

数据包络分析方法(DEA)综述

杨国梁¹, 刘文斌², 郑海军¹

(1. 中国科学院科技政策与管理科学研究所, 北京 100190;

2. 英国肯特大学商学院, 坎特伯雷 CT2 7PE)

摘要: 数据包络分析方法是一种基于投入产出数据的相对有效性评价方法. 该方法中包含若干关键要素, 具体包括: 生产可能集, 测度, 偏好, 变量的类型, 问题的层次以及数据是否是确定的. 以上这些要素的组合, 可以形成不同的 DEA 模型, 用于解决不同的问题. 本文旨在围绕以上关键要素对 DEA 方法近年的若干重要研究工作和模型进行梳理和分类, 并简要介绍了 DEA 模型的若干应用. 最后, 给出未来可能的若干研究方向.

关键词: 数据包络分析方法; 相对有效性; 关键要素

中图分类号: C934

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2013)06-0840-21

Review of data envelopment analysis

Yang Guoliang¹, Liu Wenbin², Zheng Haijun¹

(1. Institute of Policy and Management, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. Kent Business School, University of Kent, Canterbury CT2 7PE, UK)

Abstract: The data envelopment analysis (DEA) is a multi-factor productivity analysis tool for measuring the relative efficiencies of a homogenous set of decision-making units (DMUs), which is firstly proposed by Charnes, Cooper and Rhodes in 1978. There are several key elements in DEA models, including production possibility set, measure, preference, type of variables, level of the evaluation problem, and explicit data or not. The combination of these elements can form different DEA model, which can be used to solve different problems. This paper aims to summarize a number of important studies in recent years based on the above six key elements of the DEA models. Also, this paper briefly describes some applications of DEA models. Finally, this paper presents some possible future research directions.

Key words: data envelopment analysis; relative efficiency; key elements

1 研究背景

数据包络分析(data envelopment analysis, DEA)方法是基于投入产出数据的相对有效性评价方法^[1].该方法的基本思想起源于 Farrell^[2]对生产率的研究,他指出前人对决策单元(decision making units, DMU)生产率的研究工作没有综合考虑多种投入和多种产出,存在诸多局限.基于此,其将生产率(productivity)的概念扩展到了生产效率(efficiency).目前 DEA 方法已经成为多投入多产出情况下决策单元相对有效性和规模收益等方面应用最为广泛的数理方法之一^[3].DEA 方法的应用对象是同类型的 DMU 单元.同类型的 DMU 单元是指 DMU 单元具有以下三个特征:一是它们具有同样的目标和任务;二是它们具有同样的

收稿日期: 2012-01-18; 修订日期: 2012-08-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71201158); 中科院科技政策与管理科学研究所重大科研资助项目(Y201531801).

外部环境;三是它们具有同样的投入和产出指标. 每个DMU单元都代表一定的经济意义, 在将投入转化为产出的过程中, 实现自身的目标. DEA方法中包含若干关键要素, 这些关键要素决定DEA模型的具体形式和用途. 这些要素包括: 1)生产可能集(production possibility set, PPS). 生产可能集可以假定为规模收益不变, 可变, 非递增和非递减等. 2)测度(measure). 测度是指在给定偏好的基础上, 用来测量DMUs绩效好坏的某种测量尺度, 包括径向测度, Russell测度等. 3)偏好(preference). 常用的偏好有帕累托偏好, 平均偏好, 矩阵偏好等. 4)变量的类型(type of variables). DMU单元的投入产出数据可以有不同的类型, 例如非任意变化变量(non-discretionary variables), 不可控变量(non-controllable variables), 有界变量(bounded variables), 负向变量(undesirable variables)等. 5)问题的层次. 6)数据是否是确定的(explicit or not). 以上这些要素的组合, 可以形成不同的DEA模型, 用于解决不同的问题. Liu等^[4]深入研究了DEA方法中的生产可能集, 测度和偏好. 本文旨在围绕以上关键要素对DEA方法近年的若干重要研究工作和模型进行梳理和分类, 介绍了确定(explicit)数据的DEA模型, 包括基于不同生产可能集假定的DEA模型, 基于不同测度的DEA模型, 蕴含不同偏好的DEA模型, 基于不同变量类型的DEA模型, 多层次DEA模型及其他DEA模型, 例如超效率DEA模型以及DEA模型的灵敏度分析等. 介绍了不确定数据的DEA模型, 包括: 基于统计特征的DEA模型, 区间数DEA模型和模糊数DEA模型等. 介绍了DEA模型的若干应用, 包括: 相对有效性评价, 规模收益分析, 最小成本问题, 最大收益问题, 最大利润问题, 技术进步贡献率的估算, 区域经济预警, 系统分类等诸多领域的应用. 最后给出研究展望.

2 确定数据的DEA模型

2.1 基于不同生产可能集假定的DEA模型

首先, 给出Banker^[5]提出的生产可能集(PPS)的定义. 考虑 n 个DMU单元, 单元 $DMU_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 有 m 个投入 $x_{ij} (i = 1, 2, \dots, m)$, s 个产出 $y_{rj} (r = 1, 2, \dots, s)$.

定义 1 定义 $T = \{(x, y) | \text{产出 } y \text{ 可由投入 } x \text{ 生产出来}\}$ 为生产可能集. 根据Banker^[5]的研究, 生产可能集(PPS)需要满足以下四条假设:

假设 1(凸性) 对 $(x, y) \in T, (x', y') \in T$, 和 $\mu \in [0, 1]$, 有 $\mu(x, y) + (1 - \mu)(x', y') \in T$.

假设 2(锥性) 如果 $(x, y) \in T, k \geq 0$, 那么 $k(x, y) = (kx, ky) \in T$.

假设 3(无效性) 定义 $(x, y) \in T$, 如果 $x' \geq x$ 那么 $(x', y) \in T$; 如果 $y' \leq y$, 那么 $(x, y') \in T$.

假设 4(最小性) 生产可能集 T 是满足上述假设1–假设3的所有集合的交集.

在满足假设1–假设4的基础上, 对已有的观察值 $(x_j, y_j) (j = 1, 2, \dots, n)$, 可得

$$T = \left\{ (x, y) \left| k \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \leq x, k \sum_{j=1}^n \mu_j y_j \geq y, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, k > 0 \right. \right\}. \quad (1)$$

若令 $k\mu_j = \lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$, 则式(1)为

$$T = \left\{ (x, y) \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda_j \geq 0 \right. \right\}. \quad (2)$$

若把假设2去掉同时加上 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ 约束, 则式(2)变为

$$T = \left\{ (x, y) \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right. \right\}. \quad (3)$$

另外,有的时候还会考虑如下形式的生产可能集

$$T = \left\{ (x, y) \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \right. \right\}, \quad (4)$$

$$T = \left\{ (x, y) \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1 \right. \right\}, \quad (5)$$

$$T = \{(x, y) | x \geq x_j, y \leq y_j, x, y \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6)$$

其中式(2)为规模收益不变假定生产可能集;式(3)为规模收益可变假定生产可能集;式(4)为非递减规模收益假定生产可能集;式(5)为非递增规模收益假定生产可能集;式(6)为自由处置壳(free disposal hull, FDH)型假定生产可能集.

此外,如果假定生产可能集有效前沿面为柯布道格拉斯型(C-D),则需要考虑将假设1(凸性)替换为假设5(几何凸性),并去掉假设2^[6].

假设5(几何凸性) 如果 $(x_j, y_j) \in T, j = 1, 2, \dots, n$, 则对于满足 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ 的 $\lambda_j \geq 0$, 有 $(x'_0, y'_0) \in T$, 这里 x'_0 和 y'_0 的第 i 个分量和第 r 个分量分别为 $x'_{i0} = \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\lambda_j}, i = 1, 2, \dots, m, y'_{r0} = \prod_{j=1}^n y_{rj}^{\lambda_j}, r = 1, 2, \dots, s$. 此时生产可能集为

$$T = \left\{ (x, y) \left| 0 < \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\lambda_j} \leq x_i, i = 1, 2, \dots, m; \prod_{j=1}^n y_{rj}^{\lambda_j} \geq y_r > 0, r = 1, 2, \dots, s; \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_s)^T \right\}. \quad (7)$$

2.1.1 基于生产可能集规模收益不变假定的 DEA 模型(CCR-DEA)

Farrell^[2]指出测量DMU单元的生产效率对相关政策制定具有重要意义,并将生产率(productivity)的概念扩展到了生产效率(efficiency). Charnes等^[1]则基于投入产出分析的原理,通过下式(8)对DMU单元相对有效性进行评价

$$\text{Max } \theta = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} \left(\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} \right)^{-1}, \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ u_r, v_i \geq \varepsilon, r = 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (8)$$

其中 ε 为非阿基米德无穷小. 模型(8)目标函数为产出与投入的比,因此称为基于投入的模型. 类似的,相应的目标函数换成投入与产出的比,则为基于产出的模型. 模型(8)也称为基于投入的CCR-DEA模型.

模型(8)是为分式规划模型(目标函数是分式),令 $\mu_r = tu_r, \nu_i = tv_i$, 其中 $t = \left(\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \right)^{-1}$, 经过Charnes-Cooper变换,可以转化为目标函数是线型函数的线性规划(linear programming, LP)模型

$$\text{Max } \theta = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0}, \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} \leq 0, \mu_r \geq \varepsilon, \sum_{i=1}^m \nu_i x_{i0} = 1, \nu_i \geq \varepsilon \\ r = 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (9)$$

模型(9)又被称为CCR-DEA的乘数模型或对偶模型. 模型(9)的对偶模型可以写成

$$\text{Min } \theta = \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right), \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0} \\ \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (10)$$

模型(10)又被称为CCR-DEA 的包络模型. 需要注意的是, CCR-DEA 模型中隐含了生产可能集规模收益不变假定(见式(2)).

