

保险公司和再保险公司的最优投资策略

王愆新, 荣喜民

(天津大学理学院, 天津 300072)

摘要: 假设保险公司和再保险公司面临的赔付过程是带漂移的布朗运动. 保险公司可以向再保险公司购买比例再保险, 两公司均可以投资于一种无风险资产和一种价格服从几何布朗运动模型的风险资产, 并以到期财富的期望效用最大化为目标. 根据随机控制理论建立相应的 HJB 方程并求解, 分别得到了保险公司与再保险公司的最优投资和再保险策略的解析解, 并分析了同时满足双方利益的再保险策略. 最后通过数值实例分析了各模型参数对最优策略的影响.

关键词: 比例再保险; 效用最大化; 随机控制理论; 再保险公司最优投资

中图分类号: O211.67 文献标识码: A 文章编号: 1000-5781(2017)02-0207-11

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2017.02.007

Optimal investment strategy for both insurer and reinsurer

Wang Suxin, Rong Ximin

(School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In this paper, the claim process is modeled by a Brownian motion with drift. The insurer is allowed to purchase reinsurance and both the insurer and the reinsurer are allowed to invest in a risk-free asset and a risky asset whose price process is described by geometric Brownian motion model. By applying stochastic control theory, the utility maximization model and the corresponding HJB equation are established. Furthermore, closed-form expressions for the optimal investment-reinsurance strategies for both the insurer and the reinsurer are derived, and some properties of the strategies are analyzed. Finally, numerical analysis is provided to illustrate the effect of parameters on the optimal strategies.

Key words: proportional reinsurance; utility maximization; stochastic control; optimal investment for reinsurer

1 引 言

作为保险的保险, 再保险有助于原保险公司分散经营风险, 控制保险责任, 稳定业务经营, 扩大承保能力, 是整个保险体系中非常重要的一个环节. 当直接保险人对其承保的风险不能承受时, 就有必要进入再保险市场, 将超过自身承受能力的一部分风险和责任转嫁给其他保险人分担, 这种对“分散风险, 分摊损失”的需求直接导致了再保险的产生.

保险公司的核心问题是风险管理与控制, 即对保险公司的盈余进行管理和控制, 所以近年来保险公司的投资与再保险问题引起了大量关注. Browne^[1]用带漂移的几何布朗运动模型来模拟保险公司的盈余过程, 最早研究了指数效用函数下以及破产概率最小化目标下的最优投资策略. Yang 等^[2]考虑跳-扩散模型下的

收稿日期: 2014-04-24; 修订日期: 2015-07-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201335; 11301376).

最优投资问题. 同时, 许多文献也从不同角度研究了再保险问题. Hojgaard 等^[3]研究了扩散风险模型下收益函数最大化的最优比例再保险问题, 得到了最优策略和值函数的近似表达式. Kaluszka^[4]考虑了均值方差模型下的最优再保险策略. Bai 等^[5]考虑了不允许卖空情况下, 投资于多种风险资产的最优投资和再保险策略. Schmidli^[6]研究了扩散模型下使保险公司破产概率最小化的最优比例再保险策略. Cao 等^[7]在扩散风险模型下, 得到了使到期财富的指数效用最大化的投资和再保险策略. Zhang 等^[8]考虑了含交易费用的投资和再保险问题. Zeng 等^[9]考虑了均值方差目标下时间一致的保险公司最优投资与再保险策略. Zeng 等¹在 CEV 模型下研究了保险公司的最优投资和再保险问题. 最优投资和再保险问题的研究还可参考文献[10–13].

上述再保险投资的研究有一个共同特点, 即他们只考虑了保险公司的利益, 假设再保险公司不可以在金融市场中进行投资, 因而忽略了再保险公司的收益和风险. 为了改进现有研究的不足, 本文将同时考虑保险公司和再保险公司的利益, 假设保险公司可将资产投资于一种风险资产和一种无风险资产, 并购买再保险, 同时再保险公司也可以在金融市场中进行投资. 根据随机控制理论, 分别建立了保险公司和再保险公司最优问题的 HJB 方程, 得到了保险公司与再保险公司的最优投资和再保险策略的解析解. 并分析了保险公司和再保险公司都满意的再保险策略所需满足的条件, 最后给出数值实例分析模型参数对最优投资和再保险策略的影响.

2 财富过程

2.1 保险公司的财富过程

根据 Promislow 等^[14], Grandell^[15]以及 Bai 等^[5]的研究, 保险公司的赔付过程可以由扩散过程来逼近, 假设保险公司的赔付过程满足

$$dC(t) = a dt - b dW^0(t), \quad (1)$$

其中 $a > 0$ 表示索赔率, $b > 0$ 表示赔付过程的波动率, $W^0(t)$ 是标准布朗运动.

由 Yi 等^[12], 在实际问题中, 为了避免出现负索赔的情况, 波动幅度不能过大, 即要求 a/b 足够大 ($a/b > 3$). 保费费率 $c_0 = (1 + \theta)a$, 安全负荷 $\theta > 0$. 假设保险公司可以购买一定比例的再保险来分散风险. $q_1(t)$ 表示 t 时刻购买再保险的比例, 保险公司所支付的再保险费用为 $c_1 = (1 + \eta)a q_1$, 其中 η 是再保险公司的安全负荷且 $\eta > \theta > 0$. η 越大, 再保险费用就越高. 根据式(1), 购买比例再保险后, 保险公司的盈余过程为

$$dR(t) = c_0 dt - (1 - q_1)dC(t) - c_1 dt = (\theta - \eta q_1)a dt + b(1 - q_1)dW^0(t). \quad (2)$$

除了再保险, 假设保险公司可以将资产投资于金融市场上的一种无风险资产(债券或银行账户)和一种风险资产(股票或基金).

