\limits_{0\leqslant u\leqslant t}S_u$. 浮动行权价回望看跌期权的到期收益为 M_T-S_T. 根据随机波率动模型中的式(4)和式(5)以及风险中性定价公式可知, 浮动行权价回望看跌期权在 t 时刻($t<T$)的价格可以表示为

$$V\left(t,s,y,m\right)=\tilde{\mathrm{E}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left(M_T-S_T\right)|S_t=s,Y_t=y,M_t=m\right], \tag{34}$$

根据 Feynman-Kac 公式得知, $V\left(t,s,y,m\right)$ 应满足如下偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+r\left(s\dfrac{\partial V}{\partial s}-V\right)+\dfrac{1}{2}f^2(y)s^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\dfrac{1}{\varepsilon}\left((m-y)\dfrac{\partial V}{\partial y}+v^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)+\\ \qquad\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(v\sqrt{2}\rho f(y)s\dfrac{\partial^2 V}{\partial s\partial y}-v\sqrt{2}\Lambda(y)\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)=0\\ V(T,s,y,m)=0\\ \dfrac{\partial V(t,s,m,y)}{\partial m}|_{m=0}=0.\end{cases} \tag{35}$$

可以利用回望期权的线性放缩性质(linear scaling)来降低式(37)的维度[18], 化简偏微分方程. 浮动行权价回望看跌期权的到期收益为 $M_T-S_T=M_T(1-S_T/M_T)$. 通过如下替换 $x=s/m$, 可得到 $V\left(t,s,y,m\right)=mU(t,x,y)$, 且 $U(t,x,y)$ 满足以下偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\left(m-y\right)\dfrac{\partial U}{\partial y}+v^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\rho xf\left(y\right)v\sqrt{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-v\sqrt{2}\Lambda\left(y\right)\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial U}{\partial t}+\\ \qquad\dfrac{1}{2}f^2\left(y\right)x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+rx\dfrac{\partial U}{\partial t}-rU=0\\ U(T,x,y)=1-x\\ \left.\dfrac{\partial U(t,x,y)}{\partial x}\right|_{x=1}=U(t,1,y).\end{cases} \tag{36}$$

定义以下算子

$$\bar{\mathcal{L}}_2=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}f^2\left(y\right)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+rx\frac{\partial}{\partial x}-r. \tag{37}$$

结合式(37),式(13)和式(14), 可以将偏微分方程(36)表示为

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1+\bar{\mathcal{L}}_2\right)U=0. \tag{38}$$

与前面的分析类似, 在 Y_t 是快速均值回归的假设下, 能够将浮动行权价回望看跌期权的价格 U 按以下形式展开, 即

$$U=U_0+\sqrt{\varepsilon}U_1+\varepsilon U_2+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}U_3+\cdots, \tag{39}$$

其中 U_0 和 U_i 是关于 (t,x,y) 的函数, $i=1,2,\ldots$.

可以通过奇异摄动方法, 得到关于式(39)前两项的表达式, 进而用 $U_0+\sqrt{\varepsilon}U_1$ 来近似地表示 U. 关于 U_0 和 U_1 这两项的终止条件和边界条件分别为

$$U_0\left(T,x,y\right)=1-x,\quad \frac{\partial U_0(t,x,y)}{\partial x}|_{x=1}=U_0(t,1,y),$$
$$U_1\left(T,x,y\right)=0,\quad \frac{\partial U_1(t,x,y)}{\partial x}|_{x=1}=U_1(t,1,y).$$

定理 3 式(39)的第一项 U_0 与 y 无关, 且 $U_0(t,x)$ 可以表示为

$$U_0\left(t,x\right)=\left(1+\frac{\bar{\sigma}^2}{2r}\right)x\Phi\left(d_1\left(\tau,x\right)\right)+\mathrm{e}^{-r\tau}\Phi\left(-d_2\left(\tau,x\right)\right)-\frac{\bar{\sigma}^2}{2r}\mathrm{e}^{-r\tau}x^{1-\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}}\Phi\left(-d_2\left(\tau,\frac{1}{x}\right)\right)-x, \tag{40}$$

其中 $d_1\left(\tau,x\right)=\dfrac{1}{\bar{\sigma}\tau}\left(\ln x+r\tau+\dfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2\tau\right), d_2\left(\tau,\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\bar{\sigma}\tau}\left(\ln x+r\tau+\dfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2\tau\right)-\dfrac{2r\sqrt{\tau}}{\bar{\sigma}}$, $\tau=T-t$, $0<x\leqslant 1$, $\bar{\sigma}^2=\langle f^2(y)\rangle$.