2.1.2 基于生产可能集规模收益可变假定的 DEA 模型(BCC-DEA)

Banker^[7]基于生产可能集规模收益可变假定(见式(3)), 扩展了Charnes 等^[1]的工作, 提出了BCC-DEA 模型. 类似的, BCC-DEA 模型也分为基于投入和基于产出的模型. 以基于投入的BCC-DEA 模型为例, 其乘数模型(带非阿基米德无穷小变量 ε)为

$$\text{Max } \theta = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + \mu_0, \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + \mu_0 \leq 0, \sum_{i=1}^m \nu_i x_{i0} = 1 \\ \mu_r, \nu_i \geq \varepsilon, r = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \dots, m; \mu_0 \text{ 任意.} \end{cases} \quad (11)$$

基于投入的BCC-DEA 模型(带非阿基米德无穷小变量)的包络模型为

$$\text{Min } \theta = \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right), \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \\ i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (12)$$

2.1.3 Cobb-Douglas型 DEA 模型

基于式(7)定义的生产可能集, Banker 等^[6]基于产出的 C-D 型 DEA 模型如下

$$\text{Max } \theta = \alpha_0, \quad \text{s.t.} \begin{cases} \prod_{j=1}^n y_{rj}^{\lambda_j} \geq \alpha_0 y_{r0}, r = 1, 2, \dots, s \\ \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\lambda_j} \leq x_{i0} \\ i = 1, 2, \dots, m; \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (13)$$

在式(13)中引入乘子(松弛变量), 再取自然对数, 得到如下含非阿基米德无穷小变量的 DEA 模型

$$\text{Max } \theta = \bar{\alpha}_0 + \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s \bar{\psi}_{r0} + \sum_{i=1}^m \bar{\xi}_{i0} \right), \quad \text{s.t.} \begin{cases} \bar{\alpha}_0 + \bar{y}_{r0} + \bar{\psi}_{r0} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{y}_{rj}, r = 1, 2, \dots, s \\ \bar{x}_{i0} - \bar{\xi}_{i0} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{x}_{ij}, i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ \bar{\psi}_{r0}, \bar{\xi}_{i0} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s, \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\bar{\alpha}_0$ 等加上划线的符号分别表示该符号对应的自然对数.

2.1.4 NIRS, NDRS 和 FDH模型

基于非递减规模收益假定的生产可能集(见式(4))和非递增规模收益假定的生产可能集(见式(5)), 分别有 NIRS 和 NDRS 模型^[8,9]. 以基于投入的带非阿基米德无穷小变量的包络模型为例.

$$\text{Min } \theta = \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right), \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1(\text{NIRS}) \text{ 或 } \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1(\text{NDRS}), \\ \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (15)$$

基于FDH型生产可能集假定(式(6)), Deprins等^[10]提出了FDH模型, 随后Tulkens^[11]对FDH模型进行了扩展和推广, 具体如式(16)所示.

$$\text{Min } \theta, \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \in \{0, 1\} \\ i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\lambda_j \in \{0, 1\}$.

2.2 基于不同测度的 DEA 模型

经济学家在研究如何测量生产效率的过程中, 提出了多种测度函数. Farrell^[2]扩展了Koopmans^[12]和Debreu^[13]关于资源使用率的研究, 将生产效率分解为技术效率和配置效率, 并提出可以用径向测度测量DMU的技术效率. Färe和Lovell^[14]和Russell^[15,16]定义了Russell测度, 允许DMU₀按照各类投入(或产出)的方向自由扩张, 并测度各类投入(或产出)最大扩张比率的算术平均值. 此外, 还有基于松弛变量(slacks based measure, SBM)的测度^[17], Zieschang测度^[18]以及方向测度^[19,20]等.

2.2.1 Russell 测度模型

由于径向测度DEA模型各类投入(或产出)只能按照径向测度扩张, 因此难以区分强有效DMU单元和弱有效DMU单元. Färe等^[14]年提出Russell测度DEA模型, 其核心是测度DMU单元沿各指标方向收缩(扩张)比率的算术平均值. 以基于投入的Russell测度CCR-DEA模型为例

$$\text{Min } \theta = \sum_{i=1}^m \theta_i / m, \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, r = 1, 2, \dots, s \\ 0 \leq \theta_i \leq 1, i = 1, \dots, m; \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (17)$$

在式(17)中增加约束 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, j = 1, 2, \dots, n$, 即为相应的BCC-DEA模型. 由于模型(17)只考虑了投入的变化, Paster等^[21]对Russell测度DEA模型进行了修正, 提出增强Russell测度(enhancement Russell measure)模型

$$\text{Min } \theta = \frac{\sum_{i=1}^m \theta_i / m}{\sum_{r=1}^s \phi_r / s}, \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, 0 \leq \theta_i \leq 1; \phi_r \geq 1; i = 1, 2, \dots, m \\ r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (18)$$

2.2.2 加性模型

Charnes等^[22]提出加性模型(或称为Pareto-Koopmans模型)

$$\text{Min } \theta = \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right), \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (19)$$

当式(19)最优值为0时, DMU₀为DEA有效. 由于不同投入和产出之间可能存在不可公度性^[15], 同时目标函数并不是DMU单元真正的绩效测度, 因此Charnes等^[22]建议式(19)目标函数采用下面的形式.

$$Q_0 = \frac{1}{(m+s)} \left(\sum_{i=1}^m s_i^- / x_{i0} + \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{r0} \right). \quad (20)$$

为了与CCR-DEA或BCC-DEA中效率的概念一致, Sueyoshi^[23]与Chang等^[24]对加性模型进行了研究, 提出将 $1 - Q_0$ 作为目标函数, 但其不一定满足 $0 \leq 1 - Q_0 \leq 1$. Green等^[25]将目标函数修正为

$$Q_0 = \frac{1}{(m+s)} \left(\sum_{i=1}^s s_i^- / x_{i0} + \sum_{r=1}^m s_r^+ / (y_{r0} + s_r^+) \right). \quad (21)$$

2.2.3 SBM 模型

Tone^[17,26]提出了一种基于松弛变量的测量方法(slacks based measure, SBM)的 DEA 模型

$$\text{Min } \theta = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{i0}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{r0}}, \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0; r = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (22)$$

虽然 SBM 模型(22)与增强 Russell 测度 DEA 模型(18)的形式不同,但是容易证明它们之间具有等价性^[27].在同时考虑投入和产出的情况下,SBM 模型可以转化成线性规划模型^[17].

2.2.4 RAM 模型

Cooper 等^[28]给出了 RAM 模型(range adjusted measure),其中目标函数中的投入和产出的松弛变量由相应的 R^{xT} 和 R^{yT} 进行了调整,该模型为

$$\text{Max } \theta = \sum_{i=1}^m R_i^x s_i^- + \sum_{r=1}^s R_r^y s_r^+, \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$R_i^x = (m+s)^{-1} (\max \{x_{ij} | j = 1, 2, \dots, n\} - \min \{x_{ij} | j = 1, 2, \dots, n\})^{-1}, \quad (24)$$

$$R_r^y = (m+s)^{-1} (\max \{y_{rj} | j = 1, 2, \dots, n\} - \min \{y_{rj} | j = 1, 2, \dots, n\})^{-1}. \quad (25)$$

2.2.5 其它模型

Cooper 等^[29]提出了效率有界可调测度(bounded adjusted measure of efficiency, BAM)模型,并给出了在生产可能集规模收益可变假定(VRS)约束下的模型具体形式以及约束加性模型.此外,还有基于 Zieschang 测度^[18]以及方向测度^[19,20]的 DEA 模型.

2.3 蕴含不同偏好的 DEA 模型

偏好是建立在备选方案集上的一种二元关系,表达决策者对备选方案优劣的判断.偏好可分为理性偏好和非理性偏好.通常假设理性偏好关系具有自反性,传递性和完全性.帕累托(Pareto)偏好是一种理性偏好,即 A 比 B 好意味着 A 的任何一方面都不劣于 B^[30].此外,矩阵偏好,锥偏好等也是理性偏好.前文所述的 DEA 模型中大都蕴含着 Pareto 偏好,本小节总结若干蕴含其他理性偏好的 DEA 模型.

2.3.1 权重约束模型

常用的引入偏好的方法是为 DEA 模型增加权重约束,即为经典的 CCR-DEA 和 BCC-DEA 模型增加合适的权重约束.通常权重约束是通过 DEA 的乘数模型引入的.Allen 等^[31]指出,权重约束主要分为四类:1)绝对权重约束(absolute weights restriction);2)保证区域类型 I(assurance regions of type I, AR-I);3)保证区域类型 II(assurance regions of type II, AR-II);4)虚拟投入和产出上的权重约束(weight restrictions on virtual input and outputs).下面以 CCR-DEA 的乘数模型(9)为例,总结权重约束的类型,见表 1.此外,权重约束模型的相关研究见文献[32-39].

