

# 巴黎期权的PDE定价及隐性差分方法研究

宋 斌, 周湛满, 魏 琳, 张冰洁

(中央财经大学管理科学与工程学院, 北京 100081)

**摘要:** 在假设标的资产价格服从几何布朗运动的基础上, 指出了已有文献中关于巴黎期权的偏微分方程(PDE)定价方法存在的问题, 给出了正确的边界条件和终值条件, 利用方向导数将该三维PDE降为二维PDE. 进而运用隐性差分方法为巴黎期权定价. 并将其与显性差分方法比较, 数值结果表明, 隐性差分方法绝对稳定, 收敛速度快且计算成本较低.

**关键词:** 巴黎期权; 偏微分方程; 方向导数; 隐性差分; 绝对稳定性

**中图分类号:** F830.91      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-5781(2013)06-0764-11

## Parisian option's PDE pricing and its implicit difference method

Song Bin, Zhou Zhanman, Wei Lin, Zhang Bingjie

(School of Management Science and Engineering, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Based on the assumptions that the underlying asset price of option follows the Geometric Brownian Motion, this paper corrects the problems existing in Parisian options' PDE pricing in Haber's paper, explores the right boundary and terminal conditions and employs the directional derivatives to transform three dimensional PDE to two dimensional PDE. This paper used the implicit finite difference method for Parisian option pricing. Comparing the numerical results with explicit finite difference method, the proposed method is absolute stable, fast convergence and low computation cost.

**Key words:** Parisian option; partial differential equations; directional derivatives; implicit finite difference; absolute stability

## 1 引 言

巴黎期权是一种复杂的路径依赖型期权, 根据持续时间的计时方式不同, 主要分为两种类型: 连续巴黎期权和累计巴黎期权. 持续时间的加入可以有效地限制价格操纵, 保证了市场的公平性. Chesney等<sup>[1]</sup>运用布朗运动徘徊得到了零时刻欧式巴黎期权定价的拉普拉斯变换形式. Labart等<sup>[2]</sup>采用欧拉法和法通过数值逆变换, 解出了在零时刻的巴黎期权价格. Hugonnier<sup>[3]</sup>用 Feynman-Kac 公式研究了累计巴黎期权, 但该方法不能为连续巴黎期权定价. Haber等<sup>[4]</sup>从动态复制角度出发, 给出了巴黎期权定价的偏微分方程(partial differential equations, PDE), 并用显性差分方法求解. 该文中关于巴黎期权PDE的定解条件存在一定的问题, 且显性差分稳定性差, 收敛速度慢. Zhu等<sup>[5]</sup>在一定程度上修正了巴黎期权PDE的边界条件和终值条件, 同样采用显性差分方法进行计算并与文献[4]的结果进行了比较. 罗俊等<sup>[6]</sup>采用算子分裂方法处理巴黎期权的PDE给出了三维PDE的隐性差分过程及其数值解精度. 陆金甫等<sup>[7]</sup>详细分析了差分格式的截

收稿日期: 2012-06-02; 修订日期: 2013-05-02.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71203247; 70971145); 教育部重点科研基金资助项目(11yj790015).

断误差, 相容性, 收敛性, 稳定性等问题. Anderluha<sup>[8]</sup>采用停时模拟的方法定价连续巴黎期权和累计巴黎期权. Hull等<sup>[9]</sup>研究得出在为路径依赖型期权定价时, 树方法的收敛速度优于蒙特卡洛方法. 但蒙特卡洛方法更适宜处理高维问题. Boyle等<sup>[10]</sup>提出了蒙特卡洛方法中一些降低方差的措施以解决收敛慢的问题. Costabile<sup>[11]</sup>运用改进的二叉树算法为巴黎期权定价. Kwok等<sup>[12]</sup>运用前向打靶网格方法来计算连续巴黎期权. 累计巴黎期权和移动窗口巴黎期权. 移动窗口巴黎期权是近年来可转债条款的主要特征, 从而为在可转债定价中应用奠定基础. 赵洋等<sup>[13]</sup>使用最小二乘蒙特卡洛方法为可转换债券定价, 解决了可转换债券中为美式期权进行定价的难题, 但他们没有引入巴黎期权的思路处理可转债中的路径依赖条款. 周其源等<sup>[14]</sup>在风险中性定价框架下, 将可赎回可转换贴现债券完全拆解为五种简单证券的组合, 并推导出定价公式, 但他们同样无法处理强路径依赖的条款.

巴黎期权有着广泛的应用领域. 以外汇期权为例, 巴黎期权合约通过提高汇率市场操纵者的成本, 从而可以防止市场操纵行为, 维护外汇市场的正常秩序, 防患于未然. 未来内地衍生品市场发展起来后, 对于一些发展相对成熟, 投资者多为机构投资者的外汇期权, 股指期货比较适合引入巴黎期权合约, 而对于商品(期货)期权, 股票期权, 由于参与者中有众多中小投资者, 宜采用经典美式期权, 适合直接监管. 国外的实践也表明, 在场外外汇期权市场上, 巴黎期权是主流合约. 目前我国已经在银行间外汇市场开展外汇期权, 虽然还仅仅是经典欧式期权, 随着人民币汇率的逐步市场化, 汇率操纵问题将逐渐增多, 势必给外汇市场造成较大冲击. 因此研究巴黎期权的定价, 找到合理的定价理论和高效的数值方法, 在保护我国金融市场稳定, 促进衍生品市场良性发展, 有效指导投资者等方面都有一定的实践价值.

