

基于 Copula-GARCH方法的 LPM 套期保值研究

梁建峰, 陈健平, 刘京军

(中山大学岭南学院, 中山大学经济研究所, 广东 广州 510275)

摘要: 风险的下偏距(lower partial moment, LPM)是一种较好的风险测度,它弥补了方差度量中的双边风险的不足,并且放松了对二次效用函数的限制要求.因此,LPM测度被广泛应用于金融风险管理研究.套期保值是金融风险控制的重要方法之一,但由于资产收益的联合分布的不确定性,给应用LPM进行套期保值带来了困难.对此采用Copula-GARCH方法对即期与衍生品市场的资产收益序列进行拟合,并将LPM模型应用于人民币外汇市场套期保值实证研究,得到最优套期保值比率.进一步通过绩效比较发现,无论在NDF市场还是远期市场,LPM模型的套期保值绩效都要优于最小方差的套期保值绩效.

关键词: LPM模型; Copula函数; 套期保值; 绩效指标

中图分类号: F830.59; F830.92

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2011)05-0636-06

Hedging with LPM based on Copula-GARCH method

LIANG Jian-feng, CHEN Jian-ping, LIU Jing-jun

(Lingnan College, Institute for Economics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The lower partial moment (LPM) model has been widely applied in the research of hedging investment. LPM focuses on the lower partial risk, so it is better than the variance measure. However the uncertainty of the joint distribution of the assets returns brings difficulties in the research and applications of LPM. This article introduces Copula-GARCH method to fit the joint distribution, and applies the LPM model to the hedging in RMB foreign exchange markets. Furthermore, the comparison between LPM and minimum-variance methods is carried out. It turns out that hedging based on the LPM model provides a better performance than that based on the minimum variance model on both the forward market and the NDF market.

Key words: LPM model; Copula function; hedging; performance index

1 引言

确定最优套期保值比率是套期保值研究的核心问题,目前已有大量文献研究.最小方差(minimum variance)套期保值比率是通过量化投资组合的方差,并使得该方差最小而得出的最优套期保值比率.最小方差比率的优点在于其直观易操作,因此得到广泛的研究与应用.但是最小方差方法度量的是双边风险,资产价格上涨和下跌都视为风险,所以不能描述投资者规避资产贬值所形成的风险.风险的下偏距度量(lower partial moment, LPM)弥补了方差度量方法的不足.首先,它将损失作为风险的计量因子,反映了投资者对

收稿日期: 2009-08-20; 修订日期: 2009-10-18.

基金项目: 国家社会科学基金资助项目(08CJY064); 国家自然科学基金资助项目(70871124); 国家杰出青年基金资助项目(70825002); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(09WKPY35); 全国优秀博士学位论文作者专项基金资助项目(200504).

风险的真实心理. 其次, 它仅要求投资者是风险厌恶型的, 即其效用函数为凹型, 从而放松了方差度量中的二次型效用函数的要求. 因此, LPM 被认为是风险测度的一种较好的方法.

应用 LPM 进行套期保值时, 如何确定远期市场和即期市场的关系是研究面临的主要困难之一. 已有研究一般假设收益序列的联合分布服从联合正态分布或者均匀概率分布, 从而简化计算过程. 如, Lien等^[1-2]在研究外汇期货与期权下方风险时, 假设了现货与期货的条件分布服从双变量的正态分布. 这种处理方法没有考虑两个金融收益序列真实的联合分布状况, 令 LPM 的最终计算结果可信度不高. 因此, 本文尝试通过 Copula - GARCH 方法确定收益序列的联合分布, 解决以上困难. 目前有部分文献, 如刘庆富等^[3]研究了 VaR - GARCH 基于模型族的铜期货市场风险度量问题. Hsu等^[4]基于 Copula - GARCH 模型下讨论了最小方差套期保值比率, 但尚未见将 Copula - GARCH 模型应用于 LPM 套期保值比率的相关研究.