S_0 表示无风险资产的价格过程, 满足如下方程

$$dS_0(t) = r_0 S_0(t) dt,$$

其中 $r_0 > 0$ 是无风险利率.

一般情况下, 金融研究者使用几何布朗运动模型来模拟股票价格. 实践表明这种近似是有效的, 因此它被广泛应用于金融市场. 设风险资产价格为 S_1 , 服从几何布朗运动模型

$$dS_1(t) = r_1 S_1(t) dt + \sigma S_1(t) dW^1(t), \quad r_1 > r_0, \quad (3)$$

其中 r_1 是风险资产的期望收益率, σ 是随机波动率, $W^1(t)$, $t \geq 0$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的标准布

¹Zeng Y, Li Z F. Optimal Investment and Proportional Reinsurance for Insurers with a CEV Risk Price. Guangzhou: Sun Yat-sen University, 2011.

朗运动.

用一个随机过程对 $\alpha(t) = \{q_1(t), \pi_1(t)\}_{t \in [0, T]}$ 来描述策略 α , 其中 $q_1(t)$ 表示在 t 时刻的再保险比例, $\pi_1(t)$ 表示 t 时刻投资于风险资产上的金额, 则 $X(t) - \pi_1(t)$ 表示 t 时刻投资者投入在无风险资产上的金额. 在本文中, 假设风险资产不允许卖空, 即必须满足 $\pi_1(t) \geq 0$; 另一方面, 允许从货币市场借款(利率 r_0), 即 $X(t) - \pi_1(t)$ 没有严格的限制. 给定一个投资与再保险策略, 保险公司的财富过程 $X(t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} dX(t) &= c_0 dt - (1 - q_1(t))dC(t) - c_1 dt + (X(t) - \pi_1(t))r_0 dt + \pi_1(t)(r_1 dt + \sigma dW^1(t)) \\ &= (r_0 X(t) + (\theta - \eta q_1(t))a) dt + b((1 - q_1(t))dW^0(t) + (r_1 - r_0)\pi_1(t)dt + \sigma \pi_1(t)dW^1(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

当 $\{q_1(t), \pi_1(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是 $\mathcal{F}_t$ -循序可测的, 且满足 $0 \leq q_1(t) \leq 1, \pi_1(t) \geq 0, \int_0^T (\pi_1(t))^2 dt < \infty$, 则称策略 α 为可行的. 记保险公司所有可行策略的集合为 α_s^1 .

2.2 再保险公司的财富过程

类似于保险公司的财富模型, 可以得到再保险公司的财富过程, 其中再保险公司的保费费率 $c_1 = (1 + \eta)aq_2$, 赔付过程为

$$q_2 dC(t) = q_2 (adt - bdW^0(t)),$$

假设 $\pi_2(t)$ 表示再保险公司在 t 时刻投资于风险资产上金额, 则 $X(t) - \pi_2(t)$ 表示 t 时刻投入在无风险资产上的金额. 易知再保险公司的财富过程

$$\begin{aligned} dX(t) &= c_1 dt - q_2(t)dC(t) + (X(t) - \pi_2(t))r_0 dt + \pi_2(t)(r_1 dt + \sigma dW^1(t)) \\ &= (r_0 X(t) + \eta a q_2(t)) dt + b q_2(t) dW^0(t) + (r_1 - r_0)\pi_2(t)dt + \sigma \pi_2(t)dW^1(t). \end{aligned} \quad (5)$$

若 $\{q_2(t), \pi_2(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是 $\mathcal{F}_t$ -循序可测的且 $0 \leq q_2(t) \leq 1, \int_0^T (\pi_2(t))^2 dt < \infty$, 则称 $\pi_2(t)$ 是可行的. 记再保险公司所有可行策略的集合为 α_s^2 .

3 模型求解

投资者希望终值财富最大化, 即投资者期望找到一个最优投资策略 α^* , 使得 T 时刻财富值的期望效用最大. 因此, 投资者的目标函数为 $\max_{\alpha \in \alpha_s} E[u(X(t))], 0 \leq t \leq T$, 其中 α_s 表示可行策略集合, $u(\cdot)$ 表示效用函数, $E[u(\cdot)]$ 为效用函数的期望.

本文的目标是找到使得投资者终端财富期望效用最大化的策略.

效用函数 $u(x)$ 是增函数, 并且是一个凹函数 ($u' > 0, u'' < 0$). 故存在唯一的最优投资策略使得期望效用的终值达到最大. 对于策略 α , 定义 t 时刻在状态 x 下投资者终端财富的条件期望效用为

$$V_\alpha(t, x) = E[u(X(T)) | X(t) = x].$$

为使财富最大化, 考虑如下最优问题, 即价值函数

$$V(t, x) = \sup_{\alpha \in \alpha_s} V_\alpha(t, x) \quad (6)$$

以及最优策略 $(q^*(t), \pi^*(t))$, 使得 $V_{\alpha^*}(t, x) = V(t, x)$.