表 1 CCR-DEA 乘数模型的权重约束类型汇总

Table 1 Types of weights restrictions in CCR-DEA multiplier model

类型	权重约束	
	在投入上的权重约束	在产出上的权重约束
绝对权重约束	$\delta_i \leq v_i \leq \tau_i$	$\rho_r \leq u_r \leq \eta_r$
保证区域类型 I	$\kappa_i v_i + \kappa_{i+1} v_{i+1} \leq v_{i+2}$	$\omega_r u_r + \omega_{r+1} u_{r+1} \leq u_{r+2}$
	$\alpha_i \leq v_i / v_{i+1} \leq \beta_i$	$\theta_r \leq u_r / u_{r+1} \leq \phi_r$
保证区域类型 II	$\gamma_i v_i \leq u_r$	
虚拟投入和产出上的权重约束	$\psi_i \leq v_i x_{ij} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq \vartheta_i$	$\varpi_r \leq u_r y_{rj} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq \sigma_r$

注:字母($\delta_i, \tau_i, \rho_r, \eta_r, \kappa_i, \omega_r, \alpha_i, \beta_i, \theta_r, \phi_r, \gamma_i, \psi_i, \vartheta_i, \varpi_r, \sigma_r$)是预先确定的常数,用以反映决策者偏好.

2.3.2 锥比例约束模型

Charnes 等^[40]提出决策者偏好结构为“锥偏好”时的锥比例(cone ratio)约束 DEA 模型

$$\text{Max } \theta = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{y}_0}{\mathbf{v}^T \mathbf{x}_0}, \text{ s.t. } \mathbf{v}^T \mathbf{X} - \mathbf{u}^T \mathbf{Y} \in K; \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}, \mathbf{u} \in U \setminus \{0\}, \quad (26)$$

其中 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n)$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_n)$ 为 $s \times n$ 阶矩阵, $V \subset R_+^m, U \subset R_+^s$ 为闭凸锥, 且 $\text{Int}V \neq \varphi, \text{Int}U \neq \varphi$.

$K \subset R_+^n$ 为闭凸锥, 并且 $\delta_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in -K^*, \delta_j$ 是第 j 个分量为 1, 其余分量为 0 的 n 阶向量.

K^* 为 K 的极锥, 即 $K^* = \{\mathbf{k} | \widehat{\mathbf{k}}^T \mathbf{k} \leq 0, \forall \mathbf{k} \in K\}$. 随后, Charnes 等^[41]对锥比例约束 DEA 模型的最优解情况进行了深入的研究.

2.3.3 其它模型

还有一些蕴含其他理性偏好的 DEA 模型, 包括平均偏好 DEA 模型, 矩阵偏好 DEA 模型以及字典序偏好 DEA 模型^[42].

2.4 基于变量类型的 DEA 模型

2.4.1 存在非任意变化变量的 NDV-DEA 模型

Banker 等^[43]提出了存在非任意变化变量(non-discretionary variables, NDV)的 DEA 模型, 其核心思想是某些变量不能任意变化. 令 D 表示可随意变化的投入变量集合, ND 代表不能随意变化的投入变量集合, 具体模型如下.

$$\text{Min } \theta = \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{i \in D} s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right), \text{ s.t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0}, i \in D \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, i \in \text{ND}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}; \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \\ r = 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (27)$$

Cooper 等^[36], Ruggiero^[44-46], Syrianen^[47]以及 Muniz 等^[48]对此模型进行了深入探讨.

2.4.2 存在不可控变量的 NCV-DEA 模型

在 NDV-DEA 模型中, ND 代表不能任意变化的投入变量集合, 但 $s_i^- \geq 0$ 意味着 $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0}, i \in \text{ND}$. 但是在现实应用中, 存在某些投入或产出变量必须维持在固定的水平上, 即存在不可控变量(non-controllable variables, NCV). 令 N_1 和 N_2 分别代表不可控变量的集合, $\overline{N}_1$ 和 $\overline{N}_2$ 代表可控的变量集合, 则相应的 NCV-

DEA 模型如下^[49].

$$\text{Min } \theta = \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{i \in \bar{N}_1} s_i^- + \sum_{r \in \bar{N}_2} s_r^+ \right), \text{ s.t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0}, i \in \bar{N}_1 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{i0}, i \in N_1 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, r \in \bar{N}_2 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = y_{r0}, r \in N_2 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, s_i^-, s_r^+ \geq 0, i \in \bar{N}_1, r \in \bar{N}_2. \end{cases} \quad (28)$$

2.4.3 存在有界变量的 BND-DEA 模型

存在有界变量(bounded variables)的 BND-DEA 模型由存在不可控变量的 NCV-DEA 模型演化而来, 它将 NCV-DEA 模型中的不可控变量的约束, 变化成上下界约束^[49]. BND-DEA 模型见式(29).

$$\text{Min } \theta = \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{i \in \bar{N}_1} s_i^- + \sum_{r \in \bar{N}_2} s_r^+ \right), \text{ s.t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0}, i \in \bar{N}_1 \\ L_0^x \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq U_0^x, i \in N_1 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, r \in \bar{N}_2 \\ L_0^y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq U_0^y, r \in N_2 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; s_i^-, s_r^+ \geq 0, i \in \bar{N}_1, r \in \bar{N}_2, \end{cases} \quad (29)$$

其中 (L_0^x, U_0^x) 和 (L_0^y, U_0^y) 是 DMU₀ 单元非任意变化投入和产出的上下界.

2.4.4 存在负向变量(undesirable variables)的 DEA 模型

常见的 DEA 模型大都隐含如下假定: 即产出越多越好, 投入越小越好. 然而在现实中, 有些投入或产出指标却不是这种情况, 例如电厂的污染作为产出指标之一的情形. Seiford 等^[50], Färe 等^[51], Hua 等^[52]等对此问题进行了研究. 这些研究大都是将负向变量进行转化, 变化成正向变量进行研究. Liu 等^[53]通过重新定义生产可能集, 对存在负向投入产出变量 DEA 模型进行了深入的研究, 提出了完备的理论框架. 他们提出的模型如下.

$$\text{Min } (\alpha/\beta - \varepsilon (|s^{DI}| + |s^{UI}| + |s^{DO}| + |s^{UO}|)), \text{ s.t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n Y_j^{DO} \lambda_j - s^{DO} = \beta Y_0^{DO} \\ \sum_{j=1}^n X_j^{UI} \lambda_j - s^{UI} = \beta X_0^{DO} \\ \sum_{j=1}^n Y_j^{UO} \lambda_j + s^{UO} = \alpha Y_0^{UO} \\ \sum_{j=1}^n X_j^{DI} \lambda_j + s^{DI} = \alpha X_0^{UO} \\ \lambda \in S, \beta \geq 1, 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (30)$$

其中 $(X, Y) = (X^D, X^U, Y^D, Y^U)$ 包含正向和负向的投入产出变量, $S = \{\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\}$ 或者 $S =$

$$\left\{ \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\}.$$

2.4.5 序数变量 DEA 模型

DMU 单元的评价指标除了定量指标以外往往还有定性指标. Cook 等^[54,55]将定性指标的问题引入到 DEA 模型之中, 并通过若干组 0-1 变量构建序数变量(ordinal variables) DEA 模型. Kim 等^[56]将序数变量 DEA 模型应用到韩国电话局评价问题中. Cook 等^[57]则提出了一个带有序数变量的 IDEA 模型, 并指出 IDEA 模型与 Cook 等^[54,55]提出的模型具有等价性.

2.4.6 无明确投入的 DEA 模型

在评价实践中, 经常会有没有明确的投入数据的情形, 例如效率数据, 仅有产出数据等. Thanassoulis 等^[58]和 Despotis^[59,60]等研究了带有效率数据的 DEA 模型

$$\text{Max } \theta, \text{ s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \theta y_{r0}, r = 1, 2, \dots, s, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

Liu 等^[61]则提出了将效率数据和仅有产出数据等都归为非明确数据(without explicit inputs, WEI), 构建了相应的 DEA-WEI 模型并将决策者价值判断引入到模型之中. Yang 等^[62]则深入研究了 DEA-WEI 模型与效用函数之间的关系, 并结合多属性效用理论(MAUT)提出了带有非线性项的 DEA-WEI 模型.

2.4.7 DMU 单元存在类别的 DEA 模型

在评价实践中, DMU 单元往往会存在类别(category). 例如处于不同竞争条件的超市或银行等. 这种情况下, 往往需要将 DMU 单元进行分类评价. Banker 等^[63]指出, DMU 单元可以分为管理者可以控制的和不能控制的两类, 并构建了相应的 DEA 模型, 主要特色是将分类变量通过若干组 0-1 变量进行表达, 并增加约束 $\sum_{j=1}^n \lambda_j d_{ij}^{(k)} \leq d_{i0}^{(k)}$, 保证 DMU 单元的参照点只能在本类或更低的类别中, 从而实现 DMU 单元的分类评价. 随后, Syrjanen^[47]重新研究了此问题, 并提出了此类问题的一个框架性模型. Lober 等^[64]在前人的基础上提出了一个改进模型, 降低了计算复杂性.

2.5 多层次 DEA 模型

2.5.1 两阶段 DEA 模型

现实经济活动中, 往往存在 DMU 单元分为两个阶段的情况, 即第一阶段通过投入而获得的产出会成为第二阶段的投入. Seiford 等^[65]提出了一个两阶段(two-stage)的案例, 并采用 DEA 分别测度两个阶段的相对有效性, 但没有考虑到两个阶段之间的联系. 基于此, Kao 等^[66]考虑了两个阶段之间的联系并构建了相应的模型. Chen 等^[67]指出 Kao 等^[66]的工作是基于生产可能集规模收益不变假定(CRS), 并提出可采用加权求和的方法得到两个阶段的综合相对有效性. Wang 等^[68]则指出可以采用调和平均数(harmonic mean), 并将 Kao 等^[66]的模型推广到生产可能集规模收益可变假定(VRS)之下.