本文首先回顾 LPM 风险度量模型在套期保值中的应用, 然后介绍 Copula 的边缘分布估计方法, 并以人民币外汇市场为例, 计算两个远期市场的最优 LPM 套期比率和最小方差套期比率, 并且通过 R/SV 指标对两种套期绩效进行比较分析.

2 LPM 风险度量在套期保值中的应用

2.1 LPM 在套期保值中的基本应用

根据 Bawa^[5], Lien等^[1]的定义, n 阶 LPM 定义为

$$L(\theta, n, X) = E[\max(0, \theta - X)]^n = \int_{-\infty}^{\theta} (\theta - X)^n dF(X) \quad (1)$$

其中 θ 是目标收益率, 可根据套期保值者的目标任意取值, X 是实际收益率, n 是 LPM 的阶数. n 为非负整数, 它代表了投资者对风险的厌恶程度. 若 $n < 1$, 表明投资者对风险偏好; 而 $n > 1$ 表示投资者对风险厌恶, n 越大表明投资者的厌恶程度越大.

下面分析 LPM 风险度量在外汇套期保值投资中的应用. 本文考虑空头套期保值者的交易情况, 而多头套期保值模型与此类似. 假设空头投资者在 $t = 0$ 时刻有 W_0 的初始财富, 并拥有数量为 Q 的外汇现货, 此时外汇现货和远期的价格分别为 s_0, f_0 . 投资者为了规避外汇现货价格波动风险, 在远期市场上卖出了头寸为 kQ 的远期合约. 在 $t = 1$ 时刻, 假设现货和远期价格分别为 s_1, f_1 , 投资者卖出 Q 单位的现货, 并且对 kQ 单位的远期进行平仓. 投资者需要确定在 $t = 0$ 时刻的最优套期保值比率 k , 以对冲外汇投资风险.

设 $r_s = \frac{s_1 - s_0}{s_0}$ 为现货收益率, $r_f = \frac{f_1 - f_0}{f_0}$ 为远期收益率, 在 $t = 1$ 时刻, 投资者拥有的财富为

$$W_1 = W_0 + (\Delta s - k\Delta f)Q = W_0 + (r_s - hr_f)s_0Q \quad (2)$$

其中 $h = kf_0/s_0$ 为修正的空头套值比率, 它与原始套期保值比率 k 一一对应, 因此本文将 h 作为决策变量.

记 $r_p = r_s - hr_f$ 为套期保值的收益率, 假设已知现货和远期收益率的联合密度函数 $f(r_s, r_f)$, 用 LPM 考虑该套期的下方风险, 则可以建立如式 (3) 的 LPM 模型

$$LPM(\theta, n, h) = \int_{-\infty}^{\theta} (\theta - r_p)^n dF(r_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\theta + hr_f} (\theta - r_s + hr_f)^n f(r_s, r_f) dr_s dr_f \quad (3)$$

给定参数 θ, n 的取值, 令 $\frac{\partial LPM(h)}{\partial h} = 0$, 并保证在极值点 $h = h^*$ 处有 $\frac{\partial^2 LPM(h)}{\partial h^2} \big|_{h=h^*} \geq 0$, 可求得最优套期比率 h^* . 当目标收益 θ 一定时, 可验证当 $n = 1, n = 2$, 和 $n > 2$ 时, 均有 $\frac{\partial^2 LPM(h)}{\partial h^2} \big|_{h=h^*} \geq 0$. 需要注意的是, 由一阶条件 $\frac{\partial LPM(h)}{\partial h} = 0$ 计算出的最优套期比 h^* 是区域 $G = \{h \mid \theta \geq r_s - hr_f, h \geq 0\}$ 内的局部最优解, 并不是全局最优.