## 2 向上敲出巴黎期权定价的PDE方法

在Black-Scholes框架下<sup>[15]</sup>,  $S_t$ 表示标的资产价格,  $K$ 表示执行价格,  $T$ 表示合约存续期,  $r$ 表示无风险利率,  $\sigma$ 表示标的资产波动率, 本文只讨论欧式巴黎期权.

### 2.1 连续向上敲出看涨巴黎期权

由于Haber等<sup>[4]</sup>, Zhu等<sup>[5]</sup>均采用显性差分方法计算连续向上敲出看涨巴黎期权, 为了保持可比性, 本文也选择连续向上敲出看涨巴黎期权为例来研究.  $\tau$ 表示标的资产价格在障碍水平之上持续时间的长度, 那么对于超过障碍水平, 可以定义 $\tau$ 为

$$\tau(t) = t - \sup\{t' \leq t | S(t') \leq B\}, \quad (1)$$

同理对于低于障碍水平,  $\tau$ 为

$$\tau(t) = t - \sup\{t' \leq t | S(t') \geq B\}. \quad (2)$$

再根据连续巴黎期权的定义, 可得

$$d\tau(t) = \begin{cases} dt, & S_t > B \\ -\tau(t-), & S_t = B \\ 0, & S_t < B. \end{cases} \quad (3)$$

通过以上的分析, 巴黎期权的价格可以表示为 $V(S, t, \tau)$ , 从动态复制的角度出发, 可以推导出巴黎期权价格所满足的PDE.

当 $S < B$ 时, 用 $V_1(S, t)$ 代替 $V(S, t, \tau)$ , 有

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V_1}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - rV_1 = 0, \quad (4)$$

当 $S > B$ 时, 用 $V_2(S, t, \tau)$ 代替 $V(S, t, \tau)$ , 得

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial \tau} + (r - q)S \frac{\partial V_2}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} - rV_2 = 0, \quad (5)$$

方程(4),(5)即为连续巴黎期权价格满足的PDE.

连续向上敲出看涨期权的价值所满足的PDE被障碍水平 $B$ 分为两部分, $S < B$ 时,期权满足一个二维PDE这个PDE定解在 $(S, t)$ 组成的长方形内. $S > B$ 时,期权满足一个三维PDE定解域为在 $(S, t, \tau)$ 组成的长方体,图1表示定解域.图1中假定 $B = 50, S < B$ 时,定解域只是长方体左下方的一个平面,记为域I; $S > B$ 时,定解域为一个长方体,记为域II.