2.5.2 网络 DEA 模型

传统的 DEA 模型存在一个缺陷, 即已有的模型都没有考虑到组织内部的不同单元之间的联系^[69-71]. 现实中, 有很多组织都有多个独立的部门或单元, 这些单元之间存在着相互联系^[69]. 基于此, Färe 等^[72]提出网络(network) DEA 模型, 他们认为传统的 DEA 模型将 DMU 单元视为“黑箱”, 而网络 DEA 模型可以打开“黑箱”, 从而评价 DMU 单元整体和内部各部分的相对有效性. Tone 等^[69]提出了基于松弛变量的网络 DEA 模型, 并对电厂的绩效进行了评价. Cook 等^[73]采用加性网络 DEA 模型对 DMU 单元的整体和内部各组成单元的相对有效性进行了评价. Hsieh 等^[74]采用网络 DEA 模型对台湾旅游宾馆进行了有效性评价. 陈慈^[75]则深入研究了网络 DEA 模型的理论基础. Tone 等^[69]指出网络 DEA 模型下 DMU 单元的规模收益情况需要进一步研究.

2.5.3 层次DEA模型

从DEA方法的实践经验(rule of thumb)来看,被评单元DMU的数量至少应该为投入产出指标数的2-3倍以上,否则DEA方法对DMU单元的区分能力会降低.因此,在投入产出指标较多并且指标间具有层级结构的情况下,需要采用多层次(multi-level)DEA模型来对DMU单元进行有效性评价. Meng等^[76]提出一种两层次的DEA模型,并以中科院基础类研究所为案例进行了评价.此外, Cook等^[77,78]在此方面做了相应的研究工作.

2.6 其他DEA模型

2.6.1 超效率DEA模型

Andersen等^[79]针对此问题提出了超效率(super efficiency)DEA模型,旨在区分前沿面上的有效DMU单元.其基本思想是将有效DMU单元从参照集中提取出来,计算其超效率得分.以基于投入的带非阿基米德无穷小变量的包络形式模型(径向测度)为例,

$$\text{Min } \theta = \theta_{j_0} - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right), \text{ s.t. } \begin{cases} \sum_{j, j \neq j_0} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_{j_0} x_{ij_0} \\ \sum_{j, j \neq j_0} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rj_0} \lambda_{j_0}, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \\ r = 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (32)$$

Tone^[80]深入研究了超效率DEA模型,并提出了一个基于SBM测度的超效率DEA模型.此外,这方面的研究工作还有Rousseau等^[81], Seiford等^[82]等.

2.6.2 交叉效率(Cross efficiency)DEA模型

DMU₀的交叉效率反映DMU_j对DMU₀的交叉评价结果^[83],定义为 $\theta_{j_0} = \sum_{r=1}^s \mu_r^* y_{rj} / \sum_{i=1}^m \nu_i^* x_{ij}$ 其中 (μ_r^*, ν_i^*) 为DMU₀的基于投入的CCR-DEA模型(见式(9))的最优解,基于此,可以得到一个 $n \times n$ 的交叉效率矩阵(其中, n 代表DMU单元的个数).Sexton等^[83]以及Doyle等^[84]针对CCR-DEA模型中可能存在多重最优解问题,提出了相应的解决办法和模型,包括“进取”模型和“保守”模型. Wang等^[85]提出采用有序加权平均(OWA)算子来进行交叉效率的合成.此外, Wang等^[86]梳理了DEA交叉效率评价中权重的确定问题. Wang等^[87]则通过理想DMU单元和非理想DMU单元来合成交叉效率矩阵. Liang等^[88]提出博弈交叉效率的概念,并给出将每个DMU单元视为博弈方的博弈交叉效率模型.但是,目前现有的研究缺少对决策者偏好结构的考虑.

2.6.3 二阶DEA模型

传统的DEA模型前沿面为分段线性函数,而真实的前沿面可能是高维的曲线(不满足凸性假定).基于此, Kuosmanen等^[89]提出了二阶形式的DEA模型(quadratic DEA, QDEA)并通过数值模拟得出QDEA模型比传统的DEA模型在效率评价方面表现更好的结论. Yang等^[62]则研究了DEA-WEI模型的二阶形式,并讨论了多种偏好下的二阶DEA-WEI模型的性质.在Yang^[62]工作的基础上,还可以对DEA-WEI模型做进一步探讨,例如:带有权重约束的DEA-WEI模型等.

2.7 若干扩展问题

2.7.1 窗口数据

Charnes等^[90]采用DEA方法和窗口数据的技术研究了美国空军保养单元不同时间点的效率情况,其核心思想是将DMU单元在不同时期的表现作为不同的DMU单元进行评价,从而考察其相对有效性在不同时期的变化情况. Sun^[91]分析了窗口数据技术的特性. Cooper等^[36]讨论了这种方法的优势和不足,其中一个主要不足是初期和末期的DMU单元不如中间期的使用频率高. 基于此, Sueyoshi^[92]提出了DMU单元逐步递

增的方法(又称为 round robin)的来进行窗口数据分析.

2.7.2 时序数据

Malmquist^[93]提出全要素生产率(TFP)的概念,分析组织生产率的变化.Färe等^[51]基于DEA模型构建了Malmquist生产率指数.例如:基于0期和 t 期数据的DMU $_j$ 的Malmquist指数定义为 $M_j(0, t) = D_{j0}^0/D_{j0}^t$. Malmquist生产率指数(基于投入的)可以分解为技术变化(technical change, TC)和相对效率变化(relative efficiency change, EC)两个组成部分,如下所示.

$$M_j(0, t) = (D_{jt}^t/D_{jt}^0)(D_{j0}^0/D_{jt}^t) = TC_j(0, t)EC_j(0, t), \quad (33)$$

其中技术变化指前沿面的移动(frontier-shift effect),相对效率变化指技术效率的改进(catch-up effect).

2.7.3 灵敏度分析

Cook等^[94]指出,DEA模型的灵敏度分析主要针对如下问题:如果DEA模型中的数据发生变化,那么这些变化如何影响DMU单元的相对效率值?这个问题目前主要有三个研究方向,见表2.

表2 DEA模型灵敏度分析的三个研究方向

Table 2 Three research directions in sensitivity analysis in DEA models

研究方向	研究内容	主要工作与结论
问题规模的研究	增加或减少DMU单元从而观察DMU单元相对效率得分的灵敏度	这方面的研究主要有文献[95-97]等.他们提出一个经验公式 $n \geq \max\{m \times s, 3(m+s)\}$,其中, n 为DMU单元数, m 和 s 分别为投入和产出的指标数(rule of thumb)
直接的数据扰动	研究投入产出指标值的变化对DMU单元绩效的影响	文献[98-100]等
间接的数据扰动	对一个给定的DMU单元,在其相对效率得分不变的情况下,最大可能的投入和产出变化	Charnes等 ^[101] 针对有效DMU单元和非有效DMU单元的最大可能的投入和产出变化分别进行了研究

3 不确定数据的DEA模型

3.1 基于统计特性的DEA模型

Thore^[102]和Land等^[103,104]提出将机会约束规划的思想应用到DEA模型中,Cooper等^[105,106]则建立了基于统计特性的DEA模型.

$$\begin{aligned} \text{Max } \theta &= \Pr \left(\frac{\sum_r \mu_r \tilde{y}_{r0}}{\sum_i \nu_i \tilde{x}_{i0}} \geq \beta_0 \right), \\ \text{s.t. } \Pr \left(\frac{\sum_r \mu_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_i \nu_i \tilde{x}_{ij}} \leq \beta_j \right) &\geq 1 - \alpha_j, j = 1, 2, \dots, n; \mu_r, \nu_i \geq 0, \forall r, i, \end{aligned} \quad (34)$$

其中Pr代表概率, $\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}$ 为已知分布的随机变量, β_j 和 β_0 为相应的阈值.

此外,这方面的研究还有文献[107,108]等.

3.2 区间数DEA模型

Jahanshahloo^[109]和Hatami-Marbini等^[110]指出:实际DMU单元的投入产出数据有时会是确定的(in accurate),不精确的(imprecise)和模糊的(vague),其具体表现可能为概率形式,区间数,序数形式,定性数据或者模糊数据.Despotis等^[111]提出了区间数的DEA模型,Jahanshahloo等^[112]则针对区间数DEA模型进行了

灵敏度分析. Jahanshahloo^[109]提出了区间数 DEA 模型的广义模型. 以区间数 BCC-DEA 模型为例

$$\text{Max } \theta = \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{y}}_0 + u_0, \quad \text{s.t. } \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{y}}_j - \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{x}}_j + u_0 \leq 0, j = 1, 2, \dots, n; \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{x}}_0 = 1, \mathbf{u} \geq 1\varepsilon, \mathbf{v} \geq 1\varepsilon, \quad (35)$$

其中 $\bar{\mathbf{y}}_j, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\mathbf{y}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0$ 均为区间数向量.

设 $\bar{\mathbf{x}}_{ij} = [x_{ij}^l, x_{ij}^u]$ 和 $\bar{\mathbf{y}}_{rj} = [y_{rj}^l, y_{rj}^u]$, 则 DMU₀ 相对效率的上下限分别由以下式(36)和式(37)确定.

$$\text{Max } \bar{\theta} = \mathbf{u}^T \mathbf{y}_0^u + u_0, \quad \text{s.t. } \begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{y}_j^l - \mathbf{v}^T \mathbf{x}_j^u + u_0 \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, j \neq 0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{y}_0^u - \mathbf{v}^T \mathbf{x}_0^l + u_0 \leq 0; \mathbf{v}^T \mathbf{x}_0^l = 1, \mathbf{u} \geq 1\varepsilon, \mathbf{v} \geq 1\varepsilon, \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{Max } \underline{\theta} = \mathbf{u}^T \mathbf{y}_0^l + u_0, \quad \text{s.t. } \begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{y}_j^u - \mathbf{v}^T \mathbf{x}_j^l + u_0 \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, j \neq 0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{y}_0^l - \mathbf{v}^T \mathbf{x}_0^u + u_0 \leq 0; \mathbf{v}^T \mathbf{x}_0^u = 1, \mathbf{u} \geq 1\varepsilon, \mathbf{v} \geq 1\varepsilon. \end{cases} \quad (37)$$

如果假设式(35)–式(37)中的 $u_0 = 0$, 则为相应的区间数 CCR-DEA 模型.