2.2 基于联合分布拟合的 LPM 模型应用

首先, 通过 GARCH 方法描述收益序列的尾部分布形态, 进而根据这个形态确定两个收益序列各自的边缘密度函数 $f_1^*(r_s), f_2^*(r_f)$. 其次, 通过极大似然估计法确定候选 Copula 函数的参数, 并根据拟合优度

检验方法从候选的 Copula 函数中选出最能拟合历史收益数据的函数 $C(F_1(r_s), F_2(r_f))$. 最后根据式 (3) 得出 LPM 表达式, 该表达式是套期比率 h 的函数(假设 θ , n 是给定常数)

$$\text{LPM}(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\theta+hr_f} (\theta - r_s + hr_f)^n c(F_1(r_s), F_2(r_f)) f_1^*(r_s) f_2^*(r_f) dr_s dr_f \quad (4)$$

其中 $F_1(r_s)$, $F_2(r_f)$ 分别是 r_s , r_f 的分布函数, $c(F_1(r_s), F_2(r_f))$ 是 $C(F_1(r_s), F_2(r_f))$ 的密度函数.

当 LPM 在某个套期比率 h^* 下取得最小, 它应该满足的一阶条件为

$$\frac{\partial \text{LPM}(h)}{\partial h^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\theta+hr_f} nr_f(\theta - r_s + h^*r_f)^{n-1} c(F_1(r_s), F_2(r_f)) f_1^*(r_s) f_2^*(r_f) dr_s dr_f = 0 \quad (5)$$

3 分布拟合的基本方法

第2节中解释了本文通过 Copula-GARCH 方法拟合即期及其衍生品收益率的联合密度函数, 从而构建了整个 LPM 方法的新模型基础. 本节将讨论确定边缘密度的 GARCH-t 估计方法、运用 Copula 方法确定联合密度的过程, 以及与 Copula 方法相关的参数的确定和判断原则等问题.

3.1 估计边缘分布

在现实生活中, 金融收益序列的条件分布不仅具有时变波动聚集特性, 还经常呈现出偏斜、尖峰厚尾, 等特性, 因此, 人们常常用 t 分布、GED 分布等能描述尖峰厚尾性质的分布来代替正态分布, 从而引伸出一系列扩展模式, 如 GARCH-t 模型, GARCH-GED 模型等.

以即期市场为例, 假设收益序列为 r_t , $t = 1, 2, \dots, T$, 其分布函数为 $F(z)$, T 为样本容量, 并且假设 r_t 服从均值为常量的随机波动分布, 则可以建立如下的 GARCH-t 模型

$$\begin{cases} r_t = \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = h_t^{1/2} \xi_t, \xi_t \sim t_\nu(\xi_t) \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \end{cases} \quad (6)$$

收益率的分布为

$$F(z) = P(r_t \leq z) = \Pr \left(\xi_t \leq \frac{z - \mu}{h_t^{1/2}} \right) \quad (7)$$

进而可推导出 r_t 的密度函数 $f(r_t)$ 如式 (8) 所示, 其中 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数.

$$f(r_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \frac{1}{h_t^{1/2} \left(1 + \frac{(r_t - \mu)^2}{\nu h_t}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad (8)$$

3.2 确定联合分布

Copula 方法不仅可以有效地描述随机变量之间的相关程度, 并且能够反映它们之间的相关模式, 描述它们的联合分布函数. 该方法被广泛应用于金融市场的相关性分析、资产定价和风险管理等方面^[6]. 最常用的 Copula 参数估计方法是两步极大似然估计法. 假设样本数据的边缘分布函数分别为 $F_1(x_1, \phi_1), \dots, F_N(x_N, \phi_N)$, 利用极大似然估计原理, 得到边缘分布函数的参数估计值为

$$\hat{\phi}_i = \arg \max_{\phi_i \in R} \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{i,t}, \phi_i), i = 1, 2, \dots, N$$

将参数 $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_N$ 代入边缘分布函数并引入到 Copula 函数中, 就可以估计出 Copula 函数的参数

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in R} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1,t}; \hat{\phi}_1), \dots, F_N(x_{N,t}; \hat{\phi}_N); \theta) \quad (9)$$

Embrechts^[6] 对不同的 Copula 模型进行了比较, 发现采用不同形式 Copula 函数可能导致不同的结果. Kolmogorov-Smirnov (K - S) 检验揭示了理论分布与经验分布之间的偏离程度, 本文采用该检验方法进行分析, 以选择较好地描述其尾部风险模式的 Copula 函数.