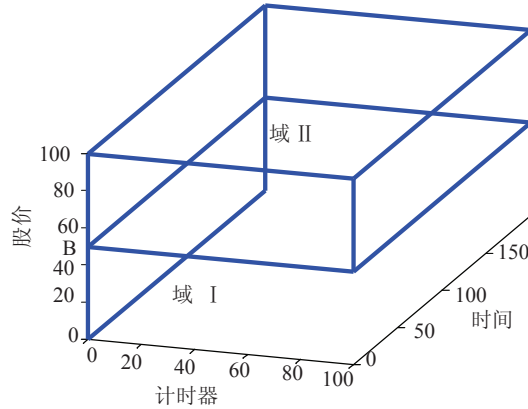


图1 向上敲出看涨巴黎期权定解域

Fig. 1 Solution field for up-down Parisian call option

域I的边界条件和终值条件是当 $S = 0$ 时,期权价值

$$V_1(0, t) = 0. \quad (6)$$

这里假定巴黎期权价值在 $S = B$ 处连续,即当 $S = B$ 时,

$$V_1(B, t) = V_2(B, t, 0). \quad (7)$$

当 $t = T$ 时,期权没有敲出,执行欧式期权的终端支付为

$$V_1(S, T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0). \quad (8)$$

域II的边界条件和终值条件是当 $S \rightarrow \infty$ 时,标的资产价格大于 $B$ ,期权敲出,价值

$$V_2(\infty, t, \tau) = 0. \quad (9)$$

当 $\tau = D$ 时,意味着累计时间达到窗口时间 $D$ ,期权敲出,价值

$$V_2(S, t, D) = 0. \quad (10)$$

当 $S = B$ 时,计时清零,假定在此处价格连续,即

$$V_2(B, t, \tau) = V_1(B, t), \quad 0 \leq \tau < D. \quad (11)$$

条件(11)为巴黎期权在 $S = B$ 处的连接条件.当 $t = T$ 时,期权没有敲出,执行欧式期权的终端支付,

$$V_2(S, T, \tau) = (S_T - K)^+, \quad 0 \leq \tau < D. \quad (12)$$

通过观察分析,发现计时器 $\tau$ 肯定小于等于时间 $t$ ,根据 $\tau$ 的定义式(1)即可知道,这表示在域II内, $\{\tau > t, S > B\}$ 这个三棱柱部分不在定解域内;此外当 $\tau > 0$ ,表示标的资产价格已经在 $B$ 上方累计一段时间,而剩余时间 $T - t < D - \tau$ ,即如果从 $t$ 时刻开始到期权存续期结束,标的资产价格一直超过 $B$ ,所持续的时间 $T - t$ 与之前已在 $B$ 上方持续的时间 $\tau$ 的和 $T - t + \tau < D$ ,说明该情况下期权不可能敲出,此时巴黎期权价格就为相应欧式期权的价格,即在 $\{T - t + \tau < D, S > B\}$ 这个三棱柱区域内的巴黎期权价值和相应的欧式期权价值相等,等于 $\{T - t < t \leq T, \tau = 0, S > B\}$ 该平面区域内对应的期权价值.图2给出了新的定解域.

### 2.2 连续向上敲出看涨巴黎期权 PDE

至此得到连续向上敲出看涨巴黎期权的 PDE

$$I: \begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V_1}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - rV_1 = 0 \\ V_1(0, t) = 0 \\ V_1(B, t) = V_2(B, t, 0) \\ V_1(S, T) = (S_T - K)^+ \\ t \in [0, T], \quad S \in [0, B], \end{cases} \quad (13)$$

$$II: \begin{cases} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial \tau} + (r - q)S \frac{\partial V_2}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} - rV_2 = 0 \\ V_2(+\infty, t, \tau) = 0 \\ V_2(S, t, D) = 0 \\ V_2(B, t, \tau) = V_1(B, t) \\ V_2(S, T, 0) = (S_T - K)^+ \\ t \in [\tau, T], \quad \tau \in [0, D), \quad S \in [B, +\infty]. \end{cases} \quad (14)$$

### 2.3 累计向上敲出看涨巴黎期权 PDE

在累计时间下, 计时器  $\tau$  的微分表达式为

$$d\tau(t) = \begin{cases} dt, & S_t \geq B \\ 0, & S_t < B, \end{cases} \quad (15)$$

在  $S < B$  时,  $\tau$  不清零, 也不计时, 即  $\tau$  可以看作  $S < B$  时  $V_1(S, t)$  的常数参数, 记为  $V_1(S, t, \tau)$ , 由此可见, 累计巴黎期权中的域 I 发生了变化, 不再是平面区域, 而是与之前连续巴黎期权的域 II 类似, 如图 3.

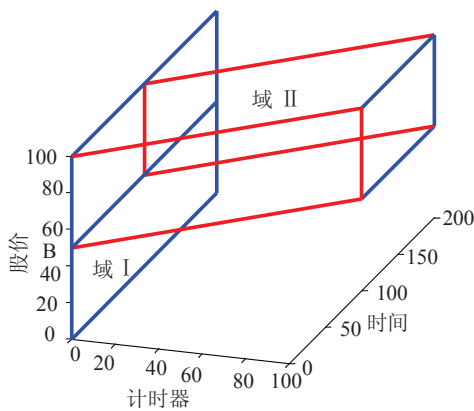


图 2 修正后的连续向上敲出看涨巴黎期权定解域

Fig. 2 Modified solution field for consecutive up-down Parisian call option

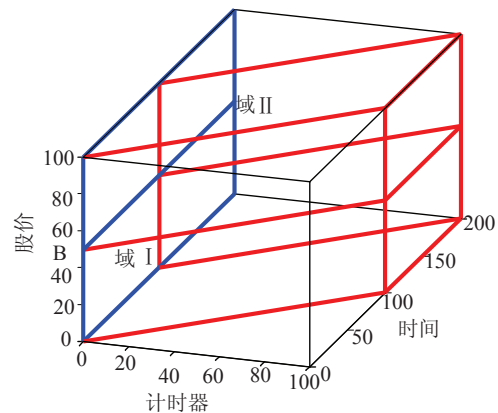


图 3 累计向上敲出看涨巴黎期权的定解域

Fig. 3 Solution field for cumulative up-down Parisian call option

累计向上敲出看涨巴黎期权的 PDE 的主要变动在域 I 内, 定解域从二维平面变为三维空间,  $t$  和  $\tau$  的取

值范围也相应发生变化. 相应的 PDE 为

$$\text{I: } \begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V_1}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - rV_1 = 0, \\ V_1(0, t, \tau) = 0, \\ V_1(B, t, \tau) = V_2(B, t, \tau), \\ V_1(S, T, 0) = (S_T - K)^+, \\ t \in [\tau, T], \quad \tau \in [0, D), \quad S \in [0, B]. \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{II: } \begin{cases} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial \tau} + (r - q)S \frac{\partial V_2}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} - rV_2 = 0, \\ V_2(+\infty, t, \tau) = 0, \\ V_2(S, t, D) = 0, \\ V_2(B, t, \tau) = V_1(B, t, \tau), \\ V_2(S, T, 0) = (S_T - K)^+, \\ t \in [\tau, T], \quad \tau \in [0, D), \quad S \in [B, +\infty]. \end{cases} \quad (17)$$

### 3 连续向上敲出看涨巴黎期权的差分方程与算例

下面分析巴黎期权的差分方程的稳定性问题, 并分析持续时间 $\tau$ 、窗口期 $D$ 对连续巴黎期权和累计巴黎期权价格的影响. 此外, 通过障碍期权和巴黎期权的对比分析以期侧面验证本文提出的 PDE 和隐性差分方法的准确性. 最后对比分析连续巴黎期权和累计巴黎期权.