3.3 模糊数 DEA 模型

Zadeh^[113, 114]提出了模糊集理论(fuzzy set theory), 并在多个领域得到了应用^[115, 116]. Sengupta^[117, 118]首先将模糊集理论引入到 DEA 方法中, 构建模糊数 DEA 模型. 以基于投入的模糊数 CCR-DEA 为例, 见式(38). 其中符号 $\hat{\cdot}$ 表示模糊数.

$$\text{Min } \theta_p, \quad \text{s.t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{x}_{ij} \leq \theta_p \hat{x}_{ip}, i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{y}_{rj} \leq \theta_p \hat{y}_{rp}, r = 1, 2, \dots, s; \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (38)$$

在式(38)中增加约束 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 可得相应的 BCC-DEA 模型. Hatami-Marbini 等^[110]指出, 模糊数 DEA 模型的相关研究可以分为四类: 容忍方法(tolerance approach), α 水平方法(α -level based approach), 模糊排序方法(fuzzy ranking approach)和可能性方法(possibility approach).

4 DEA 模型的若干应用

4.1 DEA 模型与相对有效性评价

DEA 方法作为一种 DMU 单元相对有效性评价方法, 评价 DMU 单元相对效率情况是各类 DEA 模型的基本功能. 由于 DEA 前沿面可以模拟生产函数(前沿生产函数), 因此各类 CCR-DEA 模型的最优解可以用来衡量特定约束下的生产效率 PE 或技术效率 TE, 各类 BCC-DEA 模型的最优解可用于衡量特定约束下的纯技术效率. 此外, 相应的 DEA 模型还可以用于衡量配置效率 AE 等各类生产效率.

Farrell^[2]认为生产过程的生产效率由两部分组成: 技术效率(technical efficiency, TE)和配置效率(allocative efficiency, AE). 生产效率又可以分为基于投入和基于产出的效率.

以基于投入的生产效率为例: 1) 技术效率 TE 反映在给定产出水平下, DMU 单元使用最少投入的能力, 又称为生产效率(productive efficiency, PE). TE 又可以分为纯技术效率(pure technical efficiency, PTE)和规模效率(scale efficiency, SE). PTE 指纯粹由于技术原因引起的效率变化, SE 指纯粹由于规模原因引起的效率变化. TE 和 PTE 与 SE 之间的关系为 $TE = PTE \times SE$. 见图 1. A 点的纯技术效率 $PTE = BD/AD$; A 点的规模效率 $SE = CD/BD$; A 点的技术效率为 $TE = PTE \times SE = BD/AD \times CD/BD = CD/AD$. 2) 配置效率 AE 反映在投入价格以及生产技术固定的条件下, 生产过程使用最适合比例投入组合的能力, 即生产过程是否在最

低成本下生产, 又称为价格效率(price efficiency, PE). 技术效率 TE 和配置效率 AE 共同组成总经济效率(total economic efficiency, TEE)¹.

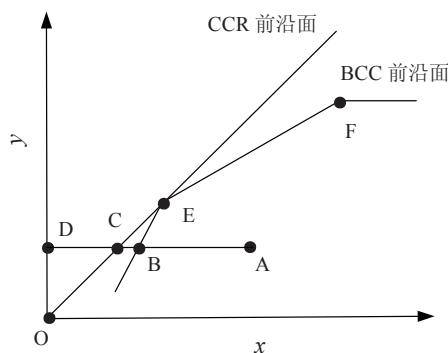


图 1 基于投入的技术效率

Fig. 1 Input-based technical efficiency

下面通过一个简单例子说明如何应用 DEA 模型进行相对有效性评价. 本例中共有八个 DMU 单元, 三个投入指标和两个产出指标. 采用基于投入的径向测度 CCR 模型(10)和 BCC 模型(12)为例, 各 DMU 单元效率值见表 3.

表 3 应用 DEA 模型进行相对有效性评价结果

Table 3 Evaluation results of relative efficiencies using DEA models

DMU	投入			产出		CCR	BCC	技术效率(TE)	纯技术效率(PTE)	规模效率(SE)
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	效率值	效率值			
1	10	0.8	540	0.9	70	0.681 1	0.756 7	0.681 1	0.756 7	0.900 1
2	15	1.0	480	1.0	95	0.833 3	0.833 3	0.833 3	0.833 3	1
3	7	0.9	520	1.0	50	0.906 4	1	0.906 4	1	0.906 4
4	10	0.3	500	0.8	70	0.799 9	1	0.799 9	1	0.799 9
5	12	1.5	550	0.75	75	0.572 7	0.727 3	0.572 7	0.727 3	0.787 4
6	6	0.3	450	0.95	100	1	1	1	1	1
7	7	0.3	420	1.0	100	1	1	1	1	1
8	8	0.3	400	1.0	95	1	1	1	1	1

由表3中可以看出: DMU₆, DMU₇ 和 DMU₈ 技术效率为 1; DMU₃, DMU₄, DMU₆, DMU₇ 和 DMU₈ 纯技术效率为 1; DMU₂, DMU₆, DMU₇ 和 DMU₈ 规模效率为 1. 据此可分析影响各 DMU 单元技术效率, 纯技术效率和规模效率的深层次原因, 作为制定相关政策的依据.

4.2 DEA 模型与规模收益

通过 DEA 方法估算 DMU 单元的规模收益(returns to scale)首先由 Banker^[5,7]提出. 文献[5]对经济学中规模收益的概念进行扩展, 把规模收益从经典经济学中引入到 DEA 方法的框架之中, 并且通过基于径向测度的 CCR-DEA 模型对 DMUs 单元的规模收益情况进行了估算. 随后, Banker 等^[7]提出了通过可变规模收益假定下的 BCC-DEA 模型, 并分析了如何应用 BCC 模型来估算规模收益情况. 到目前为止, 基于 DEA 的规模收益研究大体可以分为四类, 见表 4.

在实际的规模收益分析中, 还往往涉及“阻塞(congestion)”效应的概念, 即在不使其他投入或产出恶化的前提下, 某个(或某些)投入的减少会造成某个(或某些)最大可能产出增加^[144,145]. 本质上说, “阻塞”效应描述的投入过量的问题^[146].

¹总经济效率又被称为整体效率(overall efficiency)或成本效率(cost efficiency, CE).

Färe 等^[131,132]首先采用定量方法对“阻塞”效应进行了研究,并提出了相应的 DEA 模型(FGL 模型).随后 Cooper 等^[147]提出了另一种用于研究“阻塞”效应的 DEA 模型(CTT 模型),Cooper 等^[148]比较了以上两种模型的异同. Wei 等^[146]与 Tone 等^[149]基于“弱处置(weak disposal)”假定,重新构建了生产可能集,并构建基于新生产可能集的 DEA 模型(WY-TS 模型)对“阻塞”效应进行判定. Kao^[150]梳理了以上三类“阻塞”效应的研究工作,并指出 CTT 模型和 WY-TS 模型比 FGL 模型对“阻塞”效应的区分能力更强,同时 WY-TS 模型还能区分纯技术效率(PTE)和“阻塞”效应,而 CTT 模型做不到这一点. Sueyoshi 等^[151]则研究了多重投影(multiple projections)情况下的“阻塞”效应问题.

表4 基于 DEA 模型的规模收益研究

Table 4 Studies on Returns to scale based on DEA models

主要方法	相关研究与基本结论
采用CCR-DEA 模型	一个众所周知的确定被评单元规模收益情况的方法是在不变规模收益假定下计算 DEA 模型中的 $\sum_{j=1}^n \lambda_j^*$. 在这方面的研究有文献[5, 119–126].
采用BCC-DEA 模型	作为第一类研究的扩展,可以在可变规模收益假定下通过支撑超平面在生产可能集上的截距来估算被评单元的规模收益情况 ^[5] . 这个截距体现为 DEA 模型凸约束中的一个对偶变量. 因此,可以通过截距的符号(正的,负的, 0)来判定被评单元的规模收益情况,或者分析 DMU 单元在一个小的邻域内的性质来判定其规模收益情况. 在这方面的研究主要有文献[49,121,127–130].
采用 FGL-DEA 模型及定量研究规模弹性	此类研究最早可以追溯到 Färe 等 ^[9,131,132] 的研究. 他们通过分析规模效率来判断被评单元是否达到了规模收益最优(规模收益不变),他们通过一系列径向测度 DEA 模型效率的比例对 DMUs 单元的规模收益情况进行估算. 这些比例是通过一系列模型的最优解得到的,而这些模型的不同在于约束条件有所不同. 在这类研究工作中, Forsund ^[133] 不仅讨论了规模收益的类型,还讨论了如何定量的衡量规模收益的大小. Fukuyama ^[134] 则进一步扩展到了规模弹性的定量估算方法,他的研究结果显示定性定量判定方法的重要性,并且给出了规模弹性测量的理论综述.
应用非径向测度的 DEA 模型	以上前三类研究工作都是基于径向测度(radial)的 DEA 模型. 而 radial 测度的 DEA 模型存在明显的不足,即会遗漏松弛变量的信息(missing slacks). 为了弥补这些问题, Zhu ^[135,136] , Tone ^[80,137] 和 Chen ^[138] 等提出多种的非径向测度的 DEA 模型,包括 Russell 测度的 DEA 模型、加性 DEA 模型等等. 很自然的,人们会想到需要利用非径向(non-radial)模型来衡量规模收益情况. 例如: Banker 等 ^[139] 讨论了加性模型(additive model)和乘积模型(multiplicative model)下的规模收益问题. Sueyoshi 等 ^[140] 则探索了生产方案包括反馈过程的动态 DEA 模型情况下的规模收益问题. Zarepisheh ^[141] 则研究了 C-D 型 DEA 模型的规模收益估算问题. 此外,还有 Lozano 等 ^[142] 和 Sueyoshi ^[143] 等的研究工作等.