证明 与定理 1 的证明类似, 可知 U_0 与变量 y 无关, 且 $\langle\bar{\mathcal{L}}_2\rangle U_0=0$. 根据 $\bar{\mathcal{L}}_2$ 的定义, 可以求得

$$\langle\bar{\mathcal{L}}_2\rangle U_0=\frac{\partial U_0}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2x^2\frac{\partial^2U_0}{\partial x^2}+rx\frac{\partial U_0}{\partial x}-rU_0. \tag{41}$$

因此 $U_0(t,x)$ 满足 $\dfrac{\partial U_0}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\left(\bar{\sigma}\right)^2x^2\dfrac{\partial^2U_0}{\partial x^2}+rx\dfrac{\partial U_0}{\partial x}-rU_0$, 该偏微分方程的解是波动率为常数时浮动行权价回望看跌期权价格的表达式 [19], 即式(40). 证毕.

定理 4 式(39)第二项 $\sqrt{\varepsilon}\,U_1$ 与 y 无关, 且 $U_1(t,x)$ 满足如下偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_1}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2x^2\dfrac{\partial^2U_1}{\partial x^2}+rx\dfrac{\partial U_1}{\partial x}-rU_1=H_2x^2\dfrac{\partial^2U_0}{\partial x^2}+H_3x^3\dfrac{\partial^3U_0}{\partial x^3}\\ U_1(T,x)=1-x\\ \dfrac{\partial U(t,x,y)}{\partial x}|_{x=1}=U(t,1,y)\\ 0<x\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant T\\ H_2=\dfrac{v}{\sqrt{2}}(2\rho v\left\langle f\phi'\right\rangle-\left\langle\Lambda\phi'\right\rangle)\\ H_3=\dfrac{\rho v}{\sqrt{2}}\left\langle f\phi'\right\rangle.\end{cases} \tag{42}$$

证明 与定理 2 的证明类似, 可得

$$\left\langle\bar{\mathcal{L}}_2\right\rangle U_1=-\langle\mathcal{L}_1U_2\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}v\rho\langle f\phi'\rangle x^3\frac{\partial^3U_0}{\partial x^3}+\left(\sqrt{2}v\rho\langle f\phi'\rangle-\frac{\sqrt{2}}{2}v\langle\Lambda\phi'\rangle\right)x^2\frac{\partial^2U_0}{\partial x^2}.$$

令 $H_2=\dfrac{v}{\sqrt{2}}(2\rho v\left\langle f\phi'\right\rangle-\left\langle\Lambda\phi'\right\rangle), H_3=\dfrac{\rho v}{\sqrt{2}}\left\langle f\phi'\right\rangle$, 则可得到偏微分方程(42). 证毕.

根据定理 4, 可以通过求方程(42)得到 U_1 的表达式.

设 $H_2x^2\dfrac{\partial^2V_0}{\partial x^2}+H_3x^3\dfrac{\partial^3V_0}{\partial x^3}=-H(t,x)$. 令 $\tau=T-t, z=-\ln x$, 偏微分方程(42)可以转化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial \tau} = \dfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\dfrac{\bar{\sigma}^2}{2} - r\right)\dfrac{\partial U_1}{\partial z} - rU_1 + H(\tau, z) \\ U_1(0, z) = 0 \\ \dfrac{\partial U_1(\tau, z)}{\partial z}|_{z=0} = -U_1(\tau, 0) \\ z \geqslant 0, 0 \leqslant \tau \leqslant T. \end{cases} \tag{43}$$

偏微分方程(43)的解为 [17]

$$\begin{cases} U_1(\tau, z) = \int_0^{\tau}\int_0^{+\infty} H(x, y)\, G(z, x, \tau - y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ a = \bar{\sigma}^2/2 \\ b = \bar{\sigma}^2/2 - r \\ c = -r \\ s = b/(2a) - 1 \\ G(z, x, \tau) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi a \tau}} \exp\left(\dfrac{b(x-z)}{2a} + \left(c - \dfrac{b^2}{4a}\right)\tau\right) \cdot \\ \qquad \left(\exp\left(-\dfrac{(z-x)^2}{4a\tau}\right) + \exp\left(-\dfrac{(z+x)^2}{4a\tau}\right) - 2s\int_0^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{(z+x+\eta)^2}{4a\tau} - s\eta\right)\mathrm{d}\eta\right). \end{cases}$$

由此, 可以得到在标的资产波动率为快速均值回归随机过程假设下, 浮动行权价回望看跌期权的近似解析解.