3.1 保险公司最优策略

假设投资者的效用函数 $u(\cdot)$ 为指数效用函数, 即

$$u(x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m_1} e^{-m_1 x}, \quad \lambda_0 > 0, \quad m_1 > 0. \quad (7)$$

为解决上述问题, 使用 Fleming 等^[19]描述的动态规划的方法. 如果价值函数 V 及其偏导数 V_t, V_x, V_{xx} 在 $R_+^1 \rightarrow R^1$ 上连续, $(t, x) \in [0, T] \times R$, 那么 V 满足如下的 HJB 方程

$$V_t + \max_{0 \leq q_1 \leq 1} \left((r_0 x + (\theta - \eta q_1) a) V_x + \frac{1}{2} (1 - q_1)^2 b^2 V_{xx} \right) + \max_{\pi_1 \geq 0} \left((r_1 - r_0) \pi_1 V_x + \frac{1}{2} \sigma^2 \pi_1 V_{xx} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\text{边界条件为} \quad V(T, x) = u(x). \quad (9)$$

下面将根据边界条件(9)求解方程(8). 假设式(8)等号左边的表达式在控制区间内取得最大值, 即对 $\forall (t, x) \in [0, T] \times R, q^*(t) \in [0, 1], \pi_1^*(t) \geq 0$. 分别将该表达式对 q_1 和 π_1 求一阶偏导数并令导数为 0, 得

$$q_1^0(t) = 1 + \frac{\eta a V_x}{b^2 V_{xx}}, \quad (10)$$

$$\pi_1^0(t) = \frac{(r_0 - r_1) V_x}{\sigma^2 V_{xx}}. \quad (11)$$

由此可以看出 $q_1^0(t) \leq 1$. 如果 $q_1^0(t) \geq 0$, 那么 $q_1^*(t)$ 即为 $q_1^0(t)$. 如果 $q_1^0(t) \leq 0$, 令 $q_1^*(t) = 0$.

根据上述分析, 可以得到以下两个引理.

引理 1 令 $\mathcal{U}_1 = \{(t, x) \in [0, T] \times R : 0 \leq q_1^0(t) \leq 1, \pi_1^0(t) \geq 0\}$, 假设 V 是方程

$$V_t + (r_0 x + (\theta - \eta q_1) a) V_x - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 \eta^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \right) \frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{U}_1 \quad (12)$$

的一个解, $V(T, x) = u(x)$, 且 $V(t, x)$ 是凹函数, 关于 x 递增. 则 V 满足 HJB 方程(8), 以及边界条件式(9).

证明 很容易看出, 在 $\mathcal{U}_1$ 中, 式(8)的上确界在式(10)和式(11)中的 $q_1^0(t)$ 和 $\pi_1^0(t)$ 处取到, 将 $q_1^0(t)$ 和 $\pi_1^0(t)$ 代入式(8)即可得到式(12). 证毕.

引理 2 令 $\mathcal{U}_2 = \{(t, x) \in [0, T] \times R : q_1^0(t) < 0, \pi_1^0(t) \geq 0\}$, 假设 V 是

$$V_t + (r_0 x + \theta a) V_x + \frac{1}{2} b^2 V_{xx} - \frac{(r_1 - r_0)^2}{2\sigma^2} \frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{U}_2 \quad (13)$$

的一个解, $V(T, x) = u(x)$, 且 $V(t, x)$ 是凹函数, 关于 x 递增. 则 V 满足 HJB 方程(8), 以及边界条件式(9).

证明 与引理 1 的证明类似, 容易看出, 在 $\mathcal{U}_2$ 中, 式(8)的上确界在 $q_1^0(t) = 0$ 和 $\pi_1^0(t) = \frac{(r_0 - r_1) V_x}{\sigma^2 V_{xx}}$ 处取到, 将其代入式(8)即可得到式(13). 证毕.

现在根据以上两个引理找到满足边界条件(9)的 HJB 方程的解. 令 $(q^*(t), \pi^*(t))$ 为满足式(8)的最优策略, 那么有两种可能: $(0 \leq q_1^0(t) \leq 1, \pi_1^0(t) \geq 0)$, $(q_1^0(t) < 0, \pi_1^0(t) \geq 0)$.

如果 $(0 \leq q_1^0(t) \leq 1, \pi_1^0(t) \geq 0)$, 由之前的证明可知, 最优再保险策略 $q_1^*(t)$ 即为式(10)中的 $q_1^0(t)$, 最优投资策略 $\pi_1^*(t)$ 为式(11)中的 $\pi_1^0(t)$. 将它们代入式(8), 可以得到式(12). 根据文献[1]的式(79), 试图找到一个如下形式的解, 即

$$V(t, x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m_1} \exp \left(-m_1 x e^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 \eta^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \right) (T - t) + h(T - t) \right), \quad (14)$$

其中 $h(x)$ 为待定函数.

$$\text{将式(14)代入式(12)得} \quad V_x = (V(t, x) - \lambda_0) \left(-m_1 e^{r_0(T-t)} \right),$$

$$V_{xx} = (V(t, x) - \lambda_0) \left(m_1^2 e^{2r_0(T-t)} \right),$$

$$V_t = (V(t, x) - \lambda_0) \left(m_1 x e^{r_0(T-t)} r_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 \eta^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \right) - h'(T - t) \right),$$

解得 $h(T-t) = h_1(T-t) + k$, 其中 $h_1(T-t) = m_1 a(\eta - \theta)(e^{r_0(T-t)} - 1)/r_0$, k 为待定常数.