4.3 DEA 模型的其他应用

由于通过 DEA 模型的前沿面可以模拟生产函数,因此经济学中与生产函数相关的很多问题都可以通过 DEA 模型进行分析,例如最小成本问题,最大收益问题与最大利润问题等. 此外,DEA 模型还广泛用于技术进步贡献率的估算、区域经济预警以及系统分类等诸多领域,并处于不断蓬勃发展之中^[152].

5 结束语

本文凝练了 DEA 模型中包含的六大关键要素,这些要素决定 DEA 模型的具体形式和用途,具体包括: 1) 生产可能集; 2) 测度; 3) 偏好; 4) 变量的类型; 5) 问题的层次; 6) 数据是否是确定的. 以上这些要素的组合,可以形成不同的 DEA 模型,用于解决不同的问题. 本文围绕以上关键要素对 DEA 方法近年的若干重要研究工作和模型进行梳理和分类,并简要介绍了 DEA 模型的若干应用. 限于篇幅,还有很多优秀的研究工作本文未能详尽,例如: 马赞甫等^[153]关于四类 DEA 模型的研究,杨锋等^[156]关于链形系统生产可能集的研究,张宝成等^[157]关于含非阿基米德无穷小量 DEA 模型的研究,和马占新等^[158]关于广义数据包络分析方法的研究等. 作为管理科学的一个新的研究领域,DEA 相关的研究工作(包括方法与实践)正在以指数规律不断增长^[154]. 整体来看,DEA 方法未来可能的研究方向有: 一是决策者价值判断在 DEA 模型中的体现. 目

前已有若干带有决策者价值判断的 DEA 模型,例如在 DEA 模型中增加权重约束等;但目前体现决策者价值判断的方式往往需要以决策者偏好结构满足“加性独立”为前提条件.在决策者偏好结构不满足“加性独立”条件时,不同指标之间存在证据加强的效果^[155].这种情况下,如何通过 DEA 模型体现决策者的价值判断是需要进一步研究的问题;二是网络 DEA 模型的相关研究.网络 DEA 是目前研究的热点之一,虽然陈慈^[75]构建了网络 DEA 的理论基础,但是还存在很多问题有待进一步研究,包括动态网络 DEA 模型,网络 DEA 模型下 DMU 单元规模效率,配置效率以及规模收益情况等;三是交叉效率 DEA 模型中的效率合成问题.Wang 等^[85]指出“现有交叉效率的研究主要聚焦在其应用和交叉效率矩阵的生成,很少有研究关注交叉效率合成的过程.交叉效率合成目前应用最广的方法就是等权加和.”可见交叉效率 DEA 模型中的效率合成问题的研究还不充分;四是二阶 QDEA 模型相关研究.传统的 DEA 模型通过前沿面对生产函数采用分段线性函数来进行估计,而事实上生产函数可能是高维的曲线.基于此,Kuosmanen 等^[89]提出了二阶 QDEA 模型,并指出 QDEA 模型比传统的 DEA 模型在效率评价方面表现更好.到目前为止,二阶 DEA 模型相关研究还有待进一步加强,包括 DMU 单元的规模收益研究,带有权重约束的 DEA-WEI 模型等.

参考文献:

- [1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E L. Measuring the efficiency of decision making units[J]. *European Journal of Operational Research*, 1978, 2(6): 429–444.
- [2] Farrell M J. The measurement of productive efficiency[J]. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, 1957, 120(3): 253–290.
- [3] 魏权龄. 数据包络分析[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
Wei Quanling. Data Envelopment Analysis[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)
- [4] Liu W B, Sharp J, Wu Z M. Preference, production, and performance in data envelopment analysis[J]. *Annals of Operation Research*, 2006, 145(1): 105–127.
- [5] Banker R D. Estimating the most productive scale size using data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 1984, 17(1): 35–44.
- [6] Banker R D, Maindiratta A. Piecewise loglinear estimation of efficient production surfaces[J]. *Management Science*, 1986, 32(1): 126–135.
- [7] Banker R D, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis[J]. *Management Science*, 1984, 30(9): 1078–1092.
- [8] Färe R, Grosskopf S, Lovell C A K. *The Measurement of Efficiency of Production*[M]. Boston: Kluwer Nijhoff. Publishing Co., 1985.
- [9] Färe R, Grosskopf S, Lovell C A K. *Production Frontiers*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [10] Deprins D, Simar L, Tulkens H. Measuring labor efficiency in post offices[C] // Marchand M, Pestieau P, Tulkens H. *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurement*. Amsterdam: North Holland. 1984: 243–267.
- [11] Tulkens H. On FDH efficiency analysis: Some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit[J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1993, 4(1): 183–210.
- [12] Koopmans T C. Analysis of production as an efficient combination of activities[M] // Koopmans T C. *Activity Analysis of Production and Allocation*. New York: Wiley, 1957, 33–97.
- [13] Debreu G. The coefficient of resource utilization[J]. *Econometrica*, 1951, 19(3): 273–292.
- [14] Färe R, Lovell C A K. Measuring the technical efficiency of production[J]. *Journal of Economic Theory*, 1978, 19(1): 150–162.
- [15] Russell R R. On the axiomatic approach to the measurement of technical efficiency[M] // Eichorn W. *Measurement in Economics*. Heidelberg: Physica-Verlag, 1988.
- [16] Russell R R. Continuity of measures of technical efficiency[J]. *Journal of Economic Theory*, 1990, 51(2): 255–267.
- [17] Tone K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 130(3): 498–509.

- [18] Zieschang K O. An extended Farrell technical efficiency measure[J]. *Journal of Economic Theory*, 1984, 33(2): 387–396.
- [19] Luenberger D G. Benefit functions and duality[J]. *Journal of Mathematical Economics*, 1992, 21(5): 461–481.
- [20] Luenberger D G. *Microeconomic Theory*[M]. Boston: McGraw-Hill, 1995.
- [21] Pastor J T, Ruiz J L, Sirvent I. An enhanced DEA Russell graph efficiency measure[J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 115(3): 596–607.
- [22] Charnes A, Cooper W W, Golany B, et al. Foundations of data envelopment analysis and Pareto-Koopmans empirical production functions[J]. *Journal of Econometrics*, 1985, 30(1–2): 91–107.
- [23] Sueyoshi T. A special algorithm for the additive model in DEA [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1990, 41(3): 249–257.
- [24] Chang Y, Sueyoshi T. An interactive application of DEA in microcomputers[J]. *Computer Science in Economics and Management*, 1991, 4(1): 51–64.
- [25] Green R H, Cook W D, Doyle J. A note on the additive data envelopment analysis model[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1997, 48(4): 446–448.
- [26] Tone K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 130(3): 498–509.
- [27] 张大群. 标杆比较分析的数学理论及其应用[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2009.
Zhang Daqun. *The Benchmarking Comparison Analysis and Its Application*[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2009. (in Chinese)
- [28] Cooper W W, Park K S, Pastor J T. RAM: A range adjusted measure of inefficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1999, 11(1): 5–42.
- [29] Cooper W W, Pastor J T, Borras F, et al. BAM: A bounded adjusted measure of efficiency for use with bounded additive models[J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2011, 35(2): 85–94.
- [30] Pareto V. *Manual of Political Economy*[M]. New York: Augustus M. Kelley, 1971.
- [31] Allen R, Athanassopoulos A, Dyson R G, et al. Weights restrictions and value judgements in data envelopment analysis: Evolution, development and future directions[J]. *Annals of Operations Research*, 1997, 73(1): 13–34.
- [32] Roll Y, Cook W D, Golany B. Controlling factor weights in data envelopment analysis[J]. *IIIE Transactions*, 1991, 23(1): 2–9.
- [33] Dyson R G, Thanassoulis E. Reducing weight flexibility in data envelopment analysis[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1998, 39(6): 563–576.
- [34] Thompson R G, Jr Singleton, F D, Thrall R M, et al. Comparative site evaluation for locating a high-energy physics lab in Texas[J]. *Interfaces*, 1986, 16(6): 35–49.
- [35] Thompson R G, Langemeier L N, Lee C T, et al. The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming[J]. *Journal of Econometrics*, 1990, 46(1): 93–108.
- [36] Cooper W W, Seiford L M, Tone K. *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses*[M]. New York: Springer Science and Business Media, 2006.
- [37] Cook W D, Hababou M, Tuenter H. Multi-component efficiency measurement and shared inputs in data envelopment analysis: An application to sales and service performance in bank branches[J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2000, 14(3): 209–224.
- [38] Cook W D, Zhu J. Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 180(2): 692–699.
- [39] Cook W D, Zhu J. CAR-DEA: Context dependent assurance regions in DEA [J]. *Operations Research*, 2008, 56(1): 69–78.
- [40] Charnes A, Cooper W W, Wei Q L, et al. Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming[J]. *International Journal of Systems Science*, 1989, 20(7): 1099–1118.
- [41] Charnes A, Cooper W W, Wei Q L, et al. Fundamental theorems of non-dominated solutions associated with cones in normed linear spaces[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1990, 150(1): 54–78.
- [42] Zhang D Q, Li X X, Meng W, et al. Measure the performance of nations at Olympic Games using DEA models with different preferences[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2008, 60(7): 983–990.
- [43] Banker R D, Morey R C. Efficiency analysis for exogenously fixed inputs and outputs[J]. *Operations Research*, 1986, 34(4), 513–521.