#### 3.1 连续向上敲出看涨巴黎期权的差分方程与算例

当 $S \in [B, +\infty]$ 时, 期权价值满足定解在 $(S, t, \tau)$ 空间内的三维 PDE 得到隐性差分方程

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j}^k}{\Delta \tau} + (r - q)i\Delta S \frac{V_{i+1,j}^k - V_{i-1,j}^k}{2\Delta S} + \\ \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta S^2 \frac{V_{i+1,j}^k + V_{i-1,j}^k - 2V_{i,j}^k}{\Delta S^2} - rV_{i,j}^k = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

整理可得

$$\begin{cases} a_i V_{i-1,j}^k + b_i V_{i,j}^k + c_i V_{i+1,j}^k = \frac{V_{i,j}^{k+1}}{\Delta \tau} + \frac{V_{i,j+1}^k}{\Delta t} \\ a_i = \frac{1}{2}[i(r - q) - \sigma^2 i^2] \\ b_i = \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1}{\Delta t} + (r - q) + \sigma^2 i^2 \\ c_i = -\frac{1}{2}[i(r - q) + \sigma^2 i^2]. \end{cases} \quad (19)$$

可以通过解方程组求得期权的价值, 但是上述差分格式稳定性的证明相对繁琐, 且由于定解空间的横截面是平行四边形, 有些边界条件和终值条件是在与 $\tau = 0$ 这个平面成 $45^\circ$ 的斜面上的, 可以将定解空间分割成很多个斜面进行差分. 因为 $\tau$ 是 $t$ 在 $S \in [B, +\infty]$ 时的计时器, 它们肯定是同速率变化, 所以 $\Delta \tau = \Delta t$ . 即在三维的定解空间内, 股价 $S$ 就是沿着与 $\tau = 0$ 这个平面成 $45^\circ$ 的斜面运动的, 可以沿着斜面求差分, 得

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial \tau}\right) + (r - q)S \frac{\partial V_2}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} - rV_2 = 0,$$

将前两项合并, 利用方向导数, 可得

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{\partial V_2}{\partial \tau} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial V_2}{\partial \tau} = \frac{\partial V_2}{\partial l}. \quad (20)$$

再作变形可得

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial \tau} = \sqrt{2} \frac{\partial V_2}{\partial l}. \quad (21)$$

将式(21)代入三维PDE可得

$$\sqrt{2} \frac{\partial V_2}{\partial l} + (r - q)S \frac{\partial V_2}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} - rV_2 = 0.$$

将三维PDE化为二维PDE其连续向上敲出看涨期权的域I, 域II联合差分格式为

$$\begin{cases} a_i V_{i-1,j}^k + b_i V_{i,j}^k + c_i V_{i+1,j}^k = V_{i,j+1}^k, S \in [0, B] \\ a_i V_{i-1,j}^k + b_i V_{i,j}^k + c_i V_{i+1,j}^k = V_{i,j+1}^{k+1}, S \in [B, +\infty] \\ a_i = \frac{1}{2}(r - q)i\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t \\ b_i = 1 + \sigma^2 i^2 \Delta t + r\Delta t \\ c_i = -\frac{1}{2}(r - q)i\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t. \end{cases} \quad (22)$$

下面根据此差分格式进行计算, 并与显性差分方法的结果进行比较. 运用MATLAB进行计算, 相关的参数设定如下, 执行价格  $K = 10$ , 障碍水平  $B = 12$ , 波动率  $\sigma = 0.2$ , 期权存续期  $T = 1$ , 窗口期  $D = 0.1$ , 无风险利率  $r = 0.05$ , 股票分红率  $q = 0$ . 连续向上敲出看涨巴黎期权的价格如图4所示.

分析图4发现, 连续向上敲出看涨巴黎期权的价格随着  $S$  的变大先上升后下降, 因为在  $S$  增加的过程中, 看涨期权的性质对期权价格起决定作用, 到了一定的拐点之后(这里为  $S = 10.18$  左右), 向上敲出的性质起决定作用. 下面研究期权价格和窗口  $D$  的关系. 具体情况见图5.

$D$  趋于0时巴黎期权价格与相同参数障碍期权对比如图6所示. 从图6可以发现, 当  $D = 0$  时, 巴黎期权的价格与障碍期权的价格是重合的, 这从侧面验证了计算方法的有效性和计算结果的正确性.