从而得到如下形式的解

$$V(t, x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m_1} \exp \left(-m_1 x e^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 \eta^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \right) (T-t) + h_1(T-t) + k \right), \quad (15)$$

由式(10), 式(11)和式(15)可知最优策略为

$$(q_1^*(t), \pi_1^*(t)) = \left(1 - a\eta e^{-r_0(T-t)}/(m_1 b^2), (r_1 - r_0)e^{-r_0(T-t)}/(m_1 \sigma^2) \right). \quad (16)$$

对于式(16)中 $q_1^*(t)$ 和 $\pi_1^*(t)$ 的形式, 需要对保险公司的再保险策略 $q_1^0(t)$ 分两种情况讨论:

情况 1

$$0 \leq q_1^0(t) \leq 1: \begin{cases} a\eta \leq m_1 b^2 \\ m_1 b^2 < a\eta \leq m_1 b^2 e^{r_0 T}, \quad t \leq T - (\ln(a\eta) - \ln(m_1 b^2))/r_0. \end{cases} \quad (17)$$

情况 2

$$q_1^0(t) < 0: \begin{cases} a\eta > m_1 b^2 e^{r_0 T} \\ m_1 b^2 < a\eta < m_1 b^2 e^{r_0 T}, \quad t > T - (\ln(a\eta) - \ln(m_1 b^2))/r_0. \end{cases} \quad (18)$$

在情况 2 中, ($q_1^0(t) < 0, \pi_1^0(t) \geq 0$), 由引理 2, 式(8)的解可以写成式(13)的形式. 运用文献[1]的方法, 有

$$V(t, x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m_1} \exp \left(-m_1 x e^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} (T-t) + h_2(T-t) \right), \quad (19)$$

解得

$$h_2(T-t) = -m_1 \theta a \frac{e^{r_0(T-t)} - 1}{r_0} + \frac{1}{4} m_1^2 b^2 \frac{e^{2r_0(T-t)} - 1}{r_0},$$

因此, 在这种情况下下的最优策略为

$$(q_1^*(t), \pi_1^*(t)) = \left(0, \frac{(r_1 - r_0)}{m_1 \sigma^2} e^{-r_0(T-t)} \right). \quad (20)$$

当 $m_1 b^2 < a\eta \leq m_1 b^2 e^{r_0 T}$ 时, 由式(15)和式(19)定义的 $V(t, x)$ 在 $t = T - (\ln(a\eta) - \ln(m_1 b^2))/r_0$ 处连续, 因此可以解得

$$k = \frac{1}{b^2 r_0} \left(a\eta m_1 b^2 - \frac{3}{4} a^2 \eta^2 - \frac{1}{4} m_1^2 b^4 + \frac{1}{2} a^2 \eta^2 (\ln(a\eta) - \ln(m_1 b^2)) \right). \quad (21)$$

定理 1 保险公司的价值函数 $V(t, x)$ 及对应的最优策略 $(q_1^*(t), \pi_1^*(t))$ 如下:

- 1) 当 $a\eta \leq m_1 b^2$ 时, $V(t, x)$ 和 $(q_1^*(t), \pi_1^*(t))$ 由式(15)和式(16)给出, 且 $k = 0$;
- 2) 当 $a\eta > m_1 b^2 e^{r_0 T}$ 时, $V(t, x)$ 和 $(q_1^*(t), \pi_1^*(t))$ 由式(19)和式(20)给出;
- 3) 当 $m_1 b^2 < a\eta \leq m_1 b^2 e^{r_0 T}$ 时, k 由式(21)给出,

$$V(t, x) = \begin{cases} \text{式(15)}, & 0 \leq t \leq T - (\ln(a\eta) - \ln(m_1 b^2))/r_0 \\ \text{式(19)}, & t > T - (\ln(a\eta) - \ln(m_1 b^2))/r_0, \end{cases}$$

$$(q_1^*(t), \pi_1^*(t)) = \begin{cases} \text{式(16)} & 0 \leq t \leq T - (\ln(a\eta) - \ln(m_1 b^2))/r_0 \\ \text{式(20)}, & t > T - (\ln(a\eta) - \ln(m_1 b^2))/r_0. \end{cases}$$

3.2 再保险公司最优策略

假设再保险公司的效用函数 $u(\cdot)$ 为指数效用函数, 即

$$u(x) = \lambda_0 - \gamma e^{-m_2 x} / m_2, \quad \lambda_0 > 0, \quad m_2 > 0.$$

再保险公司的目标也是终端财富的期望效用最大化.

类似于上述求解过程,再保险公司的价值函数 V 满足如下的 HJB 方程

$$V_t + \max_{0 \leq q \leq 1} \left((r_0 x + \eta a q_2) V_x + \frac{1}{2} b^2 q_2^2 V_{xx} \right) + \max_{\pi_2 \geq 0} \left((r_1 - r_0) \pi_2 V_x + \frac{1}{2} \sigma^2 \pi_2 V_{xx} \right) = 0, \quad (22)$$

$(t, x) \in [0, T] \times R$, 满足边界条件

$$V(T, x) = u(x). \quad (23)$$

下面将根据边界条件(23)求解方程(22). 假设式(22)等号左边的表达式在控制区间内取得最大值, 即对 $\forall (t, x) \in [0, T] \times R$, $q_2^*(t) \in [0, 1]$, $\pi_2^*(t) \geq 0$. 分别对式(22)中的 q_2 和 π_2 求一阶偏导, 令导数为 0, 得

$$q_2^0(t) = -\frac{\eta a V_x}{b^2 V_{xx}}, \quad (24)$$

$$\pi_2^0(t) = \frac{(r_0 - r_1) V_x}{\sigma^2 V_{xx}}. \quad (25)$$

由此可以看出 $q_2^0(t) \geq 0$. 如果 $q_2^0(t) \leq 1$, 那么 $q_2^*(t)$ 即为 $q_2^0(t)$. 如果 $q_2^0(t) > 1$, 令 $q_2^*(t) = 1$.