- [44] Ruggiero J. On the measurement of technical efficiency in the public sector[J]. *European Journal of Operational Research*, 1996, 90(3): 553–565.
- [45] Ruggiero J. Non-discretionary inputs in data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 1998, 111(3): 461–469.
- [46] Ruggiero J. Non-discretionary inputs[M] // Zhu J, Cook W D. *Modeling Data Irregularities and Structural Complexities in Data Envelopment Analysis*. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [47] Syrjanen M J. Non-discretionary and discretionary factors and scale in data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, 158(1), 20–33.
- [48] Muniz M, Paradi J, Ruggiero J, et al. Evaluating alternative DEA models used to control for non-discretionary inputs[J]. *Computers and Operations Research*, 2006, 33(5): 1173–1183.
- [49] Cooper W W, Seiford L M, Tone K. *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*[M]. Boston: Kluwer Academic, 2000.
- [50] Seiford L, Zhu J. Modeling undesirable factors in efficiency evaluation[J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 142(1): 16–20.
- [51] Färe R, Grosskopf S. Modeling undesirable factors in efficiency evaluation: Comment[J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, 157(1), 242–245.
- [52] Hua Z, Bin Y. DEA with undesirable factors[M] // Zhu J, Cook W D. *Modeling Data Irregularities and Structural Complexities in Data Envelopment Analysis*. New York: Springer, 2007.
- [53] Liu W B, Meng W, Li X X, et al. DEA models with undesirable inputs and outputs[J]. *Annals of Operations Research*, 2010, 173(1): 177–194.
- [54] Cook W D, Kress M, Seiford L M. On the use of ordinal data in data envelopment analysis[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1993, 44(2): 133–140.
- [55] Cook W D, Kress M, Seiford L M. Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1996, 47(7): 945–953.
- [56] Kim S H, Park C K, Park K S. An application of data envelopment analysis in telephone offices evaluation with partial data[J]. *Computers and Operations Research*, 1999, 26(1): 59–72.
- [57] Cook W D, Zhu J. Rank order data in DEA: A general framework[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 174(2): 1021–1038.
- [58] Thanassoulis E, Boussofiane A, Dyson R G. A comparison of data envelopment analysis and ratio analysis as tools for performance assessment[J]. *Omega: The International Journal of Management Science*, 1996, 24(3): 229–244.
- [59] Despotis D K. Measuring human development via data envelopment analysis: The case of Asia and the Pacific[J]. *Omega: The International Journal of Management Science*, 2005, 33(5): 385–390.
- [60] Despotis D K. A reassessment of the human development index via data envelopment analysis[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2005, 56(8): 969–980.
- [61] Liu W B, Zhang D Q, Meng W, et al. A study of DEA models without explicit inputs[J]. *Omega: The International Journal of Management Science*, 2011, 39(5): 472–480.
- [62] Yang G L, Shen W F, Zhang D Q, et al. Extended utility and DEA models without explicit input[BD/ON]. *Journal of the Operational Research Society*, 2013, doi:10.1057/jors.2013.68.
- [63] Banker R D, Morey R C. The use of categorical variables in data envelopment analysis[J]. *Management Science*, 1986, 32(12): 1613–1627.
- [64] Lober G, Staat M. Integrating categorical variables in data envelopment analysis models: A simple solution technique[J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 202(3): 810–818.
- [65] Seiford L M, Zhu J. Profitability and marketability of the top 55 U.S. commercial banks[J]. *Management Science*, 1999, 45(9): 1270–1288.
- [66] Kao C, Huang S N. Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan[J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 185(1): 418–429.

- [67] Chen Y, Liang L, Zhu J. Equivalence in two-stage DEA approaches[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 193(2): 600–604.
- [68] Wang Y M, Chin K S. Some alternative DEA models for two-stage process[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(12): 8799–8808.
- [69] Tone K, Tsutsui M. Network DEA: A slacks-based measure approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 197(1): 243–252.
- [70] Färe R. Measuring Farrell efficiency for a firm with intermediate inputs[J]. *Academia Economic Papers*, 1991, 19(2): 329–340.
- [71] Färe R, Grosskopf S, Roos P. Network and productivity models of Swedish pharmacies[R]. lund, Sweden: The Swedish Institute for Health Economics, 1996.
- [72] Färe R, Grosskopf S. Network DEA [J]. *Socio-Economic Planning Sciences*, 2000, 34(1): 35–49.
- [73] Cook W D, Zhu J, Bi G B, et al. Network DEA: Additive efficiency decomposition[J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 207(2): 1122–1129.
- [74] Hsieh L F, Lin L H. A performance evaluation model for international tourist hotels in Taiwan: An application of the relational network DEA [J]. *International Journal of Hospitality Management*, 2010, 29(1): 14–24.
- [75] 陈 慈. 网络DEA的理论基础[D]. 北京: 中国人民大学, 2009.
Chen Ci. Theoretical Research on Network DEA[D]. Beijing: China Renmin University, 2009. (in Chinese)
- [76] Meng W, Zhang D Q, Qi L, et al. Two-level DEA approaches in research evaluation[J]. *Omega: The International Journal of Management Science*, 2008, 36(6): 950–957.
- [77] Cook W D, Chai D, Doyle J, et al. Hierarchies and groups in DEA[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1998, 47(7): 945–953.
- [78] Cook W D, Green R H. Evaluating power plant efficiency: A hierarchical model[J]. *Computers and Operations Research*, 2005, 32(4): 813–823.
- [79] Anderson T R, Hollingsworth K B, Inman L B. The fixed weighting nature of a cross-evaluation model[J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2002, 18(1): 249–255.
- [80] Tone K. A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 143(1): 32–41.
- [81] Rousseau J J, Semple J H. Two-person ratio efficiency games[J]. *Management Science*, 1995, 41(3): 435–441.
- [82] Seiford L, Zhu J. An acceptance system decision rule with data envelopment analysis[J]. *Computers and Operations Research*, 1998, 25(4): 329–332.
- [83] Sexton T R, Silkman R H, Hogan A J. Data Envelopment analysis: Critique and extensions[M] // Silkman R H. *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*. San Francisco: Jossey-Bass, 1986.
- [84] Doyle J, Green R. Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses[J]. *Journal of the Operations Research Society*, 1994, 45(5): 567–578.
- [85] Wang Y M, Chin K S. The use of OWA operator weights for cross-efficiency aggregation[J]. *Omega: The International Journal of Management Science*, 2011, 39(5): 493–503.
- [86] Wang Y M, Chin K S, Jiang P. Weight determination in the cross-efficiency evaluation[J]. *Computers and Industrial Engineering*, 2011, 61(3): 497–502.
- [87] Wang Y M, Chin K S, Luo Y. Cross-efficiency evaluation based on ideal and anti-ideal decision making units[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38(8): 10312–10319.
- [88] Liang L, Wu J, Cook W D, et al. The DEA game cross efficiency model and its Nash equilibrium[J]. *Operations Research*, 2008, 56(5): 1278–1288.
- [89] Kuosmanen T, Post T. Quadratic data envelopment analysis[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2002, 53(11): 1204–1214.
- [90] Charnes A, Clark C T, Cooper W W, et al. A developmental study of data envelopment analysis in measuring the efficiency of maintenance units in the U.S. air forces[J]. *Annals of Operations Research*, 1985, 2(1): 95–112.
- [91] Sun D B. Evaluation of Managerial Performance in Large Commercial Banks by Data Envelopment Analysis[D]. Austin: The University of Texas, 1988.