根据 Copula 理论, 如果 $C(u, v)$ 是一个 Copula 函数, 其中 $u = F(x)$, $v = G(y)$, $F(x)$ 和 $G(y)$ 分别表示随机变量 x, y 的分布函数. 那么 $Y | X = x$ 的条件分布为

$$H(Y \leq y | X = x) = \frac{\partial C(F(x), G(y))}{\partial F(x)} = C_1(F(x), G(y)) \quad (10)$$

它是 $(0, 1)$ 上的均匀分布.

基于以上性质, 可以把对 Copula 函数的拟合优度检验转化到检验 Copula 函数的一阶偏导数是否服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 这也就让使用 K-S 检验来评价待定的 Copula 函数对样本数据的拟合程度成为可能. K-S 检验的统计检验量数值越小, 说明偏离程度越低, 拟合效果越好.

4 人民币外汇衍生品市场的实证研究

围绕人民币汇率衍生品交易, 境内外目前存在三个主要交易市场和多种汇率衍生品. 境内市场为中国外汇交易中心的人民币外汇远期交易市场; 境外市场包括非交割远期 (NDF) 交易市场、和人民币远期期权交易市场. 本文分析所采用的数据是境内的人民币汇率即期、远期以及境外(香港和新加坡) NDF 的数据. 其中即期、远期数据以及 NDF 数据来源于 Bloomberg 数据中心. 因为远期以及 NDF 合约有 1 个月、3 个月、6 个月以及 1 年期限的形式, 本文仅以 1 个月的合约数据作为主要的分析对象, 对其他期限合约的分析方法类似. 样本数据期间为 2 年, 从 2006-07-03 到 2008-06-30, 共 487 个数据. 为了避免数值过小造成的精度损失, 将收益率定义为 $r_i = 100 \ln(P_i/P_{i-1})$, 并以 u_i, v_i, w_i 分别表示即期, 远期和 NDF 市场数据. 本文所有计算结果均通过使用开源的 R 软件得到.

本节通过数据实证研究分析以下两个问题. 一是将前文介绍的分布估计和联合分布拟合方法应用于 LPM 模型研究, 计算不同衍生品市场上的最优套期保值比率; 二是比较基于 LPM 与最小方差两种方法的套期保值比率在远期和 NDF 市场上的绩效.

4.1 收益率分布拟合和套期保值比率优化

在大多数情况下, GARCH(1,1) 可以较好地描述金融时间序列的波动特征, 下面使用 GARCH(1,1) - t 模型对样本数据进行分析. 从表 1 可以看到三个市场 t 分布的自由度均小于 10, 表明三个市场收益序列都具有尖峰厚尾的特性.

表 1 GARCH(1,1)-t 模型回归的系数结果
Table 1 The coefficients regressed by using the GARCH(1,1)-t model

市场	μ	α_0	α_1	β_1	ν
即期	-0.026 4**, (0.004 6)	0.000 1, (0.000 1)	0.023 5, (0.013 0)	0.967 6**, (0.020 8)	9.875 3*, (3.968 1)
远期	-0.020 5**, (0.004 7)	0.000 4, (0.000 3)	0.080 3*, (0.029)	0.906 6**, (0.033 0)	4.577 3**, (1.153 1)
NDF	-0.023 3**, (0.004 1)	0.000 2, (0.000 1)	0.040 8*, (0.019 8)	0.949 0**, (0.023 4)	5.700 9**, (1.745 1)

注: *表示在 5% 的置信水平下面显著, **表示在 1% 的置信水平下显著.

Copula 函数的种类很多, 本文选择具有代表性的 4 个单参数的 Copula 函数进行分析, 具体的函数表达式和参数范围见表 2 所示. 经过数据估计, 各个 Copula 函数的参数估计结果见表 3. 从表 3 可见, 估计得到的系数均在允许的范围内. 并且根据各类 Copula 函数参数的性质, 即期-远期市场收益率、即期-NDF 收益

率都存在着正相关关系, 这说明即期收益率的上升会引起远期与 NDF 收益率的上升, 即期收益率的下降也会导致远期与 NDF 收益率的降低.