根据上述分析, 可以得到以下两个引理.

引理 3 令 $\mathcal{A}_1 = \{(t, x) \in [0, T] \times R : 0 \leq q_2^0(t) \leq 1, \pi_2^0(t) \geq 0\}$, 假设 V 是

$$V_t + r_0 x V_x - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 \eta^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \right) \frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{A}_1 \quad (26)$$

的一个解, $V(T, x) = u(x)$, 且 $V(t, x)$ 是凹函数, 关于 x 递增. 则 V 满足 HJB 方程(22), 以及在 $\mathcal{A}_1$ 中的边界条件式(23).

引理 4 令 $\mathcal{A}_2 = \{(t, x) \in [0, T] \times R : q_2^0(t) > 1, \pi_2^0(t) \geq 0\}$, 假设 V 是

$$V_t + (r_0 x + \eta a) V_x + \frac{1}{2} b^2 V_{xx} - \frac{(r_1 - r_0)^2}{2\sigma^2} \frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{A}_2 \quad (27)$$

的一个解, $V(T, x) = u(x)$, 且 $V(t, x)$ 是凹函数, 关于 x 递增. 则 V 满足 HJB 方程(22), 以及在 $\mathcal{A}_2$ 中的边界条件式(23).

引理 3 和引理 4 的证明与引理 1 和引理 2 的证明类似, 此处省略.

下面由引理 3 和引理 4 找到满足边界条件的式(22)的解. 令 $(q_2^*(t), \pi_2^*(t))$ 为满足式(22)的最优策略, 那么有两种可能: $(0 \leq q_2^0(t) \leq 1, \pi_2^0(t) \geq 0)$, $(q_2^0(t) > 1, \pi_2^0(t) \geq 0)$.

如果 $(0 \leq q_2^0(t) \leq 1, \pi_2^0(t) \geq 0)$, 由之前的证明可知, $q_2^*(t)$ 即为式(24)中的 $q_2^0(t)$, $\pi_2^*(t)$ 为式(25)中的 $\pi_2^0(t)$. 将它们代入式(22), 可以得到式(26). 根据文献[1]的式(79), 试图找到一个如下形式的解, 即

$$V(t, x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m_2} \exp \left(-m_2 x e^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 \eta^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \right) (T-t) + h(T-t) \right), \quad (28)$$

其中 $h(x)$ 为待定函数.

将式(28)代入式(22)中, 解得 $h(T-t) = c$, c 为待定常数. 从而得到如下形式的解

$$V(t, x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m_2} \exp \left(-m_2 x e^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 \eta^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \right) (T-t) + c \right), \quad (29)$$

由式(24), 式(25)和式(29)可知

$$(q_2^0(t), \pi_2^0(t)) = \left(\frac{a\eta}{m_2 b^2} e^{-r_0(T-t)}, \frac{(r_1 - r_0)}{m_2 \sigma^2} e^{-r_0(T-t)} \right). \quad (30)$$

由式(30)中 $q_2^0(t)$ 和 $\pi_2^0(t)$ 的形式, 需要对再保险公司的再保险策略 $q_2^0(t)$ 分两种情况进行讨论:

情况 1

$$0 \leq q_2^0(t) \leq 1 : \begin{cases} a\eta \leq m_2 b^2 \\ m_2 b^2 < a\eta \leq m_2 b^2 e^{r_0 T}, \quad t \leq T - (\ln(a\eta) - \ln(m_2 b^2))/r_0. \end{cases} \quad (31)$$

情况 2

$$q_2^0(t) > 1 : \begin{cases} a\eta > m_2 b^2 e^{r_0 T} \\ m_2 b^2 < a\eta < m_2 b^2 e^{r_0 T}, \quad t > T - (\ln(a\eta) - \ln(m_2 b^2))/r_0. \end{cases} \quad (32)$$

在情况 2 中, $(q_2^0(t) > 1, \pi_2^0(t) \geq 0)$, 由引理 4, 原 HJB 方程的解可由式(27)得到. 根据文献[1]的方法, 有

$$V(t, x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m_2} \exp \left(-m_2 x e^{r_0(T-t)} - \frac{(r_1 - r_0)^2}{2\sigma^2} (T-t) + h_3(T-t) \right), \quad (33)$$

其中 $h_3(T-t) = -m_2 \eta a \frac{e^{r_0(T-t)} - 1}{r_0} + \frac{1}{4} m_2^2 b^2 \frac{e^{2r_0(T-t)} - 1}{r_0}$.

在这种情况下下的最优策略为

$$(q_2^*(t), \pi_2^*(t, x)) = \left(1, \frac{(r_1 - r_0)}{m_2 \sigma^2} e^{-r_0(T-t)} \right). \quad (34)$$

当 $m_2 b^2 < a\eta < m_2 b^2 e^{r_0 T}$ 时, 根据 $V(t, x)$ 在 $t = T - (\ln(a\eta) - \ln(m_2 b^2))/r_0$ 处的连续性, 可以解得

$$c = \frac{1}{b^2 r_0} \left(a\eta m_2 b^2 - \frac{3}{4} a^2 \eta^2 - \frac{1}{4} m_2^2 b^4 + \frac{1}{2} a^2 \eta^2 (\ln(a\eta) - \ln(m_2 b^2)) \right). \quad (35)$$

定理 2 再保险公司的价值函数 $V(t, x)$ 及对应的最优策略 $(q_2^*(t), \pi_2^*(t))$ 如下:

- 1) 当 $a\eta \leq m_2 b^2$ 时, $V(t, x)$ 和 $(q_2^*(t), \pi_2^*(t))$ 由式(29)和式(30)给出, 且 $c = 0$;
- 2) 当 $a\eta > m_2 b^2 e^{r_0 T}$ 时, $V(t, x)$ 和 $(q_2^*(t), \pi_2^*(t))$ 由式(33)和式(34)给出;
- 3) 当 $m_2 b^2 < a\eta \leq m_2 b^2 e^{r_0 T}$ 时, c 由式(35)给出,

$$V(t, x) = \begin{cases} \text{式(29)}, & 0 \leq t \leq T - (\ln(a\eta) - \ln(m_2 b^2))/r_0 \\ \text{式(33)}, & t > T - (\ln(a\eta) - \ln(m_2 b^2))/r_0, \end{cases}$$

$$(q_2^*(t), \pi_2^*(t)) = \begin{cases} \text{式(30)}, & 0 \leq t \leq T - (\ln(a\eta) - \ln(m_2 b^2))/r_0 \\ \text{式(34)}, & t > T - (\ln(a\eta) - \ln(m_2 b^2))/r_0. \end{cases}$$

4 经济分析与数值实例

在实际金融市场中存在多家保险公司和再保险公司, 在模型中简化为只有两个局中人: 保险公司和再保险公司. 这种假设与实际观察到的当事人的行为一致, 同时也为了研究问题的方便.

4.1 两个最优再保险策略的比较

再保险比例的确定是保险公司和再保险公司在各自效用最大化前提下相互博弈的结果.

从模型的结果可以看出, 在完全信息条件下, 即保险公司和再保险公司对风险标的资产的损失额大小都有完全信息, 存在共同认识, 根据文中保险公司和再保险公司的财富过程, 当 $m_1 = m_2$ 时, 计算得到的保险公司和再保险公司的最优再保险比例之和为 1. 这体现了保险公司与再保险公司的一个博弈过程.

为了便于后面的讨论, 将保险公司的最优再保险比例记为 $q_1^*(t)$, 将再保险公司的最优再保险比例记

为 $q_2^*(t)$. 本文就 $q_1^*(t) = q_2^*(t)$, $q_1^*(t) < q_2^*(t)$, $q_1^*(t) > q_2^*(t)$ 三种情况进行研究.

对于以指数效用函数作为其效用函数的保险公司和再保险公司而言, 同时考虑投资以及再保险过程, 可以发现:

1) 当 $1 - \frac{a\eta}{m_1 b^2} e^{-r_0(T-t)} = \frac{a\eta}{m_2 b^2} e^{-r_0(T-t)}$ 时, $q_1^*(t) = q_2^*(t)$, 保险公司与再保险公司的期望效用同时达到最优状态, 双方的利益均达到最大化, 此时认为两公司可以达成共识, 再保险合同成立.

2) 当 $1 - \frac{a\eta}{m_1 b^2} e^{-r_0(T-t)} < \frac{a\eta}{m_2 b^2} e^{-r_0(T-t)}$ 时, $q_1^*(t) < q_2^*(t)$, 此时保险公司的最优再保险比例小于再保险公司的最优再保险比例, 保险公司的最优策略相对保守, 只愿意分担 $q_1^*(t)$ 比例的再保险, 而再保险公司的最优策略相对激进, 愿意接受更大比例的再保险.

3) 当 $1 - \frac{a\eta}{m_1 b^2} e^{-r_0(T-t)} > \frac{a\eta}{m_2 b^2} e^{-r_0(T-t)}$ 时, $q_1^*(t) > q_2^*(t)$, 在这种情况下, 保险公司希望将更多的风险分散给再保险公司, 而再保险公司只愿意接受 $q_2^*(t)$ 比例的再保险, 因此保险公司应在金融市场中寻找其他的再保险公司, 将 $q_1^*(t) - q_2^*(t)$ 比例的再保险进行分保, 将风险分散给多家再保险公司.

4.2 外生变量对 $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$ 的影响

以下考虑各变量对 $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$ 的影响时, 均假设其他变量取固定值. 由 Yi 等^[12], 为了避免出现负索赔的情况, 即波动幅度不能过大, 要求 $a/b > 3$, 因此取 $a = 4$, $b = 1$. 在投资方面设无风险利率 $r_0 = 0.05$, 取值为存贷款利率的中间值.

1) 索赔率 a 对 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 的影响

$\frac{\partial q_1^*(t)}{\partial a} = -\frac{\eta}{m_1 b^2} e^{-r_0(T-t)}$, 由 $q_1^*(t)$ 表达式可以看出 a 与 $q_1^*(t)$ 的改变方向相反. 事实上, 随着索赔率的增加, 承保收益率 $c_0 = (1 + \theta)a$ 增加, 再保险公司的保费增加, 因此为了减少支出, 保险公司将减少用于购买再保险的资金. 而对于再保险公司来说, 由于再保险保费随 a 的增加而增大, 所以其愿意接受的最优再保险比例增大.

考虑在参数为 $r_0 = 0.05$, $\eta = 0.2$, $b = 1$, $m_1 = 0.8$, $m_2 = 0.6$, $T = 20$, $t = 0$ 的情况下, 令索赔率 a 变化, 得到索赔率 a 对最优再保险策略 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 的影响如图 1 所示.