4 结束语

通过将标的资产的波动率假设为随机过程, 随机波动率模型弥补了 BS 模型的不足. 由于快速均值回归随机波动率模型在期权定价中的广泛应用, 本文将标的资产的随机波动率假设为快速均值回归的随机过程. 与波动率为常系数的模型相比, 随机波动率模型关于期权价格的偏微分方程更加复杂, 比较难以得到解析解. 通过奇异摄动分析方法, 并利用均值回归随机过程的一些已知性质, 推导出平均几何亚式看涨期权和浮动行权价回望看跌期权两种典型的路径依赖期权的近似解析解. 使用奇异摄动分析方法研究均值回归随机波动模型更加重要的意义在于, 关于几何平均亚式期权和浮动行权价欧式期权价格的修正项 V_1^{ε} 和 U_1 的偏微分方程式(27)与式(42)中的参数 $H_2^{\varepsilon}, H_3^{\varepsilon}, H_2$ 和 H_3 可以通过 Fouque 等提出的线性回归方法估计. 与其它方法相比, 使用这样方法的两个好处是, 首先减少了随机波动率模型中需要估计的参数的个数, 提高了效率; 其次, 可以先从流动性较大的期权中估计出求解偏微分方程的参数, 再应用到其它流动性较小的期权定价中, 解决了某些奇异期权由于交易数据稀缺无法进行有效参数估计的问题. 该方法还可以进一步应用到随机利率衍生品以及带有随机利率的随机波动率模型定价问题中.

参考文献:

[1] BIS. International Banking and Financial Market Developments. Switzerland: Bank for international settlements, 2010: 23–24.

[2] Dai M. One state variable binomial models for European/American style geometric Asian options. Quantitative Finance, 2003, 3(4): 288–295.

[3] Angus J. A note on pricing derivatives with continuous geometric averaging. Journal of Future Markets, 1999, 19(7): 548–858.

[4] Heynen R, Kat H. Lookback options with discrete and partial monitoring of the underlying price. Applied Mathematical Finance,

1995, 2(4): 273–248.

[5] Viswanathan C A. Path dependent options: The case of lookback options. Journal of Finance, 1991, 46(5): 1893–1907.

[6] Broadie M, Glasserman P, Kou S. Connecting discrete and continuous path dependent options. Finance and Stochastic, 1999, 3(1): 55–82.

[7] Babbs S. Binomial valuation of lookback options. Journal of Economic Dynamics and Control, 2000, 24(24): 1499–1525.

[8] Stein E, Stein J. Stock price distribution with stochastic volatility: An analytic approach. The Review of Financial Studies, 1991, 4(4): 727–752.

[9] Heston L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. The Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327–343.

[10] Dang D M, Nguyen D, Sewell G. Numerical schemes for pricing Asian options under state-dependent regime-switching jump-diffusion models. Computers and Mathematics with Applications, 2016, 71(1): 443–458.

[11] Shi Q H, Yang X P. Pricing Asian options in a stochastic volatility model with jumps. Applied Mathematics and Computation, 2014, 228(1): 411–422.

[12] Hubalek F, Sgarra C. On the explicit evaluation of the Geometric Asian options in stochastic volatility models with jumps, 2011, 235(11): 3355–3365.

[13] Leung K S. An analytic pricing formula for lookback options under stochastic volatility. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(1): 145–149.

[14] Park S H, Kim J H. A semi-analytic pricing formula for lookback options under a general stochastic volatility model. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(11): 2537–2543.

[15] Fouque J P, Papanicolaou G, Sircar R, et al. Singular perturbations in option pricing. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2003, 63(5): 1648–1665.

[16] 唐　勇, 陈艳茹. 考虑杠杆效应的多重分形波动建模: 基于中国股指的实证研究. 系统工程学报, 2015, 30(1): 94–103.
Tang Y, Chen Y R. Multifractal volatility modeling considering the leverage effect: An empirical analysis from China stock index. Journal of Systems Engineering, 2015, 30(1): 94–103. (in Chinese)

[17] Polyanin A. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. New York: Chapman & Hull / CRC, 2002.

[18] Wilmott P. Paul Wilmott on Quantitative Finance. 2nd Edition, West Sussex: John Wiley & Sons, 2006.

[19] Shreve S. Stochastic Calculus for Finance II. NewYork: Springer, 2006.

作者简介:

李蓬实(1984—), 男, 广东人, 博士生, 研究方向: 金融工程与风险管理;

杨建辉(1960—), 男, 贵州人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融工程与风险管理、投资决策与财务管理等, Email: bmjhyang@scut.edu.cn.