- [92] Sueyoshi T. Comparisons and analyses of managerial efficiency and returns to scale of telecommunication enterprises by using DEA/WINDOW[J]. Communications of the Operations Research Society of Japan, 1992, 37(5): 210–219.
- [93] Malmquist S. Index numbers and indifference surfaces[J]. Trabajos de Estadística, 1953, 4(2): 209–242.
- [94] Cook W D, Seiford L M. Data envelopment analysis (DEA)-thirty years on[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(1): 1–17.
- [95] Wilson P W. Detecting influential observations in data envelopment analysis[J]. Journal of Productivity Analysis, 1995, 6(1): 183–210.
- [96] Banker R D, Chang H, Cooper W W. Simulation studies of efficiency, returns to scale and misspecification with nonlinear functions in DEA [J]. Annals of Operations Research, 1996, 66(4): 233–253.
- [97] Ahn T, Seiford L M. Sensitivity of DEA to models and variable sets in an hypothesis test setting: The efficiency of university operations[M] // Ijiri Y. Creative and Innovative Approaches to the Science of Management. New York: Quorum Books, 1993.
- [98] Charnes A, Neralic L. Sensitivity analysis in data envelopment analysis[J]. Glasnik Matematicki, 1992, 27(47): 191–201.
- [99] Neralic L. Sensitivity in data envelopment analysis for arbitrary perturbations of data[J]. Glasnik Matematicki, 1997, 32(2): 315–335.
- [100] Neralic L. Preservation of efficiency and inefficiency classification in data envelopment analysis[J]. Mathematical Communications, 2004, 9(1): 51–62.
- [101] Charnes A, Haag S, Jaska P, et al. Sensitivity of efficiency calculations in the additive model of data envelopment analysis[J]. International Journal of System Sciences, 1992, 23(5): 789–798.
- [102] Thore S. Chance-constrained activity analysis[J]. European Journal of Operational Research, 1987, 30(3): 267–269.
- [103] Land K C, Lovell C A K, Thore S. Productive efficiency under capitalism and state socialism: The chance constrained programming approach[J]. Public Finance in a World of Transition, 1992, 47(s): 109–121.
- [104] Land K C, Lovell C A K, Thore S. Production efficiency under capitalism and state socialism: An empirical inquiry using chance-constrained data envelopment analysis[J]. Technological Forecasting and Social Change, 1994, 46(2): 139–152.
- [105] Cooper W W, Huang Z, Li S. Satisficing DEA models under chance constraints[J]. Annals of Operations Research, 1996, 66(4): 279–295.
- [106] Cooper W W, Huang Z, Li S. Chance constraint DEA[M] // Cooper W W, Seiford L M, Zhu J. Handbook on Data Envelopment Analysis. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [107] Cooper W W, Huang Z, Li S, et al. Chance constrained programming formulations for stochastic characterizations of efficiency and dominance in DEA [J]. Journal of Productivity Analysis, 1998, 9(1): 53–79.
- [108] Olesen O B, Petersen N C. Chance constrained efficiency evaluation[J]. Management Science, 1995, 41(3): 442–457.
- [109] Jahanshahloo G R, Hosseinzadeh L F, Rostamy M M, et al. A generalized model for data envelopment analysis with interval data[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(7): 3237–3244.
- [110] Hatami-Marbini A, Emrouznejad A, Tavana M. A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 214(3): 457–472.
- [111] Despotis D K, Smirlis Y G. Data envelopment analysis with imprecise data[J]. European Journal of Operational Research, 2002, 140(1): 24–36.
- [112] Jahanshahloo G R, Hosseinzadeh Lotfi F, Moradi M. Sensitivity and stability analysis in DEA with interval data[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 156(2): 463–477.
- [113] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338–353.
- [114] Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1): 3–28.
- [115] Chiou H K, Tzeng G H, Cheng D C. Evaluating sustainable fishing development strategies using fuzzy MCDM approach[J]. Omega: The International Journal of Management Science, 2005, 33(3): 223–234.
- [116] Ho W, Xu X, Dey P K. Multi-criteria decision making approaches for supplier evaluation and selection: A literature review[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 202(1): 16–24.
- [117] Sengupta J K. A fuzzy systems approach in data envelopment analysis[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1992, 24(8/9): 259–266.
- [118] Sengupta J K. Measuring efficiency by a fuzzy statistical approach[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 46(1): 73–80.

- [119] Chang K P, Guh Y Y. Linear production functions and the data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 1991, 52(2): 215–223.
- [120] Ganley A, Cubbin J S. *Public Sector Efficiency Measurement: Applications of Data Envelopment Analysis*[M]. London: Elsevier Science Publishers, 1992.
- [121] Banker R D, Thrall R M. Estimation of returns to scale using data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 1992, 62(1): 74–84.
- [122] Zhu J, Shen Z H. A discussion of testing DMU's returns to scale[J]. *European Journal of Operational Research*, 1995, 81(3): 590–596.
- [123] Banker R D, Chang H, Cooper W W. Equivalence and implementation of alternative methods for determining returns to scale in data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 1996, 89(3): 473–481.
- [124] Banker R D, Bardhan I, Cooper W W. A note on returns to scale in DEA[J]. *European Journal of Operational Research*, 1996, 88(3): 583–585.
- [125] Seiford L M, Zhu J. On piecewise loglinear and log efficiency measures[J]. *Computers and Operations Research*, 1998, 25(5): 389–395.
- [126] Seiford L M, Zhu J. An investigation of returns to scale in data envelopment analysis[J]. *Omega: The International Journal of Management Science*, 1999, 27(1): 1–11.
- [127] Tone K. A simple characterization of returns to scale in DEA[J]. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 1996, 39(4): 604–613.
- [128] Golany B, Yu G. Estimating returns to scale in DEA[J]. *European Journal of Operational Research*, 1997, 103(1): 28–37.
- [129] Sueyoshi T. DEA duality on returns to scale (RTS) in production and cost analyses: An occurrence of multiple solutions and differences between production-based and cost-based RTS estimates[J]. *Management Science*, 1999, 45(11): 1593–1608.
- [130] Tone K, Sahoo B K. Scale, indivisibilities and production function in data envelopment analysis[J]. *International Journal of Production Economics*, 2003, 84(2): 165–192.
- [131] Färe R, Grosskopf S. A nonparametric cost approach to scale efficiency[J]. *Scandinavian Journal of Economics*, 1985, 87(4): 594–604.
- [132] Färe R, Grosskopf S, Lovell C A K. The structure of technical efficiency[J]. *Scandinavian Journal of Economics*, 1983, 85(2): 181–190.
- [133] Førsund F R. On the calculation of the scale elasticity in DEA models[J]. *The Journal of Productivity Analysis*, 1996, 7(2/3): 283–302.
- [134] Fukuyama H. Returns to scale and scale elasticity in data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2000, 125(1): 225–239.
- [135] Zhu J. Data envelopment analysis with preference structure[J]. *The Journal of the Operational Research Society*, 1996, 47(1): 136–150.
- [136] Zhu J. Super-efficiency and DEA sensitivity analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 129(2): 443–455.
- [137] Tone K. On returns to scale under weight restrictions in data envelopment analysis[J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2001, 16(1): 31–37.
- [138] Chen Y. Non-radial Malmquist productivity index with an illustrative application to Chinese major industries[J]. *International Journal of Production Economics*, 2003, 83(1): 27–35.
- [139] Banker R D, Cooper W W, Seiford L M, et al. Returns to scale in different DEA models[J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, 154(2): 345–362.
- [140] Sueyoshi T, Sekitani K. Returns to scale in dynamic DEA[J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 161(2): 536–544.
- [141] Zarepisheh M, Khorram E, Jahanshahloo G R. Returns to scale in multiplicative models in data envelopment analysis[J]. *Annals of Operations Research*, 2010, 173(1): 195–206.
- [142] Lozano S, Gutierrez E. Efficiency analysis and target setting of spanish airport[J]. *Networks and Spatial Economics*, 2011, 11(1): 139–157.
- [143] Sueyoshi T, Sekitani K. Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 176(3): 1918–1946.

- [144] Cooper W W, Seiford L M, Zhu J. Handbook on Data Envelopment Analysis[M]. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [145] Cooper W W, Seiford L M, Zhu J. Handbook on Data Envelopment Analysis[M]. Second Edition. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 2011.
- [146] Wei Q L, Yan H. Congestion and returns to scale in data envelopment analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 153(3): 641–660.
- [147] Cooper W W, Thompson R G, Thrall R M. Introduction: Extension and new developments in DEA [J]. Annals of Operations Research, 1996, 66(1): 3–45.
- [148] Cooper W W, Gu B S, Li S L. Comparisons and evaluation of alternative approaches to the treatment of congestion in DEA [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 132(1): 62–67.
- [149] Tone K, Sahoo B K. Degree of scale economies and congestion: A unified DEA approach[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 158(3): 755–772.
- [150] Kao C. Congestion measurement and elimination under the framework of data envelopment analysis[J]. International Journal of Production Economics, 2010, 123(2): 257–265.
- [151] Sueyoshi T, Sekitani K. DEA congestion and returns to scale under an occurrence of multiple optimal projections[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 194(2): 592–607.
- [152] 盛昭瀚, 朱 乔, 吴广谋. DEA 理论, 方法与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
Sheng Zhaohan, Zhu Qiao, Wu Guangmou. DEA Theory, Methods and Applications[M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)
- [153] 马赞甫, 刘妍珺. 四类 DEA 模型相互关系及其在计算中的应用[J]. 系统工程学报, 2011, 26(4): 558–565.
Ma Zhanfu, Liu Yanjun. Mutual relation among four DEA models and its application in computation[J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(4): 558–565. (in Chinese)
- [154] Gattoufia S, Orala M, Reisman A. A taxonomy for data envelopment analysis[J]. Socio-Economic Planning Sciences, 2004, 38(2/3): 141–158.
- [155] 陈 廷. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
Chen Ting. Decision Analysis[M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)
- [156] 杨 锋, 翟笃俊, 梁 樑, 等. 两阶段链形系统生产可能集与 DEA 评价模型[J]. 系统工程学报, 2010, 25(3): 401–406.
Yang Feng, Zhai Dujun, Liang Liang, et al. Production possibility set and DEA evaluation model for two-stage series systems[J]. Journal of Systems Engineering, 2010, 25(3): 401–406. (in Chinese)
- [157] 张宝成, 王万乐, 林卫峰, 等. 含非阿基米德无穷小量 DEA 模型的研究综述[J]. 系统工程学报, 2010, 25(3): 407–414.
Zhang Baocheng, Wang Wanle, Lin Weifeng, et al. Review on DEA models involving the non-Archimedean infinitesimal[J]. Journal of Systems Engineering, 2010, 25(3): 407–414. (in Chinese)
- [158] 马占新, 马生昀. 基于 C2WY 模型的广义数据包络分析方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 251–261.
Ma Zhanxin, Ma Shengyun. Generalized data envelopment analysis method based on C2WY model[J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(2): 251–261. (in Chinese)

作者简介:

杨国梁 (1977—), 男, 河北唐山人, 副研究员, 研究方向: 科技评价和 DEA 方法, Email: glyang@casipm.ac.cn;
刘文斌 (1958—), 男, 湖南长沙人, 教授, 研究方向: 绩效管理和 DEA 方法, Email: w.b.liu@kent.ac.uk;
郑海军 (1982—), 男, 山东泰安人, 助理研究员, 研究方向: 科技评价, Email: haijzheng@casipm.ac.cn.