### 3.2 累计向上敲出巴黎期权差分方程与算例

累计向上敲出看涨巴黎期权的联合隐性差分格式为

$$\begin{cases} a_i V_{i-1,j}^k + b_i V_{i,j}^k + c_i V_{i+1,j}^k = V_{i,j+1}^k, S \in [0, B] \\ a_i V_{i-1,j}^k + b_i V_{i,j}^k + c_i V_{i+1,j}^k = V_{i,j+1}^{k+1}, S \in [B, +\infty] \\ a_i = \frac{1}{2}(r - q)i\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t \\ b_i = 1 + \sigma^2 i^2 \Delta t + r\Delta t \\ c_i = -\frac{1}{2}(r - q)i\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t. \end{cases} \quad (23)$$

比较连续巴黎期权联合差分格式(22)来看, 当  $S \in [0, B]$  时, 定解域I在连续情况下是个平面, 而在累计情况下是个三维区域, 对应到差分格式就是  $a_i V_{i-1,j}^k + b_i V_{i,j}^k + c_i V_{i+1,j}^k = V_{i,j+1}^k$  和  $a_i V_{i-1,j}^0 + b_i V_{i,j}^0 + c_i V_{i+1,j}^0 = V_{i,j+1}^0$  的区别, 代入前述的边界条件和终值条件即可得到累计巴黎期权的价格.

累计向上敲出看涨巴黎期权价格如图7所示. 通过观察图7, 发现它与连续向上敲出看涨巴黎期权的

价格图形有明显的区别, 峰值远低于后者. 对比连续向上敲出看涨巴黎期权, 累计向上敲出看涨期权价格与  $D$  的关系与其一致, 只是在数值大小上有差别, 因为随着窗口期越来越长, 敲出的难度越来越大, 期权价格自然就变大. 具体见图 8.

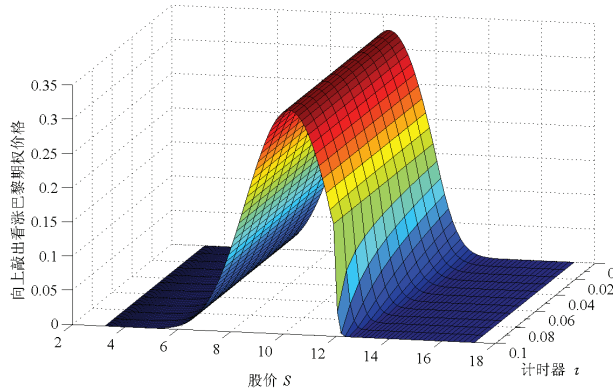


图 4 连续向上敲出看涨巴黎期权的价格

Fig. 4 Consecutive up-down Parisian call option price

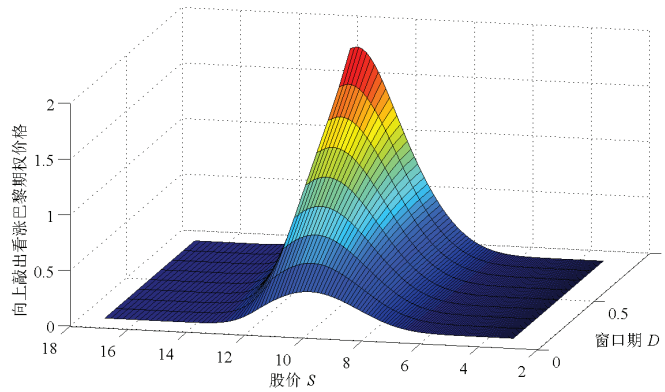


图 5 连续向上敲出看涨巴黎期权的价格与  $D$  的关系

Fig. 5 Relationship between consecutive up-down Parisian call option price and  $D$

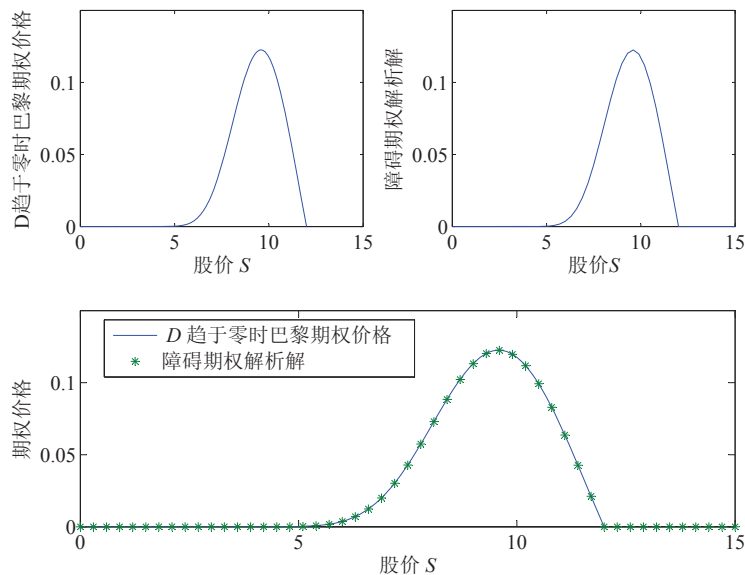


图 6  $D$  趋于 0 时巴黎期权价格与相同参数障碍期权对比

Fig. 6 Comparison between Parisian option and barrier options with same parameters when  $D$  tends zero