把估计得到的各 Copula 函数的参数值, 以及即期-远期和即期-NDF 市场数据对 $(u_i, v_i), (u_i, w_i), i = 1, 2, \dots, T$ 代入相应 Copula 函数的条件分布函数中, 可以分别得到即期-远期和即期-NDF 市场各个 Copula 的 K-S 检验量以及概率值 P .

表 2 Copula 函数形式及其参数范围
Table 2 The Copula functions and parameters

Copula 类型	$C(u, v)$	参数范围
Clayton	$(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}$	$\alpha \in (0, \infty)$
Gumbel	$\exp\left(-\left((-\ln u)^{\frac{1}{\alpha}} + (-\ln v)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\right)$	$\alpha(0, 1]$
Frank	$-\frac{1}{\alpha} \log\left(1 - \frac{(1 - e^{-au})(1 - e^{-av})}{1 - e^{-a}}\right)$	$a \neq 0$
Other	$\frac{uv}{1 - \alpha(1-u)(1-v)}$	$\alpha \in (-1, 1)$

表 3 Copula 函数的 α 参数估计值
Table 3 Estimations of the parameter α

市场类型	Clayton	Gumbel	Frank	Other
远期	0.875 06	0.35	4.006 31	0.85
NDF	0.978 71	0.30	4.586 08	0.75

下面以 $C_1(F(x), G(y)) = \frac{\partial C(F(x), G(y))}{\partial G(y)}$ 为例作 K-S 检验, 具体结果如表 4 所示.

表 4 远期和 NDF 市场各个 Copula 函数的 K-S 检验结果
Table 4 The results of K-S testing in the forward and the NDF markets

	Copula 类型	Clayton	Gumbel	Frank	其它
远期	K-S 检验量	0.048 1	0.143 5	0.032 2	0.052 0
市场	概率值 P	0.210 0	0.000 0	0.692 6	0.142 9
NDF	K-S 检验量	0.041 3	0.151 9	0.029 8	0.050 5
市场	概率值 P	0.376 6	0.000 0	0.781 2	0.167 0

由表 4 结果可知, 无论是即期-远期市场, 还是即期-NDF 市场, Frank Copula 函数均较好的拟合了收益数据的 Copula 函数. 这说明 Frank Copula 函数能够对即期远期和即期 NDF 收益序列的相关模式给予较好的刻画. 因此, 本文在最优套期比率计算中, 选择使用 Frank Copula 函数.

同时, 在不失一般性的情况下, 选取目标报酬率为样本间即期汇率的期望值(平均值), 下偏距阶次为 2. 将前述各变量代入式(5), 用统计软件 R 计算可得最优的套期比率以及该套期比率下 LPM 值. 从表 5 第一行计算结果发现, 使用 LPM 模型对人民币即期头寸进行套期保值, 在 NDF 市场进行套期保值的比率要比远期市场的大, 而且在 NDF 市场面临低于目标收益率的风险要比远期市场的要小. 如果把最小化风险作为目标, 把套期比率作为手段, 可以得到如下的因果联系: 在同一目标收益率的前提下, 为了使面临的风险最小, 可以在 NDF 市场采用更有力的手段, 即构造更大的套期保值头寸, 从而承担较之远期市场更小的风险.

表 5 样本期间远期和 NDF 市场套期比率及绩效比较
Table 5 The optimal hedge ratios and performance indices in the forward and the NDF markets

市场类型	远期			NDF		
计算指标	h^*	LPM(h^*)	R/SV	h^*	LPM(h^*)	R/SV
LPM	0.387 79	0.004 78	-12.749 61	0.565 39	0.004 05	-13.597 08
最小方差	0.308 55		-12.991 95	0.479 44		-14.029 53

4.2 套期保值绩效分析

下面将比较 LPM 模型与最小方差模型套期绩效优劣. 采用 Nawrocki 等^[8] 定义的收益半变动比率 R/SV 指标, 该指标衡量了每单位损失风险所能获得的超额报酬.

$$R/SV = (E(R_p) - R_f) / (LPM(\theta, n, h, R_p)) \quad (11)$$

该项指标越大, 代表套期保值的绩效表现越好. 确定无风险利率为 4.14%, 这是 2007 – 2008 年中国资本的平均贷出利率. 本文省略了经典的最小方差套期保值的计算过程, 样本期间两种模型的 R/SV 指标值如表 5 中所示.