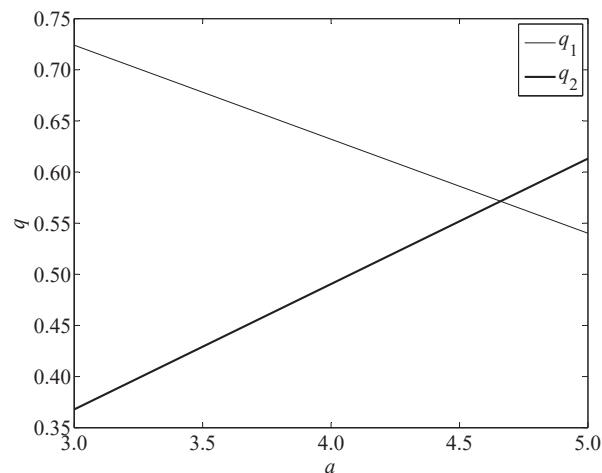


图 1 索赔率 a 对最优再保险策略的影响

Fig.1 The effect of the claim rate a on optimal reinsurance strategies

2) 再保险公司的安全负荷 η 对 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 的影响

$\frac{\partial q_1^*(t)}{\partial \eta} = -\frac{a}{m_1 b^2} e^{-r_0(T-t)}$, $\frac{\partial q_2^*(t)}{\partial \eta} = \frac{a}{m_2 b^2} e^{-r_0(T-t)}$, 安全负荷 η 越大, 表明再保险的成本越高, 因而保险公司选择减小再保险比例. 而对再保险公司而言, η 越大说明其收取的再保险保费越高, 其最优再保险比例随着 η 的增加而上升.

考虑在参数为 $r_0 = 0.05, a = 4, b = 1, m_1 = 0.8, m_2 = 0.6, T = 20, t = 0$ 的情况下, 令安全负荷 η 变化, 得到安全负荷 η 对最优再保险策略 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 的影响如图 2 所示.

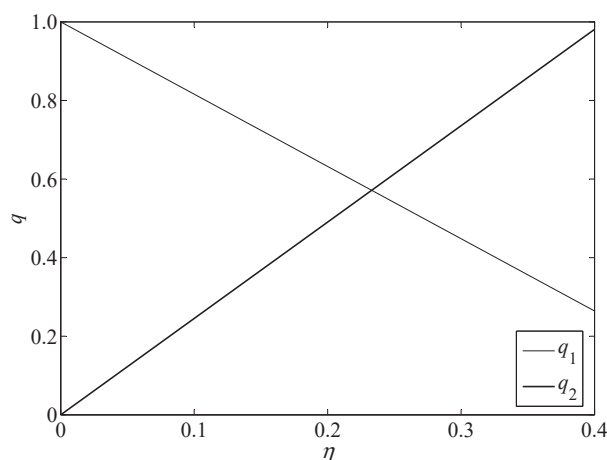


图 2 再保险公司的安全负荷 η 对最优再保险策略的影响

Fig.2 The effect of the reinsurance company safety load η on optimal reinsurance strategies

3) 风险厌恶系数 m_1 对 $q_1^*(t)$ 的影响以及 m_2 对 $q_2^*(t)$ 的影响

$\frac{\partial q_1^*(t)}{\partial m_1} = \frac{a\eta}{m_1^2 b^2} e^{-r_0(T-t)}, \frac{\partial q_2^*(t)}{\partial m_2} = -\frac{a\eta}{m_2^2 b^2} e^{-r_0(T-t)}$. m_1 越大, 表示是保险公司的风险厌恶程度越大, 保险公司的风险偏好也决定着再保险比例. 由 $q_1^*(t)$ 的表达式可看出, 保险公司的风险厌恶程度越大, 其选择的再保险比例也越大, 这也与实际相符. 同样由 $q_2^*(t)$ 可知, 再保险公司的风险厌恶系数 m_2 越大, 它愿意接受的再保险比例越小.

考虑在参数为 $r_0 = 0.05, a = 4, b = 1, \eta = 0.2, T = 20, t = 0$ 的情况下, 令风险厌恶系数 m_1 和 m_2 变化, 得到风险厌恶系数 m 对最优再保险策略 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 的影响如图 3 所示.