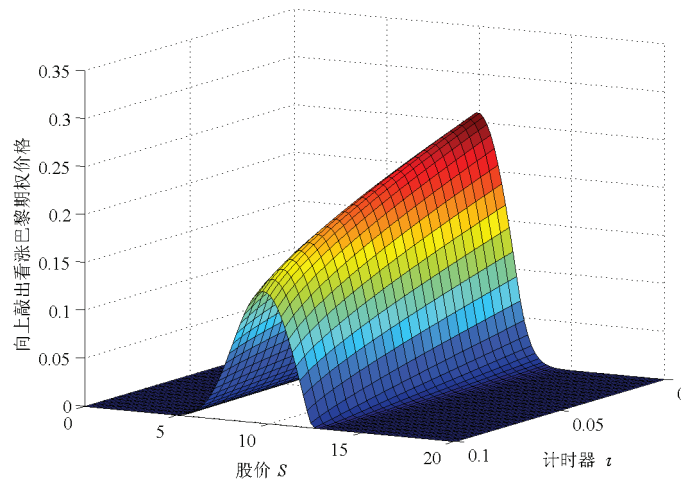


图 7 累计向上敲出看涨巴黎期权价格

Fig. 7 Cumulative up-down Parisian call option price

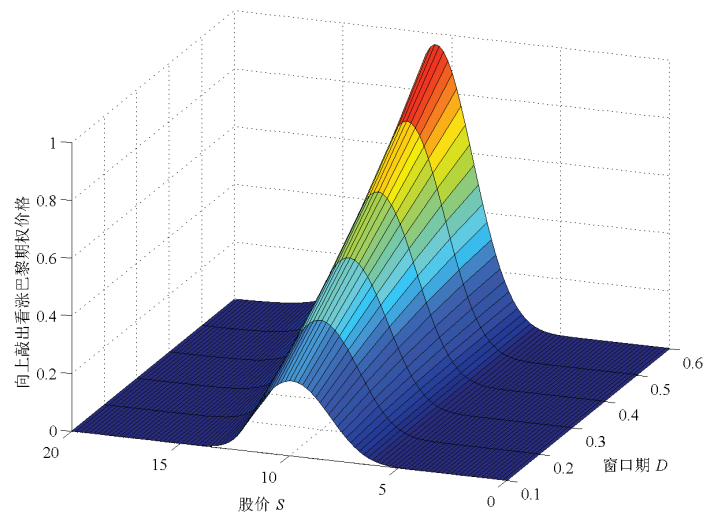


图 8 累计向上敲出巴黎期权价格与窗口期 D 的关系

Fig. 8 Relationship between consecutive up-down Parisian call option price and D

### 3.3 连续型和累计型的对比分析

下面比较连续巴黎期权和累计巴黎期权, 分析两种计时方式对期权价格的影响. 具体情况见图 9.

由于本文研究的是向上敲出看涨期权, 同参数的连续型巴黎期权与累计型巴黎期权相比, 连续型的巴黎期权的敲出条件更为严苛, 因此不容易敲出, 于是价格高于累计巴黎期权. 单就连续或是累计巴黎期权, 窗口期越长, 越不容易敲出, 因此价格越高.

## 4 隐性差分的优势

### 4.1 隐性差分格式的稳定性研究

对于隐性差分有隐性差分格式的增长因子

$$G = \frac{1}{1 + r\Delta t - rn\Delta t(e^{ikh} - e^{-ikh})/2 - \sigma^2 n^2 \Delta t(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2)/2}. \quad (24)$$



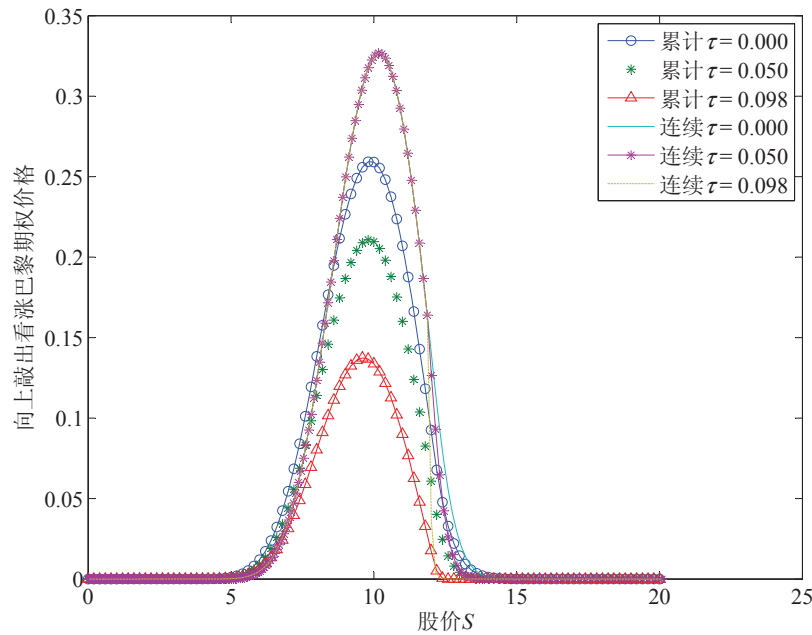


图9 累计向上敲出巴黎期权、连续向上敲出巴黎期权与窗口期D的关系

Fig. 9 Relationship between cumulative up-down Parisian call option price, consecutive up-down Parisian call option price and  $D$