观察表 5, 发现无论是远期市场还是 NDF 市场, 在样本期间内以 LPM 为风险计量模型计算的 R/SV 指标都比以方差模型计算的要大. 这说明在 LPM 模型下, 每单位风险所得到的报酬相对较高, 从另外一个方面说, 在取得相同的报酬下, 以 LPM 模型计算出来的套期比率所面临的风险要比以最小方差方法计算出来的低. 因此, 反映了以 LPM 模型在套期保值操作中的优越性.

5 结束语

本文利用 LPM(下偏距)模型作为人民币外汇套期保值的风险测度方法, 研究外汇套期保值的最优比率. 通过对收益序列数据进行检验和模拟, 运用 GARCH 模型找出其边缘分布, 并通过 Copula 方法得到联合分布状况, 从而解决了 LPM 模型中因联合分布函数不确定而造成的计算和研究困难. 本文还通过 R/SV 指标比较了 LPM 模型与传统最小方差模型计算最优套期比率的优劣. 实证分析发现, 即期-远期和即期-NDF 的收益率分布都有比较明显的尾部风险; Frank Copula 函数能够对即期-远期和即期-NDF 收益序列的相关关系进行较好的刻画. 在样本期间, 使用 LPM 为风险度量基础相对于传统最小方差度量具有明显的优越性. 后续研究可从以下方面展开. 首先, 可以进一步考虑人民币与其衍生品市场相关结构的变化情况, 使用动态的 Copula 模型(如变参数的 Copula 模型)对它们的相关性进行分析. 其次, 可以把单期套期保值扩展到跨期保值研究.

参考文献:

- [1] Lien D, Tse Y K. Hedging time-varying downside risk [J]. The Journal of Future Market, 1998, 18(6): 705 – 722.
- [2] Lien D, Tse Y K. Some recent developments in futures hedging [J]. Journal of Economic Surveys, 2002, 16(3): 357 – 396.
- [3] 刘庆富, 仲伟俊, 梅姝娥. 基于 VaR-GARCH 模型族的我国期铜市场风险度量研究[J]. 系统工程学报, 2006, 21(4): 429 – 433.
Liu Qingfu, Zhong Weijun, Mei Shu'e. Market risk measurement of Copper futures in China based on VaR-GARCH models[J]. Journal of Systems Engineering, 2006, 21(4): 429 – 433. (in Chinese)
- [4] Hsu C C, Tseng C P, Wang Y H. Dynamic hedging with futures: A copula-based GARCH model [J]. Journal of Futures Markets, 2008, 28(11): 1095 – 1116.
- [5] Bawa V S. Optimal rules for ordering uncertain prospects [J]. Journal of Financial Economics, 1975, 5(1): 95 – 121.
- [6] Embrechts P, Lindskog F, McNeil A J. Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management [M] // Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 2003: 329 – 384.
- [7] Demirer R, Lien D. Downside risk for short and long hedgers [J]. International Review of Economics and Finance, 2003, 12(1): 25 – 44.
- [8] Nawrocki D, Kathartne S. A customized LPM risk measure for portfolio analysis [J]. Applied Economics, 1989, 21(2): 205 – 218.

作者简介:

梁建峰(1977—), 女, 河北沧州人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 金融风险管理、金融工程, Email: jfliang@mail.sysu.edu.cn;

陈健平(1984—), 男, 广东云浮人, 硕士, 交易策略研究员, 研究方向: 金融经济学和金融风险管理;

刘京军(1972—), 男, 湖北荆州人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 金融经济学和金融风险管理.