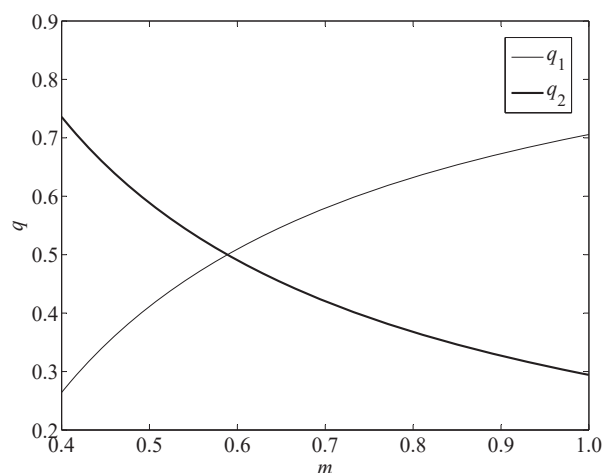


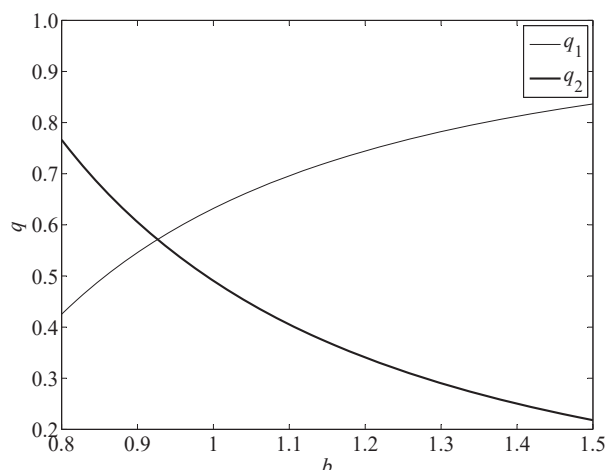
图 3 风险厌恶系数 m 对最优再保险策略的影响

Fig.3 The effect of risk aversion m on optimal reinsurance strategies

4) 风险波动率 b 对 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 的影响

由定理 1 可知, $\frac{\partial q_1^*(t)}{\partial m_1} = \frac{2a\eta}{m_1 b^3} e^{-r_0(T-t)}$, $q_1^*(t)$ 关于 b 单调递增. 这是由于风险波动率越大, 表明风险的波动幅度大, 保险公司面临的承保风险不确定性增大, 为了控制风险, 保险公司将增加再保险比例.

考虑在参数为 $r_0 = 0.05, a = 4, \eta = 0.2, m_1 = 0.8, m_2 = 0.6, T = 20, t = 0$ 的情况下, 令风险波动率 b 变化, 得到风险波动率 b 对最优再保险策略 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 的影响如图 4 所示.

图 4 风险波动率 b 对最优再保险策略的影响Fig.4 The effect of volatility b on optimal reinsurance strategies

5 结束语

将保险精算问题与组合投资问题结合在一起进行研究, 是一类极具理论研究价值的特殊的组合投资问题. 本文同时考虑了保险公司和再保险公司的利益, 采用带漂移的几何布朗运动模拟保险公司的赔付过程, 假设保险公司和再保险公司都可以投资于一种风险资产和一种无风险资产, 通过对目标函数进行分解, 本文分析了保险公司和再保险公司都满意的再保险策略需要满足的条件. 最后, 通过数值实例分析模型参数对最优策略的影响, 对保险和再保险市场有积极的理论和实践意义.

本文所作的研究是基于几何布朗运动模型, 即风险资产的价格过程是 Black-Scholes 模型. 在后续的研究中, 将引入 CEV, Hseton 等模型来描述风险资产, 更有效的模拟现实市场.

参考文献:

- [1] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin. *Mathematics of Operations Research*, 1995, 20(4): 937–958.
- [2] Yang H L, Zhang L H. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005, 37(3): 615–634.
- [3] Højgaard B, Taksar M. Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models with transaction costs. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1998, 22(1): 41–51.
- [4] Kaluszka M. Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001, 28(1): 61–67.
- [5] Bai L H, Guo J Y. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(3): 968–975.
- [6] Schmidli H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001, 2001(1): 55–68.
- [7] Cao Y S, Wan N Q. Optimal proportional reinsurance and investment based on Hamilton-Jacobi-Bellman equation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 45(2): 157–162.
- [8] Zhang X L, Zhang K C, Yu X J. Optimal proportional reinsurance and investment with transaction costs, I: Maximizing the terminal wealth. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 44(3): 473–478.
- [9] Zeng Y, Li Z F. Optimal time-consistent investment and reinsurance policies for mean-variance insurers. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2011, 49(1): 145–154.
- [10] 荣喜民, 卢美萍, 李 践. 考虑承保风险的保险基金投资研究. *系统工程学报*, 2004, 19(2): 198–201.
Rong X M, Lu M P, Li J. Research on investment of insurance funds with underwriting risk. *Journal of Systems Engineering*, 2004, 19(2): 198–201. (in Chinese)

- [11] 荣喜民, 范立鑫. 常弹性方差模型下保险人的最优投资策略. 系统工程理论与实践, 2013, 32(12): 2619–2628.
Rong X M, Fan L X. Insurer's optimal investment strategy under constant elasticity of variance model. System Engineering: Theory and Practice. 2013, 32(12): 2619–2628. (in Chinese)
- [12] Yi B, Li Z F, Viens F G, et al. Robust optimal control for an insurer with reinsurance and investment under Heston's stochastic volatility model. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53(3): 601–614.
- [13] Liang Z B. Optimal proportional reinsurance for controlled risk process which is perturbed by diffusion. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2007, 23(3): 477–488.
- [14] David Promislow S, Young V R. Minimizing the probability of ruin when claims follow Brownian motion with drift. North American Actuarial Journal, 2005, 9(3): 110–128.
- [15] Grandell J. Aspects of Risk Theory. New York: Springer Verlag, 1991.
- [16] 傅 毅, 张寄洲, 周 翠. 含有期权的最优投资与比例再保险策略. 系统工程学报, 2015, 30(2): 181–189.
Fu Y, Zhang J Z, Zhou C. Optimal investment and proportional reinsurance strategy with options. Journal of Systems Engineering, 2015, 30(2): 181–189. (in Chinese)
- [17] Egami M, Young V R. Optimal reinsurance strategy under fixed cost and delay. Stochastic Processes and Their Applications, 2009, 119(3): 1015–1034.
- [18] Gerber H U. An Introduction to Mathematical Risk Theory. Philadelphia: SS Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania, 1979.
- [19] Fleming W H, Soner H M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York: Springer, 2006.

作者简介:

王慷新(1991—), 女, 江苏徐州人, 硕士, 研究方向: 金融数学, Email: tju_wangsuxin@163.com;

荣喜民(1963—), 男, 黑龙江大庆人, 博士, 教授, 研究方向: 金融数学, Email: rongximin@tju.edu.cn.