**命题 1** 本文的隐性差分格式绝对稳定.

**证明** 要想证明隐性差分绝对稳定, 只需证明增长因子  $G$  满足  $|G|^2 \leq 1$ , 即可.

$$\begin{aligned} \text{因为 } \frac{1}{G} &= 1 + r\Delta t - \frac{1}{2}rn\Delta t(e^{ikh} - e^{-ikh}) - \frac{1}{2}\sigma^2n^2\Delta t(e^{ikh} + e^{-ikh} - 2) \\ &= 1 + r\Delta t - \sigma^2n^2\Delta t(\cos kh - 1) - rn\Delta t \sin kh, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \left| \frac{1}{G} \right|^2 &= [1 + r\Delta t - \sigma^2n^2\Delta t(\cos kh - 1)]^2 + r^2n^2\Delta t^2\sin^2 kh \\ &= [1 + r\Delta t + \sigma^2n^2\Delta t(\cos kh - 1)]^2 + r^2n^2\Delta t^2\sin^2 kh. \end{aligned}$$

分析上式等式右边的两项, 对于第一项,  $1 + r\Delta t > 1$ ,  $\sigma^2n^2\Delta t(1 - \cos kh) \geq 0$ , 那么  $[1 + r\Delta t + \sigma^2n^2\Delta t(1 - \cos kh)]^2 > 1$ , 第二项  $r^2n^2\Delta t^2\sin^2 kh \geq 0$ , 由此可得, 等式右边大于1, 即  $\left| \frac{1}{G} \right|^2 > 1$ , 那么  $|G|^2 \leq 1$ . 所以, 由 von Neuman 准则知隐性差分绝对稳定. 证毕.

由上述分析可知本文的隐性差分格式绝对稳定, 收敛的速度有明显提升. 这有利于三维差分方程的算法实现. Haber 等<sup>[4]</sup>用显性差分初步计算了巴黎期权的价值, Zhu 等<sup>[5]</sup>对其边界条件做出一些修正, 同样采用显性差分进行计算, 都存在一些问题.

## 4.2 稳定性

隐性差分格式绝对稳定, 其稳定性不受网格剖分的影响. 虽然隐性差分方法解方程组需要更多的计算时间, 但是对时间轴的剖分间距变大, 时间方向上所需的计算次数变少, 在一定程度上弥补缺方程组所需要的时间.

显性差分稳定性条件为  $\Delta t \leq (\sigma n_{\max})^{-2}$ , 将其变形, 得到如下的式子  $T/N \leq (\sigma M)^{-2} \Rightarrow N \geq T\sigma^2M^2$ , 即,  $N$  与  $M$  应满足的条件为  $N \geq T\sigma^2M^2$ ,  $N$  为时间  $t$  轴剖分格数,  $M$  为股价  $S$  轴剖分格数. 在一般情况下, 为了计算的精度,  $M$  的取值相对要大, 那么  $N$  取值要大于等于  $T\sigma^2M^2$  才能稳定, 势必会造成降低计算速度, 计算数据溢出等风险, 丧失了显性差分原有的计算快捷便利的优势, 从而更凸显了隐性差分的优势.

### 4.3 收敛速度

显性差分 and 隐性差分的对比结果见表1. 表1中的参数如下:  $S = 12, K = 10, B = 12, \sigma = 0.2, T = 1, D = 0.1, r = 0.05, q = 0$ .

表1 隐性差分方法的优势  
Table 1 Advantage of implicit finite difference method

剖分格数 ( $N, M$ )	显性差分		隐性差分	
	巴黎期权价格	计算时间(s)	巴黎期权价格	计算时间(s)
(50, 50)	不稳定	0.055 6	0.233 7	0.052 4
(50, 100)	0.213 2	0.085 2	0.253 5	0.084 7
(50, 200)	0.223 4	0.234 2	0.252 8	0.214 1
(50, 400)	0.257 2	0.377 1	0.253 1	0.703 7
(50, 500)	0.253 2	0.571 9	0.253 1	1.075 4
(100, 100)	不稳定	0.068 3	0.253 1	0.079 2
(100, 200)	不稳定	0.128 4	0.253 1	0.224 3
(100, 300)	不稳定	0.231 6	0.253 1	0.453 4
(100, 400)	0.253 1	0.383 4	0.253 1	0.774 4
(100, 500)	0.253 1	0.575 4	0.253 1	1.181 2

从表1中可以看出, 前三种网格剖分情况下, 隐性差分的计算时间短于显性差分的计算时间; 后七种网格剖分情况下, 由于隐性差分方法的计算量较大, 显性差分方法的时间略短于隐性差分方法. 考虑到收敛速度, 当  $(M, N) = (50, 200)$  时, 隐性差分基本就收敛到一个稳定的值 0.253 1 上, 而显性差分到  $(100, 400)$  时才趋向于 0.253 1. 当股票价格较高且波动率较大时, 为了满足稳定条件, 显性差分方法的时间轴所要求的剖分就更细, 这种情况下隐性差分的收敛速度远远快于显性差分方法.

## 5 结束语

本文重新界定了文献[4]中巴黎期权PDE的定解空间和相关的边界条件, 终值条件. 将矩形区域简化成剖面为平行四边形的三维区域, 并在新的区域内推导了三维PDE进而用方向导数将该PDE降为二维PDE用隐性差分计算了巴黎期权的价格, 还用障碍期权的解析解验证了巴黎期权PDE和隐性差分方法的正确性, 并分析了持续时间, 窗口期等参数对巴黎期权价格的影响, 证明了所选隐性差分格式的无条件稳定性. 文章最后比较了显性差分方法和隐性差分方法, 计算结果表明隐性差分具有绝对的稳定性, 收敛速度快等优点.

### 参考文献:

- [1] Chesney M, Jeanblanc-Picqué M, Yor M. Brownian excursions and Parisian barrier options[J]. *Advances in Applied Probability*, 1997, 29(1): 165–184.
- [2] Labart C, Lelong J. Pricing double barrier Parisian options using Laplace transforms[J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2009, 12(1): 19–44.
- [3] Hugonnier J. The Feynman-Kac formula and pricing occupation time derivatives[J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1999, 2(2): 153–178.
- [4] Haber J, Schonbucher J, Wilmott P. Pricing Parisian options[J]. *The Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1999, 6(3): 71–79.
- [5] Zhu P, Chen T. Pricing Parisian and Parisian options analytically[C] // *The 7th Bachelier Finance Society World Congress*. Sydney: 2012.
- [6] 罗 俊, 吴雄华. 巴黎期权定价问题的数值方法[J]. *数值计算与计算机应用*, 2004, 25(2): 81–89.  
Luo Jun, Wu Xionghua. Numerical solution for Parisian options[J]. *Numerical Calculation and Computer Application*, 2004, 25(2): 81–89. (in Chinese)

- [7] 陆金甫, 关 治. 偏微分方程数值解法[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2004: 13–37.  
Lu Jinfu, Guan Zhi. Numerical Solution for Partial Differential Equations[M]. 2nd Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 12–37. (in Chinese)
- [8] Anderluha M. Pricing Parisians and barriers by hitting time simulation[J]. The European Journal of Finance, 2008, 14(2): 137–156.
- [9] Hull J, White A. Efficient procedures for valuing european and american path-dependent options[J]. The Journal of Derivatives, 1993, 1(1): 21–31.
- [10] Boyle P, Broadie M, Glasserman P. Monte Carlo methods for security pricing[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997, 21(8/9): 1267–1321.
- [11] Costabile A. Combinatorial approach for pricing parisian options[J]. Decisions in Economics and Finance, 2002, 25(2): 111–125.
- [12] Kwok K, Lau W. Pricing algorithms for options with exotic path dependence[J]. Journal of Derivatives, 2001, 9(1): 28–38.
- [13] 赵 洋, 赵立臣. 基于蒙特卡罗模拟的可转换债券定价研究[J]. 系统工程学报, 2009, 24(5): 621–625.  
Zhao Yang, Zhao Lichen. Monte Carlo-based pricing of convertible bonds[J]. Journal of Systems Engineering, 2009, 24(5): 621–625. (in Chinese)
- [14] 周其源, 吴冲锋, 刘海龙. 可赎回可转换贴现债券完全拆解定价法[J]. 管理科学学报, 2009, 12(4): 135–144.  
Zhou Qiyuan, Wu Chongfeng, Liu Hailong. Analytic valuations of the callable convertible discount bond: Equivalent decomposition method[J]. Journal of Management Science in China, 2009, 12(4): 135–144. (in Chinese)
- [15] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637–654.

### 作者简介:

宋 斌(1971—), 女, 山西太原人, 副教授, 研究方向: 衍生资产定价与数值计算, 市场微观结构与利率期限结构建模, Email: songselvia@yahoo.com.cn;

周湛满(1988—), 男, 江苏盐城人, 硕士生, 研究方向: 衍生资产定价与数值计算, Email: zhouzhanman@sina.com;

魏 琳(1988—), 女, 河北石家庄人, 硕士生, 研究方向: 衍生资产定价与数值计算, Email: weilin880615@163.com;

张冰洁(1989—), 女, 河南洛阳人, 硕士生, 研究方向: 衍生资产定价与数值计算, Email: zhangbing899@